
30866
NEDL TRANSFER
HN 31FC S
Digitized by Google





29 [illegible]

N.a
page 283 ligne 19 au lieu de $g+b=f$ lisez $g+h=f$.
l'abbé Deidier a relevé cette faute ~~[illegible]~~, dans son traité du calcul differentiel de 4°, paris, 1740 jombert; voyez page 143 ligne 17.

trisection de l'angle page 418

TRAITÉ ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES ET DE LEUR USAGE

POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS dans les Problêmes tant déterminez qu'indéterminez.

OUVRAGE POSTHUME

De M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL, *Académicien Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.*



A PARIS,
Chez MONTALANT, Quay des Auguſtins, à la deſcente du Pont ſaint Michel

M. DCCXX.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.



AVERTISSEMENT DU LIBRAIRE.

L'Illustre & sçavant Auteur de cet Ouvrage étoit sur le point de le donner au Public, lorsqu'il mourut en 1704. âgé de quarante-trois ans. Le Manuscrit en étoit sans Preface, que ce seul Auteur pouvoit bien faire : c'est pour cela qu'il ne s'en trouve point ici. Mais le titre doit suffire aux Connoisseurs, pour juger de quelle consequence est en Géometrie la Matiere de ce Livre. La grande réputation de M. le Marquis de l'Hôpital en ce genre d'Etude, répond autant, ce me semble, de l'habileté avec laquelle cette matiere est traitée, que du succés qu'on doit attendre de l'Ouvrage. C'est ce qui m'a déterminé à l'imprimer tel qu'il étoit, sans autre soin que de faire ensorte qu'il le fût le plus correctement qu'il me seroit possible, en cherchant quelque habile Géometre, qui voulût

bien veiller à l'impression. La consideration & l'estime des Sçavans pour l'Auteur, m'en ont fait heureusement trouver deux celebres. C'est par leurs soins que pour répondre à l'empressement d'un trés-grand nombre de Mathematiciens pour cet Ouvrage, & sur tout les jeunes Geometres, qui le regardoient comme devant leur faciliter l'entrée à la sublime Analyse des Infiniment petits, *je le publie avec toute la confiance possible, quoique denué de la Preface que la maladie de l'un de ces deux Geometres, & les grandes occupations de l'autre, ne leur ont pas permis de faire; & je me persuade que les Lecteurs contens du fond de l'Ouvrage, ne le seront pas moins de son execution, tant pour la beauté du papier & du caractere, que pour l'exactitude.*



TABLE

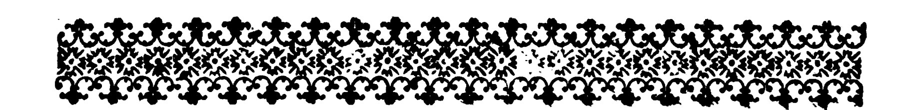


TABLE.

LIVRE PREMIER.

LIVRE SECOND.

LIVRE TROISIE'ME.

LIVRE QUATRIE'ME.

LIVRE CINQUIE'ME.

LIVRE SIXIE'ME.

LIVRE SEPTIE'ME.

LIVRE HUITIE'ME.

LIVRE NEUVIÉME.

LIVRE DIXIÉME.

FIN.

TRAITÉ



TRAITÉ ANALYTIQUE
DES SECTIONS CONIQUES,

Et de leur usage pour la Resolution des Equations dans les Problêmes tant déterminés qu'indéterminés.

LIVRE PREMIER.

De la Parabole.

DÉFINITIONS.

I.



YANT placé sur un plan une Regle *BC*, & une E'querre *GDO*, en sorte que l'un de ses côtés *DG* soit couché le long de cette regle, on prendra un fil *FMO* égal en longueur à l'autre côté *DO* de cette équerre, duquel l'on attachera un bout à l'extremité *O* de ce côté *DO*, & l'autre bout en un point quelconque *F* pris sur ce plan du même côté de l'équerre par rapport à la regle. Maintenant FIG. I.

ſi l'on fait gliſſer le côté *DG* de l'équerre le long de la regle *BC*, & qu'en même tems l'on ſe ſerve d'un ſtyle *M* pour tenir toûjours le fil tendu, & ſa partie *MO* toute jointe & comme collée contre le côté *OD* de l'équerre ; la courbe *AMX* que le ſtyle *M* décrit dans ce mouvement, eſt une portion de Parabole.

Si l'on renverſe l'équerre de l'autre côté du point fixe *F*, on décrira en la même façon l'autre portion *AMZ* de la même Parabole ; de ſorte que la ligne *XAZ* ne ſera qu'une même courbe qu'on appelle *Parabole*.

2.

La ligne *BC* dans laquelle le bord inferieur de la regle immobile *BC* touche le plan & le côté *DG* de l'équerre *GDO*, eſt appellée *Directrice*.

3.

Le point fixe *F* du plan, eſt nommé le *Foyer* de la Parabole.

4.

Si l'on mene du point fixe *F*, ſur la directrice *BC* une perpendiculaire *FE* qui rencontre la parabole au point *A* ; la ligne *AF* indefiniment prolongée du côté de *F*, eſt appellée l'*Axe* de la parabole.

5.

La ligne *p* quadruple de *AF*, eſt appellée *Parametre* de l'axe.

6.

Toutes les lignes comme *MP* menées des points de la parabole perpendiculairement à l'axe, ſont appellées *Ordonnées* à l'axe.

7.

Toutes les lignes comme *MO* menées des points de la parabole parallelement à l'axe, en ſont les *Diametres*.

8.

Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un point, & qui étant continuée de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe au dehors, eſt appellée *Tangente* en ce point.

COROLLAIRE I.

1. Il suit de la définition de la Parabole, que si l'on tire par un de ses points quelconques *M* au foyer *F* une ligne droite *MF*, & sur la directrice *BC* une perpendiculaire *MD*; les droites *MF*, *MD*, seront toûjours egales entre elles. Car si l'on retranche du côté *OD* de l'équerre & du fil *OMF* qui* lui est égal, la partie commune *OM*, il est visible que les parties restantes *MD*, *MF*, seront toûjours égales entre elles. * Def. 1.

COROLLAIRE II.

2. De-la il est évident, que si l'on mene une ligne droite quelconque *KK* parallele à la directrice *BC*, & que d'un point quelconque *M* de la parabole, on tire sur cette ligne la perpendiculaire *MK*, & au foyer la droite *MF*; la difference ou la somme *KD* des deux droites *MF*, *MK*, sera toûjours la même : sçavoir la difference lorsque le point *M* tombe au dessous de *KK*, & la somme lorsqu'il tombe au dessus.

COROLLAIRE III.

3. Il est évident que *FE* est divisée en deux parties égales par la parabole au point *A*. Car supposant que le point *M* tombe au point *A*, la ligne *MF* tombe sur *AF*, & la ligne *MD* sur *AE*, qui seront par consequent égales entre elles; puisque *MF* est toûjours * égale à *MD*, en quelque endroit de la parabole que tombe le point *M*. * Art. 1.

COROLLAIRE IV.

4. De la on voit comment on peut décrire une parabole *XAZ*, l'axe *AP* dont le point *A* est l'origine étant donné, avec son parametre *p*. Car ayant pris sur l'axe *AP* de part & d'autre du point *A* les parties *AF*, *AE* égales chacune au quart de son parametre *p*, & mené par le point *E* la perpendiculaire indéfinie *BC* sur *FE*; si l'on couche le bord inferieur d'une regle sur cette ligne

BC qui sert de directrice, & que par le moyen d'une équerre *ODG*, & d'un fil *FMO* égal au côté *OD*, & attaché par l'un de ses bouts au foyer *F*, & par l'autre bout à l'extremité *O* de ce même côté, l'on décrive une Parabole *XAZ* comme l'on a enseigné dans la definition premiere, il est visible qu'elle sera celle qu'on demande.

* *Def.* 1. Il n'est pas moins visible que plus le côté *OD* de l'équerre & le fil *OMF* (qui * lui doit être égal) sera long, plus aussi la portion de la parabole qu'on décrira sera grande ; de sorte qu'on la peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également le côté *OD* de l'équerre & le fil *OMF*.

COROLLAIRE V.

5. Si d'un point quelconque *M* de la Parabole l'on mene une ordonnée *MP* à l'axe, & au foyer *F* la droite *MF* ; il est clair que cette ligne $MF = AP + AF$,

* *Art.* 3. puisque $MF = MD = AP + AE$, & que * $AF = AE$.

PROPOSITION I.

Theorême.

Fig. 1. 6. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* AP, *est égal au rectangle du parametre* p, *par la partie* AP *de l'axe prise entre son origine* A *& la rencontre* P *de l'ordonnée.*

Il faut prouver que $\overline{MP}^2 = p \times AP$.

Ayant nommé la donnée *AF*, *m* ; & les indeterminées

* *Art.* 5. *AP*, *x* ; *PM*, *y* ; on aura $MF = * m + x$, & $PF = x - m$ ou $m - x$, selon que le point *p* se trouve au dessous ou au dessus du foyer *F*. Or le triangle rectangle *MPF* donne en l'un & l'autre cas $\overline{MF}^2$ $(mm + 2mx + xx) = \overline{MP}^2$ $(yy) + \overline{PF}^2$ $(mm - 2mx + xx)$; d'où l'on tire $4mx = yy$. Donc puisque selon la 5e definition $p = 4m$, on aura aussi $yy = px$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE PREMIER ET FONDAMENTAL.

7. Il est donc évident que si l'on nomme p le parametre de l'axe AP; chacune de ses parties AP, x; & chacune de ses ordonnées correspondantes PM, y; on aura toûjours $yy = px$. Or comme cette proprieté convient à tous les points de la parabole, & en determine la position par rapport à son axe AP; il s'ensuit que l'équation $yy = px$ exprime parfaitement la nature de la parabole par rapport à son axe. FIG. 1.

COROLLAIRE II.

8. Si l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ à l'axe AP, leurs quarrés seront entr'eux comme les parties AP & AQ de l'axe, prises entre son origine A & les rencontres P & Q de ces mêmes ordonnées. Car* $\overline{PM}^2 . \overline{QN}^2 :: p \times AP . p \times AQ :: AP . AQ$. FIG. 1.

* Art. 6. 7.

COROLLAIRE III.

9. Si l'on mene par un point quelconque P de l'axe AP une parallele MPM à ses ordonnées, elle rencontrera la parabole en deux points M & M également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M & M soient à la parabole, il faut* que les quarrés de chaque PM (y) prise de part & d'autre du point P, soient égaux chacun au même rectangle px.

* Art. 7.

COROLLAIRE IV.

10. Il suit de ce que* $yy = px$, que plus AP (x) est grande, plus aussi l'ordonnée PM (y) prise de part & d'autre de l'axe AP augmente, & cela à l'infini; & qu'au contraire plus AP (x) diminuë, plus aussi l'ordonnée PM (y) devient petite: de sorte que AP (x) étant nulle ou zero, chaque PM (y) prise de part & d'autre de l'axe AP devient aussi nulle; c'est-à-dire que le point P tombant en A, les deux points de rencontre M & M se réu-

* Art. 7.

nissent en ce point. D'où il est clair.

1°. Que si l'on mene par l'origine A de l'axe une ligne LL parallele à ses ordonnées, elle sera tangente en A.

2°. Que la Parabole s'éloigne de part & d'autre de plus en plus à l'infini de son axe AP à commencer par son origine A; & qu'ainsi toute parallele comme LM à l'axe AP, ne rencontre la Parabole qu'en un seul point M, & passe au dedans, puisque sa distance de l'axe demeure partout la même.

COROLLAIRE V.

11. Si d'un point quelconque M de la Parabole l'on tire une parallele ML à l'axe AP, laquelle rencontre en L la parallele AL à ses ordonnées; il est clair en menant l'ordonnée MP, que $AL = PM$ (y), & que $ML = AP$ $(x) = \frac{yy}{p}$, puisque * $px = yy$. D'où il suit que les droites ML $(\frac{yy}{p})$, ML $(\frac{yy}{p})$ prises de part & d'autre de l'axe AP sont égales entr'elles, lorsque les points L, L sont également éloignés du point A; & partant que si une ligne quelconque MM terminée par la parabole est coupée en deux parties égales par l'axe en P, elle sera parallele à la ligne LL, c'est à dire qu'elle sera ordonnée de part & d'autre à l'axe. Car ayant mené les paralleles ML, ML à l'axe AP, il est évident que LL sera divisée par le milieu en A, puisque MM l'est en P. Les droites ML, ML, seront donc égales entr'elles comme on vient de le prouver; & par consequent la ligne MM sera parallele à LL.

* Art. 7.

COROLLAIRE VI.

12. Il suit de ce que toutes les perpendiculaires MPM à l'axe AP, terminées de part & d'autre par la parabole, sont * coupées par le milieu en P; que l'axe divise la parabole en deux portions entierement égales & semblablement posées de part & d'autre. Car si le plan sur lequel elle est tracée, étoit plié le long de l'axe ensorte

* Art. 9.

que les deux parties ſe joigniſſent, il eſt viſible que les deux portions de la parabole tomberoient exactement l'une ſur l'autre.

PROPOSITION II.

Theorême.

13. *Si l'on mene par l'origine* A *de l'axe* AP *une ligne droite quelconque* AM *dans l'un ou l'autre des angles* PAL, PAL, *faits par l'axe* AP *& par la ligne* LL *parallele à ſes ordonnées ; je dis qu'elle ira rencontrer la parabole* MAM *en un autre point* M. FIG. 3.

Ayant pris ſur *AL* de part ou d'autre du point *A* la partie *AG* égale au parametre *p* de l'axe, & tiré *GF* parallele à l'axe *AP*, & qui rencontre la ligne *AM* (prolongée s'il eſt neceſſaire) au point *F*; on prendra ſur la ligne *AL* du même côté où tombe la ligne *AM* par rapport à l'axe *AP*, la partie *AL* égale *GF* ; & ayant tiré *LM* parallele à l'axe, je dis que le point *M* où cette ligne rencontre la droite *AM*, ſera à la parabole *MAM*.

Car menant *MP* parallele à *AL*, les triangles ſemblables *FGA*, *APM*, donneront *FG* ou *AL* ou $PM . GA :: AP . PM$. Et partant $\overline{PM} = GA\,(p) \times AP$. La ligne *PM* ſera donc * une ordonnée à l'axe *AP*. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 7.

COROLLAIRE I.

14. DE-LA on voit comment l'axe *AP* d'une parabole *MAM* étant donné avec ſon parametre *p*, & ayant mené par l'origine *A* de l'axe dans l'un ou l'autre des angles *PAL*, *PAL*, faits par l'axe *AP* & par la ligne *LL* parallele à ſes ordonnées, une ligne droite quelconque *AM* ; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver ſur cette ligne le point *M* où elle rencontre la parabole *MAM*.

COROLLAIRE II.

* Art. 10. 13. 15. Il est évident * qu'il n'y a que la ligne *LAL* parallele aux ordonnées à l'axe *AP*, qui puisse être tangente de la parabole *MAM* au point *A* origine de l'axe ; puisqu'il n'y a que cette seule ligne qui passant par le point *A*, & étant continuée de part & d'autre, ne rencontre la parabole en aucun autre point, & n'entre pas dedans.

DÉFINITIONS.

9.

Fig. 4. & 5. Si l'on mene par un point quelconque *M* de la parabole un diametre *MO*, une ordonnée *MP* à l'axe *AP*, & une ligne droite *MT* qui coupe sur l'axe *AP* prolongé au delà de son origine *A*, la partie *AT* égale à *AP*; toutes les lignes droites, comme *NO*, menées des points de la parabole parallelement à *MT*, & terminées par le diametre *MO*, sont appellées *Ordonnées* à ce diametre.

10.

Si l'on prend la ligne q troisiéme proportionnelle à *AT*, *MT*; cette ligne q sera nommée le *Parametre* du diametre *MO*.

COROLLAIRE I.

16. Si l'on nomme l'indéterminée *AP* ou *AT*, x; il est clair que $\overline{MT}^2 = qx$, puisque $AT\,(x) . MT :: MT . q$.

COROLLAIRE II.

17. A Cause du triangle rectangle *MPT*, le quarré
* Art. 7. $\overline{MT}^2\,(qx) = \overline{PT}^2\,(4xx) + \overline{MP}^2$ * (px); d'où en divisant par x, l'on tire $q = 4x + p$.

C'est à dire que le parametre q d'un diametre quelconque *MO*, surpasse le parametre p de l'axe du quadruple de *AP* (x).

COROLLAIRE III.

18. Si l'on tire du point *M* au foyer *F* la droite *MF*,
* Art. 5. on aura *MF* * $= AP + AF$. Or selon la définition 5e. le

le parametre de l'axe étant $p = 4\,AF$, le parametre du diametre MO sera * $q = 4\,AP + 4\,AF$. Donc le parametre q d'un diametre quelconque MO, vaut quatre fois la ligne MF tirée de son origine M au foyer F. * *Art.* 17.

PROPOSITION III.

Theorême.

19. L*e quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre* MO, *est égal au rectangle du parametre* q, *par la partie* MO *de ce diametre, prise entre son origine* M *&* *la rencontre* O *de l'ordonnée:* FIG. 4. 5.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 = q \times MO$.

Ayant mené l'ordonnée NQ à l'axe AP, laquelle rencontre le diametre MO au point R, & tiré OH parallele à MP, on nommera les données AP ou AT, x; PM ou RQ, y; & les indéterminées OR ou HQ, a; MO ou PH, b; les triangles semblables TPM, ORN, donneront cette proportion TP $(2x)$. PM (y) :: OR (a). $RN = \frac{ay}{2x}$. Cela posé.

Puisque (*fig.* 4.) $NQ = RQ\,(y) - RN\,(\frac{ay}{2x})$, ou $RN\,(\frac{ay}{2x}) - RQ\,(y)$, & $AQ = AH\,(x+b) - HQ\,(a)$; lorsque le point M tombe du côté de l'axe AP par rapport au diametre MO; & qu'au contraire (*fig.* 5.) $NQ = RQ\,(y) + RN\,(\frac{ay}{2x})$, & $AQ = AH\,(x+b) + HQ\,(a)$, lorsqu'il tombe du côté opposé : on aura $\overline{QN}^2 = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$, & $AQ = x + b \pm a$, sçavoir $-$ dans le premier cas, & $+$ dans le second. Or * AP (x). AQ $(x + b \pm a)$ :: $\overline{PM}^2$ (yy). $\overline{QN}^2 = yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x}$. On formera donc en comparant ensemble ces * *Art.* 8.

deux valeurs de $\overline{QN}$, l'égalité $yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x} = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$; d'où en effaçant de part & d'autre $yy \pm \frac{ayy}{x}$, divisant par yy, & multipliant par $4xx$, l'on tirera $\overline{OR}$ $(aa) = 4bx$. Mais les triangles semblables *MPT*, *NRO*,
* *Art.* 16. donnent $\overline{PT}$ $(4xx)$. $\overline{OR}$ $(4bx) :: \overline{MT}$ * (qx). $\overline{ON}$ $= bq = q$ * MO (b). *Ce qu'il falloit, &c.*

COROLLAIRE GENERAL.

20. Il est visible que ce qu'on a démontré dans la proposition premiere par rapport à l'axe *AP*, à ses ordonnées *PM*, & à son parametre *p*, s'etend par le moyen de cette derniere proposition à un diametre quelconque *MO*, à ses ordonnées *ON*, & à son parametre *q*. Or comme les articles 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 & 15 se tirent de la premiere proposition, & subsistent également, soit que les angles *APM* soient droits, ou bien qu'ils ne le soient pas; il s'ensuit que si l'on imagine dans ces articles que la ligne *AP*, au lieu d'être l'axe, soit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites *PM*, *QN*, & pour parametre la ligne *p*, ils seront encore vrais dans cette supposition; car leur démonstration demeurera la même, & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant partout où se trouve le mot d'axe, celui de diametre.

COROLLAIRE II.

Fig. 4. & 5. 21. Comme les articles 10 & 15 subsistent avec la même force, lorsque la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, est un diametre quelconque, tel que *MO*; il s'ensuit que la ligne *MT* parallele aux ordonnées *ON* à ce diametre, est tangente en *M*, & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher la parabole en ce point.

D'où l'on voit que d'un point donné sur une parabole, on ne peut mener qu'une seule tangente.

COROLLAIRE III.

22. DE LA il est évident selon la définition 9. que si l'on mene par un point quelconque *M* d'une parabole, une ordonnée *MP* à l'axe *AP*, & une ligne droite *MT* qui coupe sur l'axe prolongé du côté de son origine *A*, la partie *AT* egale à *AP*; cette ligne *MT* sera tangente en *M*. Et reciproquement que si la ligne *MT* est tangente en *M*, & qu'on mene l'ordonnee *MP* à l'axe; les parties *AT*, *AP*, de l'axe seront égales entr'elles.

COROLLAIRE IV.

23. SI l'on imagine dans les définitions 9 & 10, & dans la derniere proposition, que la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, soit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites *PM*, *QN*; on verra que cette proposition sera encore vraye, puisqu'elle se démontrera de la même maniere qu'auparavant, comme il est évident par la seule inspection de la fig. 6. où les triangles semblables donnent les mêmes proportions que dans le cas de l'axe. FIG. 6.

D'où il suit 1°. Que le Corollaire précedent doit encore avoir lieu, lorsque la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, est un diametre quelconque. 2°. Que le diametre *MO* peut être l'axe dans cette supposition; & qu'ainsi on peut regarder l'axe comme un diametre qui fait avec ses ordonnées des angles droits.

PROPOSITION IV.

Theorême.

24. S*i par un point quelconque* M *d'une parabole, l'on mene une ordonnée* MP *à l'axe, & une perpendiculaire* MG *à la tagente* MT *qui passe par le point* M; *je dis que la partie* PG *de l'axe sera toujours égale à la moitié de son parametre* p. FIG. 7.

Il faut prouver que $PG = \frac{1}{2}p$.

Car à cause des angles droits TPM, TMG, on aura TP ($2x$). PM (y) :: PM (y). $PG = \frac{yy}{2x} = \frac{1}{2}p$, en met-
* Art. 7. tant à la place de yy sa valeur * px.

PROPOSITION V.

Theorême.

Fig. 7. 25. *Si par un point quelconque* M *d'une parabole, l'on mene au foyer* F *la droite* MF, *un diametre* MO, *& une tangente* TMS; *les angles* FMT, OMS, *faits par la tangente* TMS *d'un côté avec la droite* MF, *& de l'autre avec le diametre* MO, *seront égaux entr'eux.*

Car menant l'axe AP qui rencontre en T la tangen-
* Art. 22. te TMS, & l'ordonnée MP à l'axe; on aura * $TA + AF$
* Art. 5. ou $TF = AP + AF$ ou * MF. Le triangle TFM sera donc isoscelle; & par consequent l'angle FTM, ou son égal OMS, sera égal à l'angle FMT. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

26. De-là il est clair que la tangente TMS prolongée indefiniment de part & d'autre du point touchant M, laisse la parabole toute entiere du côté de son foyer F. Et comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la parabole que tombe le point touchant M, il s'ensuit que cette ligne courbe est concave dans toute son étenduë autour de son foyer F.

PROPOSITION VI.

Problême.

Fig 8. & 9. 27. *Un diametre* AP *avec la tangente* LAL *qui passe par son origine* A, *& son parametre étant donnés; trouver un diametre* BQ *qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées, un angle égal à l'angle donné* K, *son origine* B, *& son parametre.*

Ayant mené par l'origine *A* du diametre donné la ligne *AE* qui fasse avec ce diametre de part ou d'autre, l'angle *PAE* égal à l'angle donné *K*, & trouvé * sur cette ligne (prolongée de l'autre côté de *A* lorsqu'elle ne tombe point dans l'un ou l'autre des angles *PAL*, *PAL*) le point *M* où elle rencontre la parabole, on menera par le point du milieu *Q* de la ligne *AM*, une parallele *QD* au diametre *AP*, qui rencontre la tangente *AL* au point *D*; & on divisera *QD* par le milieu en *B*. Je dis que la ligne *BQ* est le diametre qu'on cherche, qu'il a pour origine le point *B*, & pour parametre une troisiéme proportionnelle à *BQ*, & *QA*. * *Art.* 14. & 20.

Car 1°. La ligne *AM* étant divisée en deux parties égales au point *Q* par le diametre *BQ*, elle sera ordonnée * de part & d'autre à ce diametre; & comme les lignes *BQ*, *AP* sont paralleles entr'elles, l'angle *BQA* que fait le diametre *BQ* avec son ordonnée *QA* sera égal à l'angle *PAM* égal à l'angle donné *K* ou son complement à deux droits. 2°. Le point du milieu *B* de la ligne *QD* sera l'origine * de ce diametre, puisque *AQ* en est une ordonnée. 3°. Le parametre du diametre *BQ* est * la troisiéme proportionnelle à *BQ*, *QA*. * *Art.* 11. & 20. * *Art.* 22. & 23. * *Art.* 19.

Lorsque l'angle donnné *K* n'est pas droit, il est clair qu'on peut mener de part & d'autre du diametre *AP* deux differentes lignes *AE* qui fassent avec ce diametre des angles égaux à l'angle donné *K*; & qu'ainsi on pourra toûjours avoir deux solutions differentes, en observant que si l'une des deux lignes *AE* tomboit sur la tangente *AL*, le diametre donné *AP* satisferoit lui-même à la question. Mais lorsque cet angle *K* est droit, comme l'on ne peut mener qu'une seule ligne *AE* qui fasse avec le diametre *AP* un angle droit, il s'ensuit qu'on ne peut avoir alors qu'une solution; & qu'ainsi * le diametre cherché sera l'axe. FIG. 8. FIG. 9. * *Art.* 23.

il est à remarquer que les deux diametres *BQ*, *BQ*, qui satisfont au Problême lorsque l'angle donné *K* n'est pas droit, sont semblablement posés de part & d'autre FIG. 10.

de l'axe *AP*, & que leurs parametres sont égaux : ce qui se voit par la construction même, en supposant que le diametre donné *AP* soit l'axe, & en menant deux differentes lignes *AE*, *AE* de part & d'autre. Car les triangles rectangles *ALM*, *ALM*, & *ADQ*, *ADQ* étant visiblement égaux & semblables entr'eux, les lignes *AD*, *AD*; *DQ*, *DQ*; leurs moitiés *BQ*, *BQ*; & les
* *Art.* 19. ordonnées *QA*, *QA* seront égales entr'elles;* & par consequent les parametres le seront aussi.

COROLLAIRE.

28. Il est donc évident, 1°. qu'il n'y a qu'un seul diametre qui fasse avec ses ordonnées des angles droits; & qu'ainsi il ne peut y avoir qu'un seul axe. 2°. Qu'on peut toûjours trouver deux differens diametres, qui fassent avec leurs ordonnées des angles égaux à un angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; que ces deux diametres seront semblablement posés de part & d'autre de l'axe, & qu'ils auront des parametres égaux.

PROPOSITION VII.

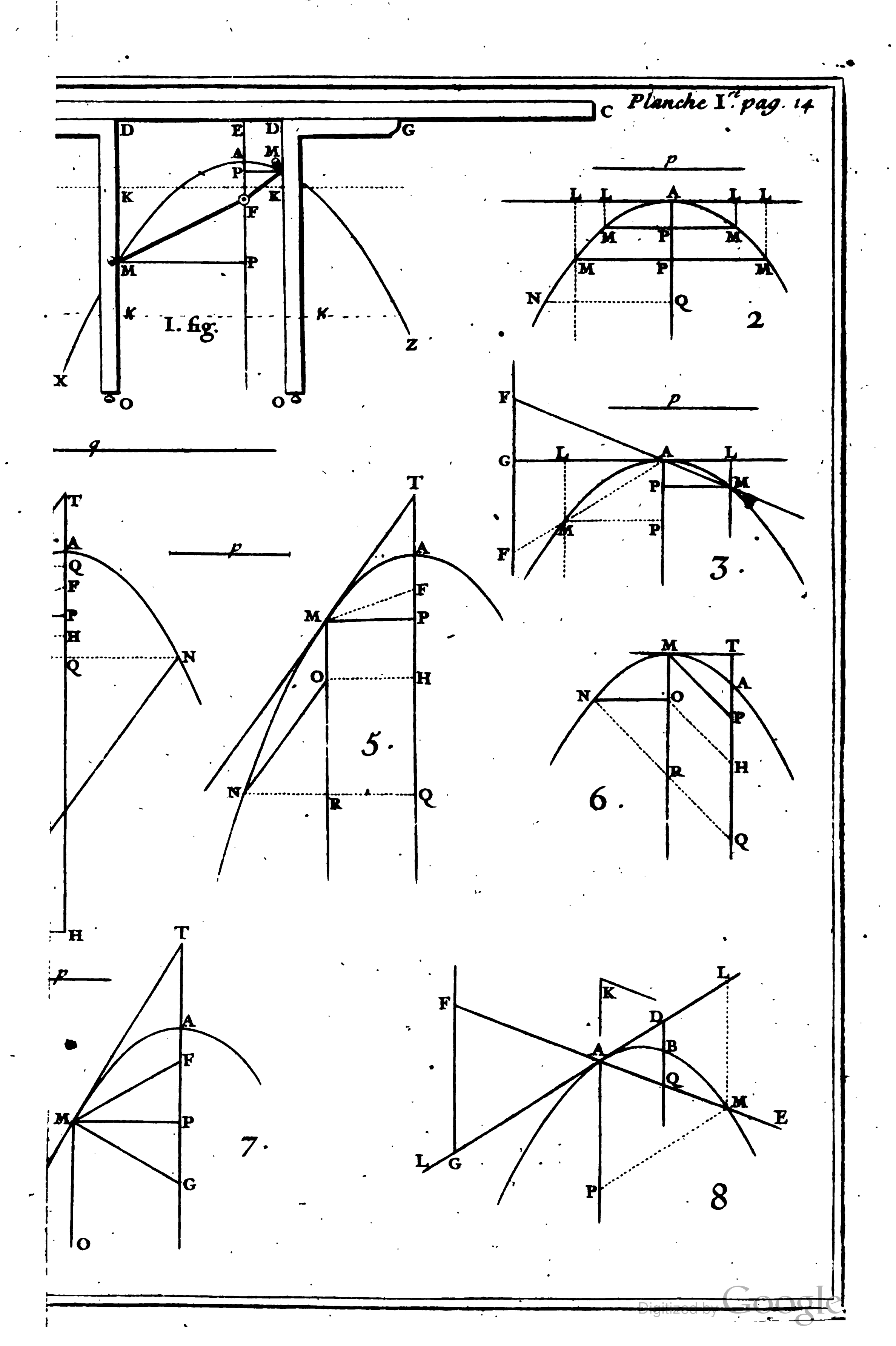
Problême.

29. *Un diametre étant donné avec la tangente qui passe par son origine, & son parametre; décrire la parabole par un mouvement continu.*

PREMIERE MANIERE.

Si le diametre donné étoit l'axe, on la décriroit selon
FIG. XI. l'article 4e; mais lorsqu'il ne l'est pas, soit *MO* le diametre donné, & *TMS* la tangente qui passe par son origine *M*. Cela posé.

On prendra sur le diametre *MO* prolongé au delà de son origine *M*, la partie *MD* égale au quart de son parametre; & on tirera une perpendiculaire indéfinie *DE* à *MD*. On menera *MF* qui fasse avec la tangente *TMS* un angle *FMT* égal à l'angle *OMS*; & ayant pris *MF* égale à *MD*, on décrira selon la définition



I. fig.
2
3.
5.
6.
7.
8

remiere, une parabole qui ait pour directrice la ligne *DE*, & pour foyer le point *F*. Je dis qu'elle sera celle qu'on demande.

Car, 1°. La ligne *MO* étant perpendiculaire à la directrice *DE*, sera parallele à l'axe; & par consequent un diametre selon la définition 7e. 2°. La ligne *TMS* sera* tangente en *M*. 3°. Le parametre du diametre *MO* sera* quadruple de *MF*. * Art. 25. * Art. 18.

SECONDE MANIERE.

Soit *AP* le diametre donné, & *LAL* la tangente qui passe par son origine *A*. Cela posé. FIG. 12.

Ayant pris sur le diametre *AP*, prolongé au delà de son origine *A*, la partie *AG* égale à son parametre, & mené une droite indéfinie *DGD* qui fasse avec *AG* l'angle *AGD* égal à l'angle *GAL* pris du même côté; on fera mouvoir une ligne droite indéfinie *DM* le long de *GD* toûjours parallelement à *AG*, en entraînant par son extrêmité *D* le côté *DA* de l'angle *DAM* égal à l'angle *GAL*, & mobile par son sommet autour du point fixe *A*. Je dis que l'intersection continuelle *M* de la ligne *DM* & du côté *AM*, décrira dans ce mouvement la parabole qu'on demande.

Car menant *MP* parallele à *AL*, les lignes *MP*, *GD* seront égales entr'elles, puisque l'angle *APM* ou *GAL* étant égal à l'angle *AGD*, elles seront également inclinées entre les paralleles *GP*, *DM*. Or les triangles *AGD*, *MPA* sont semblables: car l'angle *MPA* ou *GAL* est égal à l'angle *AGD*; & l'angle *PMA* ou *MAL* égal à l'angle *GAD*, puisque retranchant des angles égaux *GAL*, *DAM*, le même angle *DAL*, les restes doivent être égaux. On aura donc *AG*. *GD* ou *PM* :: *PM*. *AP*, & partant $GA \times AP = \overline{PM}^2$; d'où il clair que *PM* est* une ordonnée au diametre *AP* qui a pour origine le point *A*, pour tangente la ligne *LAL*, & pour parametre la ligne *AG*. *Ce qu'il falloit, &c.* * Art. 19. & 21.

Si le diametre *AP* étoit l'axe, alors les lignes *GD*, FIG. 13.

AL, seroient paralleles, & la démonstration deviendroit plus facile; car l'on voit tout d'un coup que *GD* est égale à *PM*, & que les triangles rectangles *AGD*, *MPA* sont semblables; d'où il suit *AG*. *GD* ou *PM* :: *PM*. *AP*. Donc $AG \times AP = \overline{PM}^2$, &c.

PROPOSITION VIII.

Problême.

30. *Un diametre* AP *étant donné avec son parametre, & la tangente* AL *qui passe par l'origine* A *de ce diametre; trouver autant de differens points que l'on voudra de la parabole, ou (ce qui est la même chose) la décrire par plusieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

FIG. 14. Ayant pris sur le diametre *AP* prolongé au delà de son origine *A*, la partie *AG* égale à son parametre, divisé *AG* en deux parties égales au point *D*, & mené une ligne droite indéfinie *AF* perpendiculaire à *AG*; on décrira d'un point *C* pris partout où l'on voudra sur *DA* prolongée indéfiniment du côté de *A*, comme centre, & du rayon *CG*, un arc de cercle *PF* qui coupera le diametre *AP* & sa perpendiculaire *AF* en deux points *P*, *F*. On menera par le point *P* une parallele *MPM* à la tangente *AL*, sur laquelle on prendra de part & d'autre les parties *PM*, *PM*, égales chacune à *AF*. On trouvera de la même maniere autant de couple de points *M* que l'on voudra; par lesquels on fera passer une ligne courbe *MAM* qui sera la parabole qu'on demande.

Car tous les arcs *PF* passant par le même point *G*, & ayant leurs centres sur la ligne *GA* prolongée, s'il est necessaire du côté de *A*, auront pour diametres les lignes *GP*; & par conséquent la proprieté de ces cercles donnera toûjours $\overline{AF}^2 = GA \times AP$. Mais chaque *PM* est * égale à sa correspondante *AF*, & de plus parallele

* Hyp.

à

à la tangente AL qui passe par l'origine A du diametre AP; elle sera donc * ordonnée à ce diametre. C'est pourquoi la Parabole qu'on demande, doit passer par tous les points M, trouvés comme l'on vient d'enseigner. * Art. 19. & 21.

Il est visible qu'on peut se tromper en traçant les parties de la parabole, qui joignent les points trouvés; mais on voit en même temps que l'erreur ne peut être sensible, lorsque ces points sont fort près les uns des autres. Ceux qui ont besoin de décrire souvent des Sections Coniques, préferent ordinairement cette methode, de les décrire par plusieurs points; parce que les machines dont on se sert pour les décrire par un mouvement continu, étant composées, sont souvent fautives, & peu exactes dans la pratique.

SECONDE MANIERE.

Ayant mené par un point quelconque L de la tangente AL, une parallele indéfinie LE au diametre AP; on prendra sur cette ligne & sur le diametre AP prolongé au delà de son origine A, les parties LE, EE, EE, &c. AF, FF, FF, &c. toutes égales entr'elles, & de telle grandeur qu'on voudra. On marquera sur LE, le point M, en sorte que LM soit troisiéme proportionnelle au parametre donné du diametre AP, & à la partie AL de la tangente. On tirera enfin des points A, M, les lignes AE, AE, AE, &c. MF, MF, MF, &c; je dis que les points d'intersection N, N, N, &c. de chaque AE, avec la correspondante MF, seront tous à la parabole qu'on demande. FIG. 15.

Car menant par le point marqué M, & par l'un des points trouvez N, les lignes MP, NQ, paralleles à la tangente AL, & nommant AP, x; PM ou AL, y; AQ, u; QN, z; les triangles semblables NQA, ALE, & MPF, NQF, donneront ces deux proportions QN (z). QA (u) :: AL (y). LE ou $AF = \frac{uy}{z}$. & MP

(y). PF ou $PA + AF$ ($x + \frac{uy}{z}$) :: NQ (z). QF ou $QA + AF$ ($u + \frac{uy}{z}$). D'où en multipliant les Extrêmes & les Moyens, l'on forme l'égalité $uy + \frac{uyy}{z} = xz + uy$; & effaçant de part & d'autre uy, & multipliant par z, il vient $uyy = xzz$, qui se reduit à cette proportion AP (x). AQ (u) :: $\overline{MP}^2$ (yy) $\overline{NQ}^2$ (zz). Or par la construction, le quarré de AL ou de PM, est egal au rectangle de la partie AP du diametre donné, par son parametre. Cette ligne PM sera donc * une ordonnée au diametre AP; & par consequent QN en sera * une autre. Ainsi le point N sera l'un des points de la parabole qui tombent d'un côté du diametre AP: pour les avoir de l'autre, il n'y a qu'à prendre sur les droites indéfinies LE, AF, les parties égales LE, EE, &c. AF, FF, &c de l'autre côté des points L, A.

* Art. 19. & 21.

* Art. 8. & 20.

Si au lieu du parametre du diametre AP que l'on suppose ici donné, l'on avoit un des points M de la parabole; ce qui arrive souvent : il n'y auroit qu'à mener par ce point, une parallele indefinie LE, au diametre AP, & achever le reste comme cy-dessus.



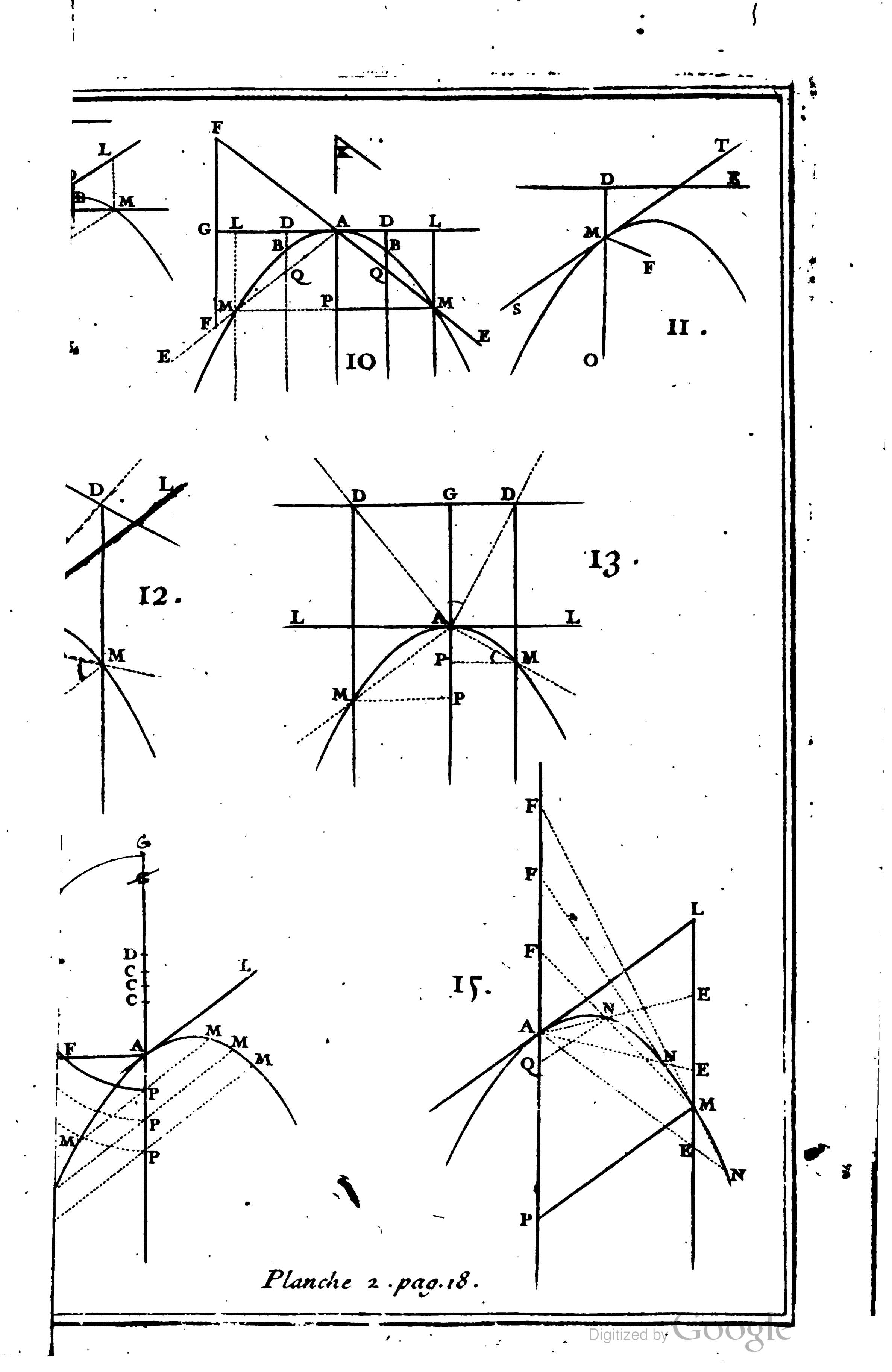


Planche 2. pag. 18.

(y). PF ou $PA + AF$ $(x + \frac{uy}{z})$ :: NQ (z). QF ou $QA + AF$ $(u + \frac{uy}{z})$. D'où en multipliant les Extrêmes & les Moyens, l'on forme l'égalité $uy + \frac{uyy}{z} = xz + uy$; & effaçant de part & d'autre uy, & multipliant par z, il vient $uyy = xzz$, qui se reduit à cette proportion AP (x). AQ (u) :: $\overline{MP}^2$ (yy) $\overline{NQ}^2$ (zz). Or par la construction, le quarré de AL ou de PM, est egal au rectangle de la partie AP du diametre donné, par son parametre. Cette ligne PM sera donc * une ordonnée au diametre AP; & par consequent QN en sera * une autre. Ainsi le point N sera l'un des points de la parabole qui tombent d'un côté du diametre AP: pour les avoir de l'autre, il n'y a qu'à prendre sur les droites indéfinies LE, AF, les parties égales LE, EE, &c. AF, FF, &c de l'autre côte des points L, A.

* Art. 19. & 21.

* Art. 8. & 20.

Si au lieu du parametre du diametre AP que l'on suppose ici donné, l'on avoit un des points M de la parabole; ce qui arrive souvent : il n'y auroit qu'à mener par ce point, une parallele indefinie LE, au diametre AP, & achever le reste comme cy-dessus.



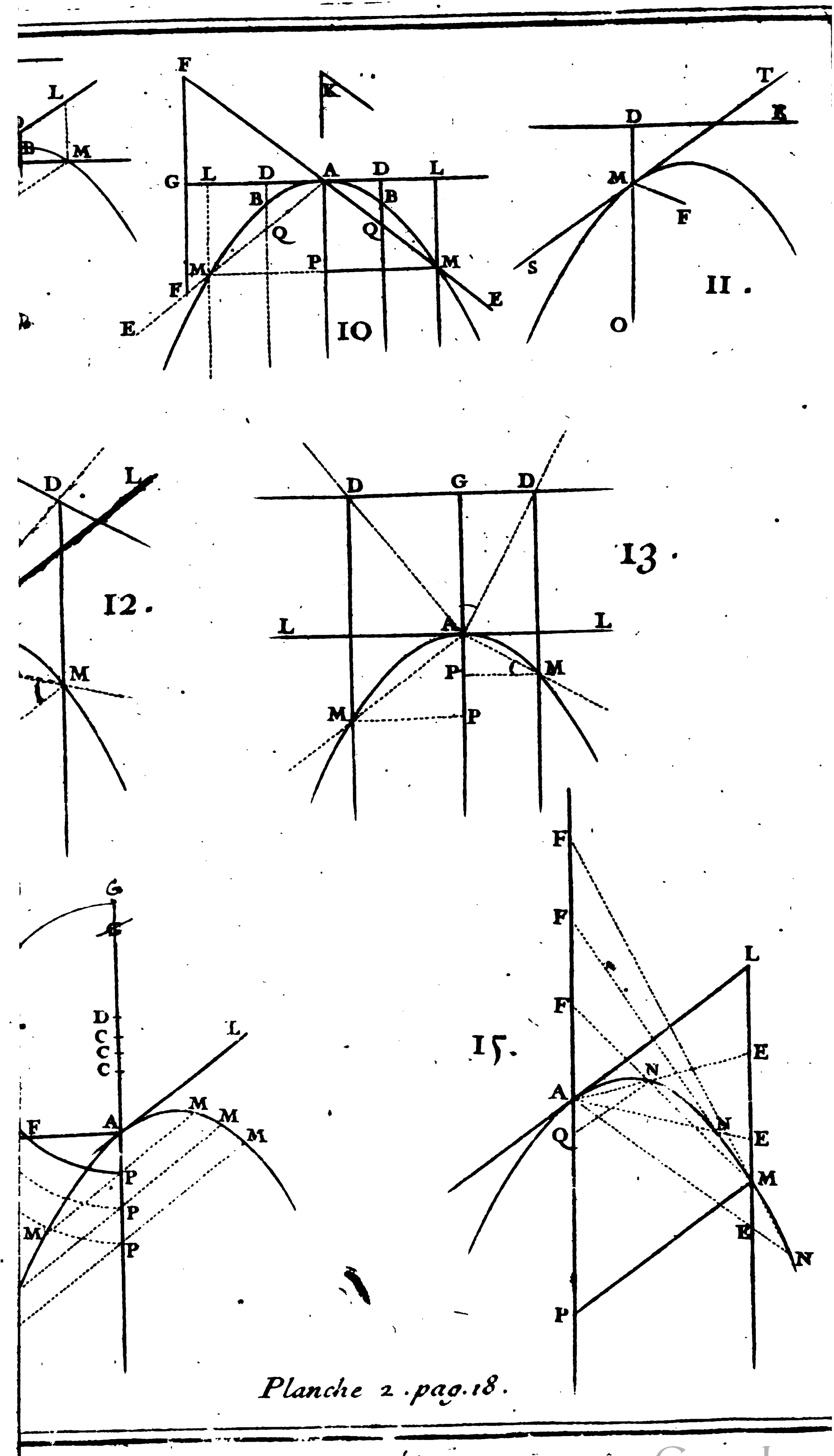


Planche 2. pag. 18.

LIVRE SECOND.

De l'Ellipse.

DÉFINITIONS.

1.

AYANT attaché sur un plan les deux bouts d'un fil *FMf*, en deux points *F*, *f*, dont la distance *Ff* soit moindre que la longueur du fil, on se servira d'un stile *M*, pour tenir ce fil toûjours tendu ; & conduisant ce stile autour de ces deux points, en sorte qu'il revienne au même point d'où il étoit parti : ce stile décrira dans ce mouvement, une ligne courbe, qui sera nommée *Ellipse*. FIG. 16.

2.

Les deux points fixes *F*, *f*, sont nommés les deux *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui passe par les deux Foyers *F*, *f*, & qui est terminée de part & d'autre par l'Ellipse, est appellée le *premier* ou le *grand Axe*.

4.

Le point *C*, qui divise par le milieu le premier Axe *Aa*, est nommé le *Centre* de l'Ellipse.

5.

La ligne *Bb*, menée par le Centre *C*, perpendiculairement au premier Axe *Aa*, & terminée de part & d'autre par l'Ellipse, est appellée le *second* ou le *petit Axe*.

6.

Les deux Axes *Aa*, *Bb*, sont appellez ensemble, *Conjugués* : de sorte que le premier Axe *Aa*, est dit conjugué au second *Bb* ; & reciproquement le second *Bb*, conjugué au premier *Aa*.

7.

Les lignes *MP*, *MK*, menées des points *M* de l'Ellipse parallelement à l'un des Axes, & terminées par

l'autre, sont appellées *Ordonnées* à cet autre Axe : ainsi *MP* est Ordonnée à l'Axe *Aa*, & *MK* à l'Axe *Bb*.

8.

La troisiéme proportionnelle aux deux Axes, est appellée *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion. Ainsi si l'on fait comme le premier Axe *Aa*, est au second Axe *Bb*, de même le second *Bb*, à une troisiéme proportionnelle *p*; cette ligne *p* sera le Parametre du premier Axe.

9.

Toutes les lignes droites qui passent par le centre *C*, & qui sont terminées de part & d'autre par l'Ellipse, sont appellées *Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre l'Ellipse qu'en un seul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

FIG. 17. 31. Si l'on conçoit que les deux foyers *F*, *f*, & le centre *C* se réünissent en un seul point; il est visible que l'Ellipse se changera alors en un Cercle qui aura pour rayon la droite *CM*, égale à la moitié de la corde *CMC*, attachée par ces deux bouts au point *C*, qui en sera le centre. On pourra donc considerer un cercle comme une espece particuliere d'Ellipse, dans laquelle la distance des foyers est nulle; de sorte que tout ce qu'on démontrera dans la suite de l'Ellipse, telle que puisse être la distance de ces deux foyers, se peut aussi appliquer au cercle, en supposant que cette distance devienne nulle.

COROLLAIRE I.

FIG. 16. 32. Il suit de la définition premiere, que si l'on mene d'un point quelconque *M* de l'Ellipse, aux deux foyers *F*, *f*, les droites *MF*, *Mf*; leur somme sera toûjours la même.

COROLLAIRE II.

33. LORSQUE le point M tombe en A, il eſt viſible que MF devient AF, & que Mf devient Af: de même lorſque le point M tombe en a, il eſt encore viſible que MF devient aF, & que Mf devient af. On aura donc $AF + Af$, ou $2AF + Ff = aF + af$, ou $2af + fF$; & partant $AF = af$. D'où il ſuit:

1°. Que la ſomme des deux droites MF, Mf, eſt toûjours égale au premier axe Aa, puiſque $Mf + MF = Af + AF = Af + fa$.

2°. Que la diſtance Ff des foyers, eſt diviſée en deux parties égales par le centre C, puiſque $CA - AF$ ou $CF = Ca - af$ ou Cf.

COROLLAIRE III.

34. SI de l'extremité B du ſecond axe Bb, l'on mene aux deux foyers F, f, les droites BF, Bf; il eſt clair que les triangles rectangles BCF, BCf, ſeront égaux; & qu'ainſi l'hypothenuſe BF, eſt égal à l'autre hypothenuſe Bf: & par conſequent BF, ou $Bf = CA$ ou Ca, puiſque * $BF + Bf = Aa$. On prouve de même que Fb ou $bf = CA$ ou Ca. D'où l'on voit: * Art. 33.

1°. Que le ſecond axe Bb, eſt diviſé en deux parties égales par le centre C; car les triangles rectangles FCB, FCb ſeront égaux, puiſqu'ils ont des hypothenuſes égales FB, Fb, & le côté FC commun.

2°. Que le ſecond axe Bb, eſt toûjours moindre que le premier Aa; puiſque ſa moitié BC étant l'un des côtez du triangle rectangle BCF, ſera moindre que ſon hypothenuſe BF, qui eſt égale à la moitié CA du premier axe Aa.

3°. Que ſi l'on décrit de l'une des extrémitez B du petit ou ſecond axe Bb comme centre, & du rayon BF égal à CA, moitié du premier ou grand axe Aa, un cercle; il coupera ce grand axe en deux points F, f, qui ſeront les deux foyers de l'Ellipſe.

COROLLAIRE IV.

35. Les mêmes choses étant posées, si l'on nomme CA ou BF, t; CF, m; le triangle rectangle BCF, donnera $\overline{BC}^2 = tt - mm$. Or $AF = t - m$, & $Fa = t + m$, & partant $AF \times Fa = tt - mm$. D'où il est évident que le quarré de la moitié CB du petit axe Bb, est égal au rectangle de AF par Fa parties du grand axe Aa, prises entre l'un des foyers F, & ses deux extremités A, a.

COROLLAIRE V.

36. Il sera facile à present de décrire une Ellipse dont les deux axes Aa, Bb, sont donnez. Car ayant trouvé* sur le premier ou grand axe Aa, les foyers F, f, on attachera dans ces points, les extremités d'un fil FMf, dont la longueur égalera celle de cet axe; & ayant décrit par le moyen de ce fil, une Ellipse comme l'on a enseigné dans la définition premiere, il est évident qu'elle sera celle qu'on demande.

*Art. 34.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 16.

37. *Si l'on mene l'ordonnée* MP *au premier ou grand axe* Aa, *& qu'on prenne sur cet axe la partie* AD *égale à* MF; *Je dis que* CA. CF :: CP. CD.

Ayant nommé, comme auparavant, les données CA, t; CF, m; & de plus les indeterminées CP, x; PM, y; & l'inconnuë CD, z; il peut arriver deux differens cas.

Premier cas. Lorsque le point P tombe au dessus du centre C. Comme PF est toûjours moindre que Pf; il s'ensuit que MF ou AD sera moindre que Mf ou aD; c'est pourquoi AD ou $MF = t - z$, aD ou $Mf = t + z$, $FP = m - x$ ou $x - m$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer F), $Pf = x + m$. Or les triangles rectangles MPF, MPf, donnent $tt -$

$2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$, & $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la premiere égalité de ceux de la seconde, on aura $4tz = 4mx$; d'où l'on tire $CD\ (z) = \frac{mx}{t}$.

Second cas. Lorsque le point P tombe au dessous du centre C, comme PF est toûjours plus grande que Pf, il s'ensuit que MF ou AD, sera plus grande que Mf ou aD : c'est pourquoi AD ou $MF = t + z$, aD ou $Mf = t - z$, $PF = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer f. Or les triangles rectangles MPF, MPf, donnent $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$, & $tt - 2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la seconde égalité de ceux de la premiere, on aura $4tz = 4mx$; d'où l'on tire encore $CD\ (z) = \frac{mx}{t}$. Par consequent en l'un & l'autre cas, on aura $CA\ (t) : CF\ (m) :: CP\ (x) . CD\ (z)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

38. Il est donc évident que si l'on nomme les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x; on aura toûjours $MF = t - \frac{mx}{t}$, & $Mf = t + \frac{mx}{t}$, lorsque le point P tombe au dessus du centre C : & qu'au contraire on aura $MF = t + \frac{mx}{t}$, & $Mf = t - \frac{mx}{t}$, lorsqu'il tombe au dessous.

PROPOSITION II.

Theorême.

39. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* Aa, *est au rectangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué* Bb, *est au quarré de l'axe* Aa.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 . AP \times Pa :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$.

Les mêmes choses étant posées que dans l'article precedent, si l'on met dans l'égalité $tt \mp 2tz + zz = yy + mm \mp 2mx + xx$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle rectangle MPF, à la place de z sa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toûjours celle ci $ttyy = t^4 - ttxx - mmtt + mmxx$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}^2 (yy). AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{BC}^2 (tt - mm). \overline{CA}^2 (tt) :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$. *Ce qu'il falloit, &c.*

* Art. 37.

* Art. 35.

COROLLAIRE I.

40. Si l'on mene une ordonnée MK à l'autre axe Bb, lequel j'appelle $2c$, il est clair que $MK = CP (x)$, & que $CK = PM (y)$. Or * $\overline{PM}^2 (yy). AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc). \overline{Aa}^2 (4tt)$. Et partant $4ccxx = 4cctt - 4ttyy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}^2 (xx). BK \times Kb (cc - yy) :: \overline{Aa}^2 (4tt). \overline{Bb}^2 (4cc)$.

* Art. 39.

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK à l'axe Bb, est au rectangle de BK par Kb parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué Aa, est au quarré de l'axe Bb.

COROLLAIRE FONDAMENTAL.

FIG. 18. 19.

41. Si l'on nomme l'un ou l'autre axe Aa, $2t$; son conjugué Bb, $2c$; son parametre p; chacune de ses ordonnées PM, y; chacune de ses parties CP prises entre le centre & les rencontres des ordonnées, x; on aura * toûjours $\overline{PM}^2 (yy). AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc). \overline{Aa}^2 (4tt) :: p. Aa (2t)$. Puisque selon la définition du Parametre, $Aa (2t). Bb (2c) :: Bb (2c). p = \frac{4cc}{2t}$. D'où en multipliant d'abord les extrêmes & les moyens de la proportion $yy. tt - xx :: 4cc. 4tt$, & ensuite

* Art. 39.

ensuite de l'autre $yy . tt - xx :: p . 2t$. L'on tire $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, & $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points de l'Ellipse, & qu'elle en détermine la position par rapport aux deux axes conjugués Aa, Bb; il s'ensuit que l'équation $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, ou $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$, exprime parfaitement la nature de l'Ellipse par rapport à ses axes.

COROLLAIRE III.

42. Si l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ, à l'axe Aa; leurs quarrés seront entr'eux comme les rectangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$, des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes ordonnées; car * $\overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2 :: \overline{PM}^2 . AP \times Pa :: \overline{QN}^2 . AQ \times Qa$. Et partant $\overline{PM}^2 . \overline{QN}^2 :: AP \times Pa . AQ \times Qa$. * Art. 39.

COROLLAIRE IV.

43. Si l'on mene par un point quelconque P de l'un des axes conjugués Aa, une parallele MM à l'autre axe Bb; elle rencontrera l'Ellipse en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non davantage. Car afin que les points M, M, soient à l'Ellipse, il faut * que les quarrés de PM (y) prise de part & d'autre de l'axe Aa, soient égaux chacun à la même quantité $cc - \frac{ccxx}{tt}$. * Art. 41.

COROLLAIRE V.

44. Il suit de ce que * $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, que plus CP (x) prise de part & d'autre du centre C augmente plus chaque ordonnée PM (y) prise de part & d'autre de l'un ou de l'autre axe Aa, diminuë; de sorte que CP (x) étant égale à CA ou Ca (t), chaque PM (y) devient alors nulle ou zero : & qu'au contraire plus CP (x) devient petite, plus aussi chaque ordonnée PM (y) prise * Art. 41.

de part & d'autre de l'axe Aa augmente ; de ſorte que CP (x) devenant zero, chaque PM (y), qui eſt alors CB ou Cb (c), ſera la plus grande des ordonnées. D'où il eſt clair.

1°. Que ſi l'on mene par les extremités B, b, de l'un des axes conjugués, des paralleles à l'autre ; elles ſeront tangentes en ces points.

2°. Que l'Ellipſe s'éloigne de part & d'autre de plus en plus de l'un ou de l'autre axe Aa, en commençant par l'extremité A ; juſqu'à ce qu'elle rencontre ſon conjugué Bb ; après quoi elle va toûjours en s'approchant du même axe Aa, juſqu'à ce qu'elle le rencontre en ſon autre extremité a.

COROLLAIRE VI.

* *Art.* 41. 45. Il ſuit encore de ce que * $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, que ſi l'on prend les points P, P, également éloignés de part & d'autre du centre C ; les ordonnées PM, PM, ſeront égales. D'où il eſt évident que ſi une ligne quelconque MM, terminée par l'Ellipſe, eſt coupée en deux également par l'un des axes conjugués Bb en un point K autre que le centre ; elle ſera parallele à l'autre Aa. Car menant les paralleles MP, MP, à l'axe Bb, la ligne PP ſera diviſée par le milieu en C, puiſque MM l'eſt en K ; & partant les ordonnées PM, PM ſeront égales. La droite MM ſera donc parallele à l'axe Aa.

COROLLAIRE VII.

46. Si l'on conçoit que le plan ſur lequel l'Ellipſe eſt tracée, ſoit plié le long d'un des axes Bb, en ſorte que ſes deux parties ſe joignent ; il eſt clair que les deux demi-Ellipſes BAb, Bab, tomberont exactement l'une ſur l'autre ; ſçavoir, les points A, M, &c. ſur a, M, &c. puiſ-
* *Art.* 45. que * toutes les perpendiculaires Aa, MM, &c. à cet axe, ſont coupées par le milieu aux points C, K, &c. D'où il eſt viſible que l'Ellipſe eſt coupée par les deux axes en qua-

tre portions parfaitement égales & uniformes, qui ne different entr'elles que par leur situation.

PROPOSITION III.

Theorême.

47. *Si l'on mene par l'une des extremités* A *de l'un des axes* Aa, *une ligne droite quelconque* AM *dans l'un des angles* aAL, aAL, *faits par cet axe, & par la ligne* LAL *parallele à son conjugué* Bb; *je dis qu'elle rencontrera l'Ellipse en un autre point* M.

Ayant pris sur AL de part ou d'autre du point A, la partie AG égale au parametre p de l'axe Aa, & tiré GF parallele à cet axe, & qui rencontre la ligne AM (prolongée, s'il est necessaire) au point F, on prendra sur la ligne AL du même côté où tombe la ligne AM par rapport à l'axe Aa, la partie AL égale à GF, & ayant tiré par l'autre extremité a de l'axe Aa la droite aL; je dis que le point M où elle coupe la ligne AM, est à l'Ellipse MAM. FIG. 20.

Car menant MP parallele à AL, & nommant les connuës Aa, $2t$; AG, p; GF ou AL, a; & les inconnuës CP, x; PM, y; les triangles semblables AGF, MPA, & LAa, MPa, donneront $AG\ (p)\ GF\ (a) :: MP\ (y)$. $AP\ (t \pm x) = \frac{ay}{p}$. Et $AL\ (a)$. $Aa\ (2t) :: PM\ (y)$. aP $(t \mp x) = \frac{2ty}{a}$. Et par consequent on aura toûjours $AP \times Pa\ (tt - xx) = \frac{2tyy}{p}$, soit que le point P tombe au dessus ou au dessous du centre C; d'où l'on tire $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$. La ligne PM sera donc* une ordonnée à l'axe Aa; & partant le point M sera à l'Ellipse MAM. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 41.

COROLLAIRE I.

48. DE-LA on voit comment un axe Aa d'une Ellipse MAM étant donné avec son parametre p; &

ayant mené par l'une des extremités *A* de cet axe, une ligne droite quelconque *AM* dans l'un ou l'autre des angles *aAL*, *aAL*, fait par cet axe, & par la ligne *LAL* parallele à son conjugué *Bb*; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver sur cette ligne le point *M* où elle rencontre l'Ellipse *MAM*.

COROLLAIRE II.

49. Il est évident qu'il n'y a que la ligne *LAL* parallele à l'axe *Bb*, qui puisse être tangente de l'Ellipse *MAM* au point *A*, l'une des extremités de son conjugué *Aa*; puisqu'il n'y a que cette seule ligne, qui passant par le point *A*, & étant continuée de part & d'autre, ne la rencontre en aucun point, & n'entre pas dedans.

PROPOSITION IV.

Theorême.

Fig. 20. 50. Tous *les diametres comme* MCm, *sont coupés en deux également par le centre* C, *& ils ne rencontrent l'Ellipse qu'en deux points* M, m.

Ayant mené l'ordonnée *MP*, & pris *Cp* égale à *CP*, si l'on mene la perpendiculaire *pm* terminée en *m* par la droite *MCm*; il est évident que les triangles *CPM*, *Cpm* sont semblables & égaux, & qu'ainsi *CM* est égale à *Cm*, & *Pm* à *pm*. Or comme * les ordonnées qui sont également éloignées de part & d'autre du centre *C*, sont égales entr'elles, & que *PM* est une ordonnée, il s'ensuit que *pm* sera aussi une ordonnée; & par consequent que le point *m* est à l'Ellipse.

* Art. 45.

De plus il est visible que si l'on imagine une parallele à l'axe *Bb*, qui se meuve de *C* vers *A*; la partie de cette parallele renfermée dans l'angle *ACM*, ira toûjours en augmentant à mesure que *CP* croît, & qu'au contraire la partie de cette parallele renfermée entre le quart d'Ellipse *AMB* & l'axe *CA*, c'est à dire, l'ordon-

née PM * ira toûjours en diminuant ; d'où il ſuit que la ligne droite CM, qui paſſe par le centre, ne rencontre l'Ellipſe qu'en un point M du même côté de l'axe ; & il en eſt de même pour le point m pris de l'autre côté. Donc &c. * Art. 44.

DÉFINITIONS.

II.

Si l'on mene par un point quelconque M de l'Ellipſe, un diametre MCm, une ordonnée MP à l'un ou l'autre axe Aa, & une ligne droite MT, en ſorte que CT ſoit troiſiéme proportionnelle à CP, CA ; le diametre SCs parallele à MT, eſt appellé *Diametre conjugué* au diametre Mm ; Et réciproquement le diametre Mm eſt dit conjugué au diametre Ss : de ſorte que les deux enſemble ſont appellés *Diametres conjugués*. FIG. 21. 22.

12.

Toutes les lignes droites menées des points de l'Ellipſe parallelement à l'un de ces deux diametres, & terminées par l'autre, ſont appellées *Ordonnées* à cet autre. Ainſi NO parallele au diametre Ss, eſt Ordonnée à ſon conjugué Mm.

13.

La troiſiéme proportionnelle à deux diametres conjugués, eſt appellée *Parametre* du premier de la proportion. Ainſi la troiſiéme proportionnelle à Mm, Ss, eſt appellée *Parametre* du diametre Mm.

COROLLAIRE.

51. Si l'on nomme la donnée CA, t ; & les indéterminées CP, x ; PT, s ; il eſt clair, ſelon la définition 11ᵉ que CT $(x+s)=\frac{tt}{x}$; & qu'ainſi $sx=tt-xx$ $=AP\times Pa$.

PROPOSITION V.

Theorême.

52. Si *l'on mene par les extremités* M, S, *de deux diametres conjugués* Mm, Ss, *deux ordonnées* MP, SK, *à un axe* Aa: *je dis que la partie* CK *de cet axe, prise entre le centre & la rencontre de l'une des ordonnées* SK, *est moyenne proportionnelle entre les deux parties* AP, Pa, *faites par la rencontre de l'autre ordonnée* MP.

Il faut prouver que $\overline{CK}^2 = AP \times Pa$.

Ayant nommé les connuës CA, t; CP, x; PT, s; & l'inconnuë CK, m; on aura $AP \times Pa = tt - xx = {}^{*} sx$, & $AK \times Ka = tt - mm = sx + xx - mm$ en mettant pour tt sa valeur $xx + sx$. Cela posé, la proprieté de l'Ellipse* donnera $AP \times Pa\ (sx).\ AK \times Ka\ (sx + xx - mm) :: \overline{PM}^2.\ \overline{KS}^2 :: \overline{TP}^2\ (ss).\ \overline{CK}^2\ (mm)$. à cause des triangles semblables TPM, CKS. D'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens, & en transposant à l'ordinaire, $\overline{CK}^2\ (mm) = \frac{sxx + ssx}{x + s} = sx = AP \times Pa$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 51.

* Art. 42.

COROLLAIRE.

53. Puisque $\overline{CK}^2 = tt - xx$, il s'ensuit que $\overline{CA}^2 - \overline{CK}^2$ ou $AK \times Ka = xx$. Or * $\overline{CA}^2\ (tt).\ \overline{CB}^2\ (cc) :: AK \times Ka\ (xx).\ \overline{SK}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Et $\overline{CA}^2\ (tt).\ \overline{CB}^2\ (cc) :: AP \times Pa\ (tt - xx).\ \overline{PM}^2 = cc - \frac{ccxx}{tt}$. De plus à cause des triangles rectangles CPM, CKS, on aura le quarré $\overline{CM}^2$ ou $\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = xx + cc - \frac{ccxx}{tt}$, & le quarré $\overline{CS}^2$ ou $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2 = tt - xx + \frac{ccxx}{tt}$. Donc $\overline{CM}^2 + \overline{CS}^2 = tt + cc$. C'est à dire que la somme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss, est égale à la somme des quarrés des deux axes Aa, Bb.

* Art. 42.

PROPOSITION VI.

Theorême.

54. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre* Mm, *est au rectangle de* MO×Om *fait des parties de ce diametre ; comme le quarré de son conjugué* Ss, *est au quarré du même diametre* Mm.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 . MO \times Om :: \overline{Ss}^2 . \overline{Mm}^2$.

Ayant mené les paralleles *NQ*, *OH*, à l'axe *Bb*, & la parallele *OR* à son conjugué *Aa*, qui rencontre au point *R* l'ordonnée *NQ* prolongée, s'il est necessaire ; on nommera les données *CP*, x ; *PM*, y ; *CA*, t ; *PT*, s ; & les indéterminées *HQ* ou *OR*, a ; *CH*, b ; & on aura à cause des triangles semblables *CPM*, *CHO*, & *MPT*, *NRO*, ces deux proportions *CP* (x). *PM* (y) :: *CH* (b). *HO* ou $RQ = \frac{by}{x}$. Et *TP* (s). *PM* (y) :: *OR* (a). $RN = \frac{ay}{s}$. Cela posé.

Puisque (*fig.* 21.) *NQ* est toûjours la difference de *RQ* $(\frac{by}{x})$, *RN* $(\frac{ay}{s})$, & *CQ* la somme de *CH* (b), *HQ* (a), lorsque le point *N* tombe entre les points *M*, *S*, ou *m*, *s* ; & qu'au contraire (*fig.* 22.) *NQ* est toûjours la somme de *RQ*, *RN*, & *CQ* la difference de *CH*, *HQ*, lorsque le point *N* tombe par tout ailleurs : on aura $\overline{NQ}^2 = \frac{bbyy}{xx} \pm \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss}$, & $\overline{CQ}^2 = aa \mp 2ab + bb$; sçavoir $-\frac{2abyy}{sx}$ & $+2ab$ dans le premier cas, & au contraire $+\frac{2abyy}{sx}$ & $-2ab$ dans le second cas. Or* $AP \times Pa\ (tt - xx)$. $AQ \times Qa$ ou $\overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2\ (tt - aa \pm 2ab - bb) :: \overline{PM}^2\ (yy)$. $\overline{QN}^2 = \frac{ttyy - aayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$. En comparant ensemble ces deux valeurs du quarré de *NQ*, on formera l'égalité $\frac{bbyy}{xx} \pm \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss} = \frac{ttyy - aayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$, dans laquelle effaçant d'une part le

* Art. 42.

terme $\pm\frac{2abyy}{sx}$ & de l'autre le terme $\pm\frac{2abyy}{tt-xx}$ qui lui est égale, puisque * $sx=tt-xx$, & divisant par yy, il vient $\frac{bb}{xx}+\frac{aa}{ss}=\frac{tt-aa-bb}{tt-xx}$.

* Art. 51.

Si l'on multiplie par xx, & qu'on transpose bb, on trouvera $\frac{aaxx}{ss}$ ou $\frac{aax^4}{ssxx}=\frac{ttxx-aaxx-bbtt}{tt-xx}$; & multipliant le premier membre par $ssxx$, & le second par le quarré de $tt-xx$ valeur de sx (ce qui se fait en multipliant simplement le numerateur par $tt-xx$) on aura $aax^4=t^4xx-aattxx-bbt^4-ttx^4+aax^4+bbttxx$; d'où en effaçant de part & d'autre aax^4, transposant $aattxx$, & divisant par $ttxx$, l'on tirera $\overline{HQ}^2$ ou $\overline{OR}^2$ (aa) $=tt-xx+bb-\frac{bbtt}{xx}$.

Maintenant si l'on nomme le demi diametre CM ou Cm, z; on aura à cause des triangles semblables CPM, CHO, cette proportion $CP(x).CM(z)::CH(b).CO=\frac{bz}{x}$. Et partant $MO\times Om=zz-\frac{bbzz}{xx}$. Or les triangles semblables ORN, CKS, donnent $\overline{ON}^2.\overline{CS}^2::\overline{OR}^2$ $(tt-xx+bb-\frac{bbtt}{xx}).\overline{CK}^2$ $(tt-xx)::MO\times Om\left(\frac{xxzz-bbzz}{xx}\right).$ $\overline{CM}^2$ (zz). Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Donc $\overline{ON}^2.$ $MO\times Om::\overline{CS}^2.\overline{CM}^2::\overline{Ss}^2.\overline{Mm}^2$. *Ce qu'il falloit, &c.*

* Art. 52.

* Art. 50.

COROLLAIRE GENERAL.

55. Il est visible que ce qu'on a démontré dans la Proposition seconde par rapport aux deux axes Aa, Bb, s'étend par le moyen de cette Proposition à deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss. Or comme les articles 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48 & 49, se tirent de la seconde Proposition, & subsistent également, soit que l'angle ACB soit droit ou qu'il ne le soit pas; il s'ensuit que si l'on suppose dans ces articles, que les lignes Aa, Bb, au lieu d'être les deux axes soient deux diametres

diametres conjugués quelconques, ils seront encore vrais dans cette supposition : car leur démonstration demeurera toûjours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant par tout où se trouve le mot d'*Axe* celui de *Diametre*.

COROLLAIRE II.

56. COMME les articles 44 & 49, subsistent avec la même force, lorsque les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, sont deux diametres conjugués quelconques, tels que *Mm*, *Ss* ; il s'ensuit que la ligne *MT* menée par le point *M* l'une des extremités d'un diametre quelconque *Mm*, parallelement à son diametre conjugués *Ss*, est tangente en *M*, & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher l'Ellipse en ce point. FIG. 23.

D'où l'on voit que d'un point donné sur une Ellipse, on ne peut mener qu'une seule tangente.

COROLLAIRE III.

57. DE-LA il est évident, selon la définition 11[e], que si l'on mene par un point quelconque *M* d'une Ellipse, une ordonnée *MP* à l'un ou l'autre axe *Aa* ; & qu'ayant pris *CT* du côté du point *P*, troisiéme proportionnelle à *CP*, *CA*, on tire la droite *MT* : cette ligne *MT* sera tangente en *M*. Et reciproquement, que si la ligne *MT* est tangente en *M*, & qu'on mene l'ordonnée *MP* à l'un ou l'autre axe *Aa*, les parties *CP*, *CA*, *CT* de cet axe, seront en proportion geométrique continuë.

COROLLAIRE IV.

58. SI l'on imagine dans les définitions 11, 12 & 13, & dans les deux dernieres Propositions, que les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, soient deux diametres conjugués quelconques ; on verra que ces Propositions seront encore vraies, puisqu'elles se démontrent de la même maniere qu'auparavant : comme il est évident par l'inspection de la figure 23, où les triangles

ſemblables donnent les mêmes proportions que dans le cas des axes.

D'où il ſuit 1°. Que le Corollaire précedent doit encore avoir lieu, lorſque la ligne Aa, au lieu d'être un axe, eſt un diametre quelconque. 2°. Que les diametres conjugués Mm, Ss, peuvent être les deux axes dans cette ſuppoſition ; & qu'ainſi on peut regarder les deux axes comme deux diametres conjugués, qui font entr'eux des angles droits.

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 24. 59. *Si par un point quelconque d'une Ellipſe qui a pour centre le point* C, *l'on tire une ordonnée* MP *à l'un des axes* Aa, *& une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT *qui paſſe par le point* M : *je dis que* CP *ſera toûjours à* PG *en raiſon donnée de l'axe* Aa *à ſon parametre.*

Car nommant le demi-axe CA ou Ca, t ; & les indéterminées CP, x ; PM, y ; on aura * $CT = \frac{tt}{x}$; & partant $PT = \frac{tt-xx}{x}$. Or les triangles rectangles ſemblables TPM, MPG, donnent $TP\left(\frac{tt-xx}{x}\right) . PM(y) :: PM(y) . PG = \frac{xyy}{tt-xx}$. D'où l'on tire cette proportion $CP(x) . PG\left(\frac{xyy}{tt-xx}\right) :: AP \times Pa\,(tt-xx) . \overline{PM}^2\,(yy)$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit xyy. Mais le rectangle $AP \times Pa$, eſt * au quarré $\overline{PM}^2$, comme l'axe Aa eſt à ſon parametre. Donc &c.

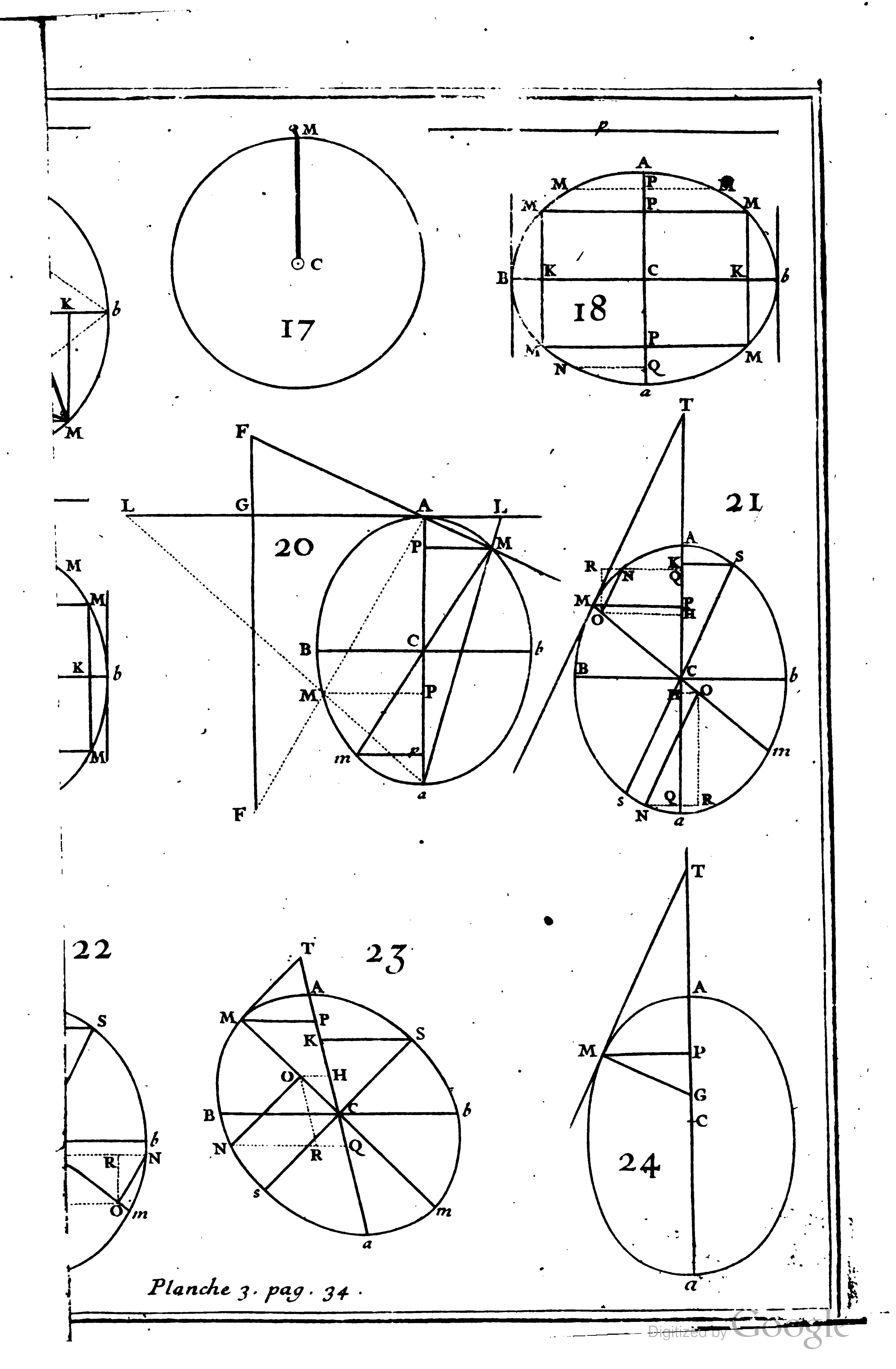
* Art. 57.

* Art. 41.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

FIG. 25. 60. *Si l'on mene par un point quelconque* M *d'une Ellipſe, une tangente* TMS, *& aux deux foyers* F, f, *les droites* MF,


17
18
20
21
22
23
24
Planche 3. pag. 34.

M f ; je dis que les angles F M T, f M S, *faits par ces lignes de part & d'autre avec la tangente* T M S, *sont égaux entr'eux.*

Car ayant mené les perpendiculaires FD, fd, sur cette tangente ; le premier axe Aa qui la rencontre en T, & l'ordonnée MP à cet axe, & nommé les données CA ou Ca, t ; CF ou Cf, m ; & l'indéterminée CP, x ; on aura MF* $(t - \frac{mx}{t})$. Mf $(t + \frac{mx}{t})$ :: TF, ou CT* $(\frac{tt}{x}) - CF$ (m). Tf ou CT $(\frac{tt}{x}) + Cf$ (m). Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Or les triangles semblables TFD, Tfd, donnent $TF.Tf :: FD.fd$. L'hypothenuse MF du triangle rectangle MDF, sera donc à l'hypothenuse Mf du triangle rectangle Mdf, comme le côté DF est au côté df ; & par consequent ces deux triangles seront semblables. Les angles FMD, fMd, ou FMT, fMS, qui sont opposés aux côtés homologues DF, df, seront donc égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 38.
* Art. 57.

COROLLAIRE.

61. De là il est évident que la tangente TMS étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M, laisse l'Ellipse toute entiere du côté de ses deux foyers F, f. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de l'Ellipse que tombe le point M, il s'ensuit qu'elle sera concave dans toute son étenduë autour de ses deux foyers, & par consequent aussi autour de son centre.

PROPOSITION IX.

Theorême.

62. *Si l'on mene par l'une des extremités* A *d'un diametre* A a *une parallele* D A E *à son conjugué* B b, *laquelle rencontre deux autres diametres conjugués quelconques* M m, S s, FIG. 26.

aux points D, E; *je dis que le rectangle de* DA *par* AE, *est égal au quarré de la moitié* CB *du diametre* Bb.

Il faut prouver que $DA \times AE = \overline{CB}^2$.

Ayant mené par les extremités M, S, des diametres conjugués Mm, Ss, les ordonnées MP, SK, au diametre Aa, on nommera les données CA, t; CB, c; & les
** Art. 52.* indéterminées CP, x; PM, y; & on aura * $\overline{CK}^2 = AP \times Pa = tt - xx$; & par consequent $AK \times Ka$ ou $\overline{CA}^2$
** Art. 54.* $- \overline{CK}^2 = xx$. Or * $\overline{BC}^2$ (cc). $\overline{CA}^2$ (tt) :: $\overline{MP}^2$ (yy). $AP \times Pa$ ou $\overline{CK}^2 = \frac{ttyy}{cc}$. Et $\overline{CA}^2$ (tt). $\overline{CB}^2$ (cc) :: $AK \times Ka$ (xx). $\overline{KS}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Donc en extrayant les racines quarrées, l'on tire $CK = \frac{ty}{c}$, & $KS = \frac{cx}{t}$. Mais les triangles semblables CPM, CAD, & CKS, CAE, donnent CP (x). PM (y) :: CA (t). $AD = \frac{ty}{x}$. Et CK $(\frac{ty}{c})$. KS $(\frac{cx}{t})$ :: CA (t). $AE = \frac{ccx}{ty}$. Donc $DA \times AE = cc = \overline{BC}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION X.

Problême.

FIG. 27. 63. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés avec une ligne droite* MCm *qui passe par le centre* C; *marquer sur cette ligne les points* M, m, *où elle rencontre l'Ellipse.*

Ayant mené par l'une des extremités A du diametre Aa, une parallele indefinie AD, à son conjugué Bb, laquelle rencontre la ligne CM donnée de position au point D; on tirera par le point A perpendiculairement sur AD, la ligne AO égale à CB, & par les points O, D, la ligne OD. On décrira du rayon OA un cercle qui coupera la ligne OD en deux points N, n, par où l'on tirera des paralleles NM, nm, à la ligne OC qui joint

les centres de l'Ellipse & du cercle. Je dis que les points M, m, où elles rencontrent la ligne CD, seront à l'Ellipse, & détermineront par consequent les extremités du diametre MCm donné de position.

Car menant les paralleles MP, NQ, à AD, qui rencontrent les lignes CA, OA, aux points P, Q; les triangles semblables CDO, MDN, & CDA, CMP, & ODA, ONQ, donneront $CA.CP :: CD.CM :: OD.ON :: OA.OQ$. c'est à dire, $CA.CP :: OA.OQ$. Et partant si l'on mene la droite PQ, elle sera parallele à OC; & par consequent aussi à MN supposée parallele à OC. Ainsi les paralleles MP, NQ, seront égales entr'elles. Cela posé, si l'on nomme les données CA, t; CB ou AO ou ON, c; & les indeterminées CP, x; PM ou NQ, y; on aura $CA\,(t).\,CP\,(x) :: OA\,(c).\,OQ = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle OQN rectangle en Q, le quarré $\overline{NQ}^2$ ou $\overline{MP}^2\,(yy) = \overline{ON}^2\,(cc) - \overline{OQ}^2\left(\frac{ccxx}{tt}\right)$. La ligne MP sera donc * une ordonnée au diametre Aa; & par consequent le point M appartiendra à l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les droites Aa, Bb. Mais à cause des paralleles NM, OC, nm, la ligne Mm est divisée en deux également par le centre C; puisque par la proprieté du cercle, Nn l'est au point O. Donc le point m appartiendra * aussi à la même Ellipse.

* Art. 41.

* Art. 50.

Si les diametres conjugues Aa, Bb, étoient les deux axes, les paralleles CO, PQ, se confondroient alors avec les lignes CA, AO, qui n'en feroient qu'une seule; ce qui rendroit la construction & la démonstration un peu plus faciles.

PROPOSITION XI.

Problême.

64. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés; en trouver les deux axes* Mm, Ss: *& démontrer qu'il n'y en peut avoir que deux.* FIG. 27.

Ayant mené par l'une des extremités *A* du diametre *Aa*, une parallele *DE* à son conjugué *Bb*, on tirera *AO* perpendiculaire à *DE* & egale à *CB*. Ayant joint *OC*, on menera par son point de milieu *F* la ligne *FG* qui la coupe à angles droits, & qui rencontre au point *G* la ligne *DE*, sur laquelle on prendra de part & d'autre du point *G* les parties *GD*, *GE*, égales chacune à *GO* ou *GC*. Tirant enfin les droites *CD*, *CE*; je dis que les deux axes *Mm*, *Ss*, sont situés sur ces droites.

* *Art.* 58. Car les deux axes pouvant être regardés * comme deux diametres conjugués, qui font entr'eux un angle droit, ils rencontreront la ligne *DE* en des points *D*, *E*, tels que le cercle décrit de ce diametre passera par les deux points *C*, *O*, puisque le rectangle *DA* × *AE* étant égal * au quarré de *AO*, l'angle *DOE* sera droit, aussi bien que l'angle *DCE*. Or il est évident que c'est précisément ce que l'on vient de faire par le moyen de cette construction; puisque les lignes *GO*, *GC*, *GE*, *GD* étant toutes égales entr'elles, sont les rayons d'un même cercle. Mais comme il ne peut y avoir sur la ligne *DE* que deux points *D*, *E*, qui satisfassent en même temps à ces deux conditions; sçavoir, que l'angle *DCE* & l'angle *DOE* soient chacun droit; il s'ensuit que les diametres conjugués *Mm*, *Ss*, qui font entr'eux un angle droit, seront les mêmes que les axes; & qu'il n'y en peut avoir que deux.

* *Art.* 62.

Maintenant pour en déterminer la grandeur, il n'y a qu'à tirer les droites *OD*, *OE*; & par les points *N*, *R*, où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon *OA*, mener les paralleles *NM*, *RS*. Car il est évident * que les points *M*, *S*, où elles rencontrent les droites *CD*, *CE*, appartiendront à l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les lignes *Aa*, *Bb*; & qu'ainsi ils seront les extrémités de ses axes.

* *Art.* 63.

COROLLAIRE.

65. Si l'on proposoit de trouver deux diametres conjugués Mm, Ss, qui fissent entr'eux un angle MCS égal à un angle donné ; deux autres diametres conjugués Aa, Bb, étant donnés. Il est visible que la question se reduiroit à trouver sur la ligne DE donnée de position ; deux points D ; E, tels que menant aux deux points O, C, donnés hors cette ligne, les droites DO, OE, CD, CE, l'angle DOE fût droit, & l'angle DCE égal à l'angle donné. Mais comme la solution de ce Problême est assez difficile ; on l'a renvoyée dans le 10[e] Livre, & on a suivi ici une autre voye, qui est plus simple ; c'est de trouver d'abord les deux axes, & de s'en servir ensuite pour trouver les deux diametres conjugués qu'on demande, comme l'on va enseigner dans la Proposition suivante.

PROPOSITION XII.

Problême.

66. Les *deux axes* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés ; trouver deux diametres conjugués* Mm, Ss, *qui fassent entr'eux l'angle* MCS *égal à un angle donné.* Fig. 28. 29.

Je suppose que les diametres Mm, Ss, soient en effet ceux qu'on demande, & qu'ils rencontrent aux points D, E, la ligne droite indéfinie DE menée par l'extremité A du petit axe Aa parallellement au grand Bb. Et ayant tiré du centre C de l'Ellipse, la ligne CF, qui fasse avec DE au point F l'angle CFE égal à l'angle donné MCS, je nomme les données CA, t ; CB, c ; AF, a ; & l'inconnuë AE, z ; ce qui donne $AD = {}^{*}\frac{cc}{z}$, $CE = \sqrt{tt + zz}$ à cause du triangle rectangle CAE. Cela posé. * Art. 62.

Les triangles FEC, CED, seront semblables ; puisque l'angle au point E est commun, & que l'angle CFE a

été fait égal à l'angle MCS : c'eſt pourquoi FE ($z-a$). EC ($\sqrt{tt+zz}$) :: EC ($\sqrt{tt+zz}$). ED ($z+\frac{cc}{z}$). D'où en multipliant les extrêmes & les moyens, l'on forme l'égalité $zz-az+cc-\frac{acc}{z}=tt+zz$; & effaçant de part & d'autre zz, multipliant enſuite par z, & diviſant par a, il vient $zz-\frac{cc}{a}z+\frac{tt}{a}z+cc=0$, Et en faiſant (pour faciliter le calcul) $\frac{cc-tt}{a}=2b$, on changera l'égalité précedente en celle ci $zz-2bz+cc=0$, ou $zz-2bz+bb=bb-cc$ ce qui donne en extrayant de part & d'autre la racine quarré $z-b$ ou $b-z=\sqrt{bb-cc}$, & par conſéquent l'inconnuë AE (z) $=b\pm\sqrt{bb-cc}$. Voici maintenant la conſtruction que cette derniere égalité fournit.

Ayant prolongé le petit axe Aa juſqu'au point O, en ſorte que AO ſoit égale à la moitié CB du grand ; ſoit tirée CF, qui faſſe avec DE menée par le point A parallelement à Bb, l'angle CFE égal à l'angle donné. Ayant joint OF, ſoient tirées les droites OH, CG, perpendiculaires ſur OF, CF, qui rencontrent DE aux points H, G (on n'a point marqué dans les figures 28, & 29, les points H, G, ſur la ligne DE ; parce que ces figures auroient été trop grandes, & que d'ailleurs il eſt facile de les y imaginer). Soit décrit du centre O, & du rayon OK, égal à la moitié de GH, partie de AD prolongée, compriſe entre G & H, un arc de cercle qui coupe DE aux points K, K, & ayant pris ſur DE les parties KD, KE, égales chacune à KO, ſoient tirées par le centre C de l'Ellipſe, les droites DC, EC. Je dis que les diametres cherchés Mm, Ss, ſont ſitués ſur ces lignes.

Car à cauſe des angles droits FAC, FCG, & FAO, FOH, on aura $AG=\frac{tt}{a}$, $AH=\frac{cc}{a}$; & partant $GH=\frac{cc-tt}{a}=2b$. Le rayon OK qui eſt égal à la moitié de HG, ſera donc égal à b ; & à cauſe du triangle rectangle

gle OAK; on aura $AK = \sqrt{bb - cc}$, & AE ou $KE \mp AK = b \mp \sqrt{bb - cc}$, & AD ou $KD \pm AK = b \pm \sqrt{bb - cc}$. Or cela posé, si l'on multiplie la valeur de AE par celle de AD, il vient $AE \times AD = cc = \overline{CB}^2$; & partant* les diametres Mm, Ss, sont conjugués. Mais le rectangle de $AE + AD$ ou DE $(2b)$ par $AE - AF$ ou EF $(b \mp \sqrt{bb - cc} - a)$ est $= 2bb \mp 2b\sqrt{bb - cc} - 2ab = 2bb \mp 2b\sqrt{bb - cc} + tt - cc$ en mettant pour $2ab$ sa valeur $cc - tt$; & à cause du triangle rectangle CAE le quarré $\overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CA}^2 = 2bb \mp 2b\sqrt{bb - cc} + tt - cc = DE \times EF$: ce qui donne $EF. EC :: EC. ED$. Et partant les triangles FEC, CED, seront semblables ; puisqu'ils ont l'angle au point E commun, & que leurs côtés autour de cet angle sont proportionnels. L'angle MCS sera donc égal à l'angle donné CFE. C'est ce qui restoit à démontrer. * Art. 62.

Maintenant pour avoir la grandeur CM, CS, des deux demi-diametres cherchés ; il n'y a qu'à tirer les lignes OD, OE, & mener par les points N, R, où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon OA, les paralleles NM, RS, à OC. Car il est visible* que les points M, S, où elles rencontrent les droites CD, CE, seront à l'Ellipse, & détermineront par consequent les extremités de ces diametres. * Art. 65.

COROLLAIRE I.

67. Il suit de cette construction, 1°. Qu'afin que le Problême soit possible, il faut que OK $(\frac{cc - tt}{2a})$ surpasse ou soit égale à AO (a) ; car autrement le cercle décrit du rayon OK, ne rencontreroit la ligne DE en aucun point, ce qui est neanmoins necessaire pour la construction.

2°. Que lorsque OK surpasse OA, on trouve toujours par le moyen des deux points K, K, deux differens diametres conjugués Mm, Ss, qui satisfont également : mais qu'alors le diametre Ss de la figure 29 est égal au diametre Mm de la figure 28. & semblablement posé de l'autre côté de l'axe Aa ; parce que AE de la figure

29. est égal à AD de la figure 28. Et de même que le diametre Mm de la figure 29. est égal au diametre Ss de la figure 28. & semblablement posé de l'autre côté de l'axe Aa; parce que AD de la figure 29. est egal à AE de la figure 28. C'est à dire que les deux differens diametres conjugués Mm, Ss, qui satisfont également au Problême, sont semblablement posés de part & d'autre de l'axe Aa, & que dans ces deux differentes positions leurs grandeurs demeurent la même.

FIG. 30. 3°. Que lorsque $OK = OA$, les deux points d'intersection K, K, se réunissent au point touchant A; & qu'ainsi il n'y a alors qu'à prendre les parties AE, AD, égales chacune à la moitié CB du grand axe : d'où l'on voit qu'il ne peut y avoir alors qu'une solution, & que les deux diametres conjugués Mm, Ss, qui satisfont, sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

FIG. 28. 29. & 30. 68. IL est clair aussi que plus AF (a) est grande, plus l'angle obtus donné CFE l'est aussi, & plus au contraire la ligne OK ($\frac{cc-tt}{2a}$) diminuë : de sorte que AF étant la plus grande qu'il est possible, l'angle obtus CFE, sera aussi le plus grand; & au contraire la ligne OK, sera la moindre, c'est à dire égale à AO. Or si l'on mene alors

FIG. 30. les droites Ba, ab; les triangles rectangles aCB, CAD, aCb, CAE, seront tous égaux entr'eux; puisque les lignes AE, AD, sont égales chacune à la moitié CB ou Cb de l'axe Bb, & que CA est égal à Ca. L'angle ACM, sera donc égal à l'angle CaB, & l'angle ACS à l'angle Cab; & partant l'angle donné MCS ou CFE, sera aussi égal à l'angle Bab. D'où l'on voit voit:

FIG 28. 29. & 30. 1°. Que si l'on mene de l'une des extremités a du petit axe Aa aux extremités B, b, du grand, les lignes aB, ab; l'angle obtus donné CFE, doit être égal ou moindre que l'angle Bab, afin que* le Problême soit possible.

* Art. 67.

2°. Que lorsqu'il lui est égal, comme dans la figure 30.

il n'y a que deux diametres conjugués Mm, Ss, qui satisfassent, lesquels sont égaux entr'eux.

3°. Que lorsqu'il est moindre, comme dans les fig. 28 & 29. il y a toûjours deux differens diametres conjugués qui satisfont également ; qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre du petit axe, cet angle demeurant le même entr'eux, & que leur grandeur demeure aussi la même dans ces deux differentes positions.

PROPOSITION XIII.

Problême.

69. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés ; la décrire par un mouvement continu.*

PREMIERE MANIERE.

On cherchera * les deux axes, & on la décrira ensuite selon l'article 36. * *Art.* 64.

SECONDE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extremités A de l'un des diametres donnés Aa, une perpendiculaire AH sur l'autre Bb, on prendra sur cette ligne la partie AQ de part ou d'autre du point A égale à CB. Et ayant tiré la ligne CQ, on fera glisser la ligne GF égale à HQ par ses extremités le long des lignes Bb, CQ (prolongées de part & d'autre du centre C autant qu'il sera necessaire) jusqu'à ce qu'après avoir parcouru successivement les quatre angles faits par ces deux lignes, elle revienne dans la même situation d'où elle étoit partie. Je dis que si l'on prend GM égale à AQ, le point M décrira dans ce mouvement l'Ellipse requise. FIG. 31. & 32.

Car menant GP parallele à QA, qui rencontre en P le diametre Aa, & en O le diametre Bb ; les triangles semblables CHQ, COG, & CAQ, CPG, donneront $CQ.CG::AQ$ ou $GM.GP::HQ$ ou $GF.GO$. Et par consequent la ligne PM sera parallele au diametre Bb. Cela posé.

Si l'on nomme les données CA, t; AQ ou CB ou Cb, c; & les inconnuës CP, x; PM, y; on aura $CA (t) . CP (x) :: AQ (c) . GP = \frac{cx}{t}$. Et le triangle rectangle GPM donnera $\overline{PM}^2 = \overline{GM}^2 - \overline{GP}^2$, c'est à dire en termes analytiques $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$. La ligne PM sera donc * une ordonnée au diametre Aa dans l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les lignes Aa, Bb. Donc &c.

* Art. 41. & 35.

FIG. 33.

Si les deux diametres conjugués Aa, Bb, étoient les deux axes, il est clair que les lignes AQ, CQ, tomberoient sur le diametre Aa qui seroit l'un des axes, & que le point H tomberoit sur le centre C. D'où l'on voit qu'il faudroit prendre alors GF égale à CQ, somme ou difference des deux demi axes CA, CB; & la faire glisser par ses extremités le long des axes Aa, Bb, prolonges s'il est necessaire.

Comme les lignes Aa, Bb, s'entrecoupent à angles droits au point C; il est clair qu'en quelque situation que se trouve la droite GF pendant qu'elle glisse le long de ces lignes, le cercle qui auroit cette ligne pour diametre, passeroit toûjours par le point C; & qu'ainsi la ligne CD qui passe par le point D milieu de FG, sera toûjours égale à DF, puisque les lignes CD, DF, DG, seront toûjours des raïons de ce cercle. Delà naît la description suivante.

Soient deux lignes droites CD, DF, égales chacune à la moitié de CQ, somme ou difference des deux demi-axes CB, CA; attachées l'une à l'autre par leur extremité commune D, en sorte qu'elles se puissent mouvoir autour de ce point, comme les jambes d'un compas autour de sa tête. Soit attachée l'extremité C de la droite CD dans le centre de l'Ellipse; & soit entenduë l'extremité F de l'autre droite FD, se mouvoir le long de l'axe Bb, en entraînant avec elle la ligne DC mobile autour du point fixe C. Il est clair que si l'on prend sur FD (prolongée, s'il est necessaire) la partie FM égale à CA, le

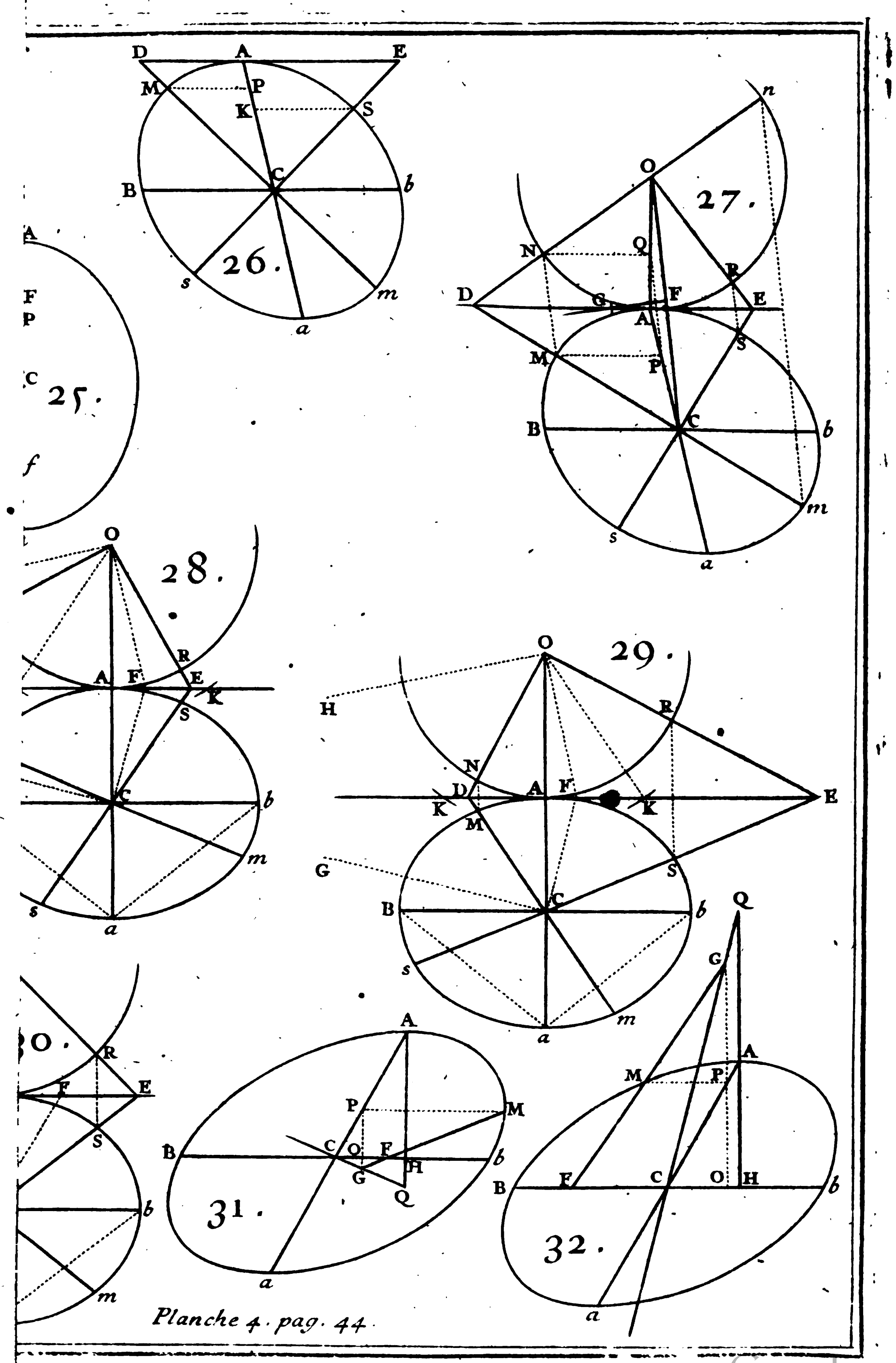


Planche 4. pag. 44.

point *M* décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on cherche.

PROPOSITION XIV.

Problême.

70. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés ; la décrire par plusieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extremités *A* de l'un des diametres donnés *Aa*, une parallele indéfinie *DAD* à son conjugué *Bb*, on tirera *AO* perpendiculaire à *AD*, & égale à la moitié *CB* du diametre *Bb* ; on joindra *OC* ; & on décrira un cercle du centre *O*, & du rayon *OA*. Cela fait on menera librement de part & d'autre de *CA*, autant de lignes *CD*, *CD*, &c. qu'on voudra ; & ayant tiré des points *D*, *D*, &c. où elles rencontrent la ligne *DAD*, au centre *O*, les lignes *DO*, *DO*, &c. qui coupent la circonference du cercle aux points *N*, *N*, &c. on menera des droites *NM*, *NM*, &c. paralleles à *OC*, lesquelles rencontrent aux points *M*, *M*, &c. les droites correspondantes *CD*, *CD*, &c. sur lesquelles on marquera de l'autre côté du centre *C* des points *m*, *m*, &c. qui en soient également éloignés. Il est évident * que la ligne courbe qui passera par tous les points *M*, *M*, &c ; *m*, *m*, &c. ainsi trouvés, aura pour diametres conjugués les droites *Aa*, *Bb*. FIG. 34.

* *Art.* 63.

SECONDE MANIERE.

Ayant pris sur l'un des demi-diametres *CB*, de petites parties *CE*, *EE*, &c. égales entr'elles, de telle grandeur qu'on voudra, & autant que ce demi-diametre en pourra contenir ; on lui menera les perpendiculaires *ED*, *ED*, &c, qui rencontrent la circonference circulaire décrite du centre *C* & du raïon *CB*, aux points *D*, *D*, &c. Ayant joint *AB*, on tirera par celui des points *E*, qui est le plus proche du centre *C*, la ligne *EP* parallele à *AB*, FIG. 35.

qui rencontre CA au point P. On prendra ſur le diametre Aa de part & d'autre du centre C, autant de parties PP, PP, &c. égales à CP, qu'il en pourra contenir ; & on menera par tous les points P, P, &c. des paralleles MPM, MPM, &c. au diametre Bb, ſur chacune deſquelles on prendra de part & d'autre du point P, des parties PM, PM, égales chacune à ſa correſpondante ED. Je dis que la ligne courbe qui paſſe par tous ces points M, ſera l'Ellipſe qu'on demande.

Car nommant les données CA, t ; CB ou CD, c ; & les indéterminées CP, x ; PM, y ; on aura à cauſe des triangles ſemblables CAB, CPE, cette proportion CA (t). CB (c) :: CP (x). $CE = \frac{cx}{t}$. Et à cauſe du triangle CED rectangle en E, le quarré $\overline{ED}^2$ ou $\overline{PM}^2$ $(yy) = \overline{CD}^2$ $(cc) - \overline{CE}^2$ $\left(\frac{ccxx}{tt}\right)$. La ligne PM ſera donc* une ordonnée au diametre Aa. Et comme cette démonſtration convient à toutes les lignes PM ; puiſque chaque CP eſt toûjours à ſa correſpondante CE, en raiſon de CA à CB : il s'enſuit que la Courbe qui paſſe par tous les points M trouvés comme cy-deſſus, ſera l'Ellipſe qu'on demande.

* Art. 41. & 55.



LIVRE TROISIEME.

De l'Hyperbole.

DEFINITIONS.

I.

AYANT attaché sur un plan en un point *f* l'une des extremités d'une longue regle *fMO*, en sorte qu'elle puisse tourner librement autour de ce point fixe *f*, comme centre; on attachera à son autre extremité *O*, le bout d'un fil *OMF*, dont la longueur doit être moindre que celle de la regle, & duquel l'autre bout sera attaché en un autre point *F*, pris aussi sur ce plan. Maintenant, si l'on fait tourner la regle *fMO* autour du point fixe *f*, & qu'en même temps l'on se serve d'un stile *M* pour tenir le fil *OMF*, toûjours également tendu, & sa partie *MO* toute jointe & comme collée contre le bord de la regle : la ligne courbe *AX* décrite dans ce mouvement, est une portion d'*Hyperbole*. FIG. 36.

Si l'on renverse la regle de l'autre côté du point *F*, on décrira de la même sorte l'autre portion *AZ* de la même Hyperbole.

Mais, si sans changer la longueur de la regle, ni celle du fil, on attache l'extremité de la regle en *F*, & celle du fil en *f*, on décrira en la même sorte une autre ligne courbe *xaz* opposée à la premiere *XAZ*; qui est encore appellée *Hyperbole*, & les deux ensemble sont nommées *Hyperboles opposées*.

2.

Les deux points fixes *F*, *f*, sont nommés les *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui passe par les deux foyers *F*, *f*, & qui est terminée de part & d'autre par les Hyperboles opposées, est appellée le *premier Axe*.

4.

Le point *C*, qui divise par le milieu le premier axe *Aa*, est nommé le *Centre*.

5.

Si l'on mene par le centre C une perpendiculaire indéfinie Bb au premier axe Aa; & que du point A, comme centre, & de l'intervalle CF, on décrive un arc de cercle qui la coupe aux points B, b: la partie Bb de cette perpendiculaire, est appellée le *second Axe*.

6.

Les deux axes Aa, Bb, sont appellés ensemble *Conjugués*; de sorte que le premier axe Aa, est dit *Conjugué* au second Bb; & reciproquement le second Bb, *Conjugué* au premier Aa.

7.

Les lignes MP, MK, menées des points M des Hyperboles opposées parallelement à l'un des axes conjugués, & terminées par l'autre, sont appellées *Ordonnées* à cet autre axe. Ainsi MP est *Ordonnée* au premier axe Aa, & MK au second Bb.

8.

La troisiéme proportionnelle aux deux axes, est appellée *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion. Ainsi si l'on fait comme le premier axe Aa, est au second axe Bb, de même le second axe Bb, à une troisiéme proportionnelle p; cette ligne p sera le Parametre du premier axe Aa.

9.

Toutes les lignes qui passent par le centre C, sont appellées *Diametres*: ceux qui rencontrent les Hyperboles opposées, *premiers Diametres*, & ceux qui ne les rencontrent point, quoique prolongés à l'infini, *seconds Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre une Hyperbole qu'en un seul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

REMARQUE.

71. On a dit dans la premiere définition que la longueur du fil FMO doit être moindre ou plus grande que celle de la regle fMO ; dont la raison est que s'il étoit égal à cette regle, le stile M décriroit dans ce mouvement, une ligne dont tous les points M seroient également distants des deux points F, f ; puisque retranchant du fil & de la regle, la partie commune MO, les restes MF, Mf, seroient toûjours égaux entr'eux. D'où il est visible que cette ligne ne seroit autre qu'une ligne droite indefinie Bb, menée perpendiculairement à la droite Ff par son point de milieu C. FIG. 37.

COROLLAIRE I.

72. Il suit de la définition premiere, que si l'on mene d'un point quelconque M, de l'une des Hyperboles opposées, aux deux foyers F, f, les droites MF, Mf ; leur difference sera toûjours la même. Car elle sera toûjours égale à la difference qui se trouve entre la longueur de la regle & celle du fil. FIG. 36.

COROLLAIRE II.

73. Lorsque le point M tombe en A, il est visible que MF devient AF, & que Mf devient Af ; & de même lorsque le point M tombe en a, en décrivant l'Hyperbole opposée xaz ; il est encore visible que MF devient aF ; & que Mf devient af. Donc puisque la difference de ces deux droites est par tout la même, on aura $Af - AF$ ou $Ff - 2AF = aF - af$ ou $Ff - 2af$; & partant $AF = af$. D'où il suit :

1°. Que la distance Ff des foyers, est divisée en deux parties égales par le centre C ; puisque $CA + AF$ ou $CF = Ca + af$ ou Cf.

2°. Que la difference des deux droites MF, Mf, est toûjours égale au premier axe Aa ; puisque dans l'Hyperbole XAZ, on a toûjours $Mf - MF = Af - AF$ ou

$Af - af$; & que dans son opposée xaz, on a aussi toûjours $MF - Mf = aF - af$ ou $aF - AF$.

COROLLAIRE III.

74. Il suit de la definition cinquiéme.

1°. Que le second axe Bb, est divisé en deux parties égales par le centre C; car les triangles rectangles ACB, ACb, seront égaux, puisqu'ils ont des hypothenuses égales AB, Ab, & le côté AC commun.

2°. Que si l'on prend sur le second axe Bb, la partie CE egale à la moitié CA du premier, & qu'on tire l'hypothenuse AE: le second axe Bb sera plus grand, égal, ou moindre que le premier Aa; selon que la droite CF, est plus grande, egale, ou moindre que l'hypothenuse AE; parce que l'hypothenuse Ab, prise égale à CF, se trouvera aussi pour lors plus grande, égale, ou moindre que l'hypothenuse AE.

3°. Que si l'on prend sur le premier axe Aa de part & d'autre du centre C, les parties CF, Cf, égales chacune à l'hypothenuse AB du triangle rectangle CAB, formé par les deux demi-axes CA, CB: les points F, f, seront les deux foyers.

COROLLAIRE IV.

75. Les mêmes choses étant posées, si l'on nomme CF ou AB, m; CA, ou Ca, t; le triangle rectangle ACB, donnera $\overline{BC}^2 = mm - tt$. Or $AF = m - t$, & $Fa = m + t$; & partant $AF \times Fa = mm - tt$. D'où il est évident que le quarré de la moitie CB du second axe Bb, est égal au rectangle de AF par Fa parties du premier axe Aa, prises entre l'un des foyers F, & ses deux extremités, A, a.

COROLLAIRE V.

76. Il sera maintenant facile de décrire les Hyperboles opposées dont les deux axes Aa, Bb, sont donnés, & dont l'on sçait que l'axe Aa doit être le premier. Car

ayant trouvé * sur le premier axe Aa, les foyers F, f, on attachera dans le point F, le bout d'un fil FMO, duquel l'autre bout O, sera lié à l'extremité d'une longue regle OMf, mobile sur son autre extremité f autour du foyer f, & dont la longueur OMf doit * être moindre ou plus grande que la longueur du fil OMF, de la ligne Aa. Ayant ensuite décrit par le moyen de cette regle & de ce fil, deux Hyperboles opposées XAZ, xaz, comme l'on a enseigné dans la définition premiere, il est évident qu'elles auront pour premier axe, la ligne Aa, & pour second, la ligne Bb. Et c'est ce qu'on demandoit.

* Art. 74.

* Art. 71.

Plus la regle OMf, sera longue, & plus les portions des Hyperboles opposées, qu'on décrira par le moyen de cette regle, seront grandes ; de sorte qu'on les peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également la longueur de la regle & celle du fil.

PROPOSITION I.

Theorême.

77. *Si l'on mene l'ordonnée* MP *au premier axe* Aa, *& qu'on prenne sur cet axe prolongé la partie* AD *égale à* MF, *du côté du foyer* F *lorsque le point* M *tombe sur l'Hyperbole* XAZ, *& du côté du foyer* f *lorsqu'il tombe sur son opposée* xaz ; *je dis que* CA. CF :: CP. CD.

Ayant nommé comme auparavant les données CA ou Ca, t ; CF ou Cf, m ; & de plus les indéterminées CP, x ; PM, y ; & l'inconnuë CD, z ; on aura dans le premier cas, AD ou $MF = z - t$, aD ou $Mf = z + t$, $FP = x - m$ ou $m - x$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer F), $Pf = x + m$: & dans le second cas, AD ou $MF = z + t$, aD ou $Mf = z - t$, $FP = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ selon que le point P tombe au dessus ou dessous du foyer f.

Cela posé, le triangle rectangle MPF donnera $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$; sçavoir, dans le premier

cas, $+$ dans le second ; & l'autre triangle rectangle MPf donnera $zz \pm 2tz + tt = yy + xx \pm 2mx + mm$; sçavoir, $+$ dans le premier, & $-$ dans le second.

Maintenant, si l'on retranche par ordre dans le premier cas, chaque membre de la premiere équation de ceux de la seconde ; & au contraire dans le second cas, chaque membre de la seconde de ceux de la premiere, il vient $4tz = 4mx$; d'où l'on tire $CD\,(z) = \frac{mx}{t}$. Donc $CA\,(t).\,CF\,(m) :: CP\,(x).\,CD\,(z)$. *Ce qu'il falloit, &c.*

COROLLAIRE.

78. Il est évident que si l'on nomme les données CA ou Ca, t ; CF ou Cf, m ; & l'indéterminée CP, x ; on aura toûjours $MF = \frac{mx}{t} - t$, & $Mf = \frac{mx}{t} + t$, lorsque le point M tombe sur l'Hyperbole XAZ, qui a pour foyer le point F : & qu'au contraire on aura $MF = \frac{mx}{t} + t$, & $Mf = \frac{mx}{t} - t$, lorsque le point M tombe sur son opposée xaz, qui a pour foyer le point f.

PROPOSITION II.

Theorême.

79. Le *quarré d'une ordonnée quelconque* PM, *au premier axe* Aa, *est au rectangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe prolongé, comme le quarré de son conjugué* Bb, *est au quarré du premier axe* Aa.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 . AP \times Pa :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$.

Les mêmes choses étant posées que dans la Proposition précédente, si l'on met dans l'équation $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle rectangle MPF, à la place de z, sa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toûjours celle-cy $ttyy = mmxx - mmtt - ttxx + t^4$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}^2\,(yy).\ AP \times Pa\,(xx - tt) ::$

* Art. 77.

$\overline{BC}^2 * (mm - tt) . \overline{CA}^2 (tt) :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 75.

COROLLAIRE I.

80. Si l'on mene une ordonnée MK au second axe Bb, lequel j'appelle $2c$; il est clair que $MK = CP$ (x). & que $CK = PM$ (y). Or $\overline{PM}^2$ (yy). $AP \times Pa$ $(xx - tt)$ :: $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$. $\overline{Aa}^2$ $(4tt)$. Et partant $4ccxx = 4cctt + 4ttyy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}^2$ (xx). $\overline{CK}^2 + \overline{CB}^2$ $(yy + cc)$ :: $\overline{Aa}^2$ $(4tt)$. $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$.

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK au second axe Bb, est au quarré de CK, joint au quarré de CB moitié du second axe Bb, comme le quarré de son conjugué Aa, est au quarré de ce second axe Bb.

COROLLAIRE II. FONDAMENTAL.

81. Si l'on nomme le premier ou second axe Aa, $2t$; son conjugué Bb, $2c$; son parametre p; chacune de ses ordonnées PM, y; & chacune de ses parties CP, prises entre le centre & les rencontres des ordonnées, x; on aura toûjours * $\overline{PM}^2$ (yy). $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$ $(xx \mp tt)$ :: $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$. $\overline{Aa}^2$ $(4tt)$ :: p. Aa $(2t)$. puisque selon la définition du parametre Aa $(2t)$. Bb $(2c)$ :: Bb $(2c)$. $p = \frac{4cc}{2t}$. où l'on doit observer que c'est le signe — lorsque l'axe Aa est le premier, & qu'ainsi on peut substituer alors à la place de $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$, le rectangle $AP \times Pa$ qui lui est égal; & au contraire que c'est le signe + lorsque l'axe Aa est le second. D'où en multipliant d'abord les Extrêmes & les Moyens de la premiere proportion yy. $xx \mp tt$ :: $4cc$. $4tt$. ensuite de l'autre yy. $xx \mp tt$ :: p. $2t$. l'on tire $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, & $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2}pt$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en

FIG. 38. & 39.

* Art. 79. & 80.

détermine la position par rapport aux axes ; il s'ensuit que l'équation $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, ou $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2}pt$, en exprime parfaitement la nature par rapport à ses axes.

COROLLAIRE III.

82. Si l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ à l'axe Aa, il est clair que $\overline{MP}^2 . \overline{NQ}^2 :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 . \overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Car $\overline{PM}^2 . \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2 :: \overline{QN}^2 . \overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Donc &c.

Il est bon de remarquer encore qu'on peut substituer à la place de $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$, & $\overline{CQ}^2 - \overline{CA}^2$, les rectangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$ qui leur sont égaux ; ce qu'il faut toûjours observer dans la suite.

COROLLAIRE IV.

83. Si l'on mene par un point quelconque P de l'un ou de l'autre axe Aa (prolongé lorsque c'est le premier) une parallele MPM à son conjugué Bb ; elle rencontrera une Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux point M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M, M, soient à une Hyperbole ou aux Hyperboles opposées, il faut * que les quarrés de PM (y) prises de part & d'autre de l'axe Aa, soient égaux chacun à la même quantité $\frac{ccxx}{tt} \mp cc$.

* Art. 81.

COROLLAIRE V.

Fig. 38. & 39.

84. Il suit de ce que $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, que plus CP (x) prise de part ou d'autre du centre C, devient grande plus aussi chaque ordonnée PM (y) prise de part & d'autre de l'axe Aa, augmente, & cela à l'infini ; & qu'au contraire plus CP (x) devient petite, plus aussi PM (y) diminuë ; de sorte que (*fig.* 38.) CP (x) étant égale à CA ou Ca (t) lorsque l'axe Aa, est le premier,

PM (y) devient alors nulle ou zero ; & que (*fig.* 39.) *CP* (x) étant nulle ou zero, lorſque l'axe *Aa* eſt le ſecond, chaque *PM* (y) qui devient alors *CB* ou *Cb* (c), eſt la moindre de toutes les ordonnées *PM* (y) priſes de part & d'autre du centre. D'où il eſt clair :

1°. Que ſi l'on mene (*fig.* 39.) par les extremités *B*, *b*, du premier axe *Bb*, des paralleles au ſecond axe *Aa* ; elles ſeront tangentes en ces points.

2°. Que les Hyperboles oppoſées s'éloignent de part & d'autre de plus en plus à l'infini de leurs axes conjugués, en commençant par les extremités du premier : avec cette difference neanmoins que le premier axe rencontre chacune des Hyperboles oppoſées en un point, & qu'étant prolongé il paſſe au dedans ; au lieu que le ſecond tombe tout entier entre les Hyperboles oppoſées, & ne les rencontre jamais, quoique prolongé à l'infini.

COROLLAIRE VI.

85. Il ſuit encore de ce que $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, que ſi l'on prend les points *P*, *P*, également éloignés de part & d'autre du centre *C*, les ordonnées *PM*, *PM*, ſeront égales. D'où il eſt clair que ſi une ligne droite *MM*, terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, eſt coupée en deux également par un axe *Bb* en un point *K* autre que le centre, elle ſera parallele à ſon conjugué *Aa*. Car menant des paralleles *MP*, *MP*, à l'axe *Bb*, la ligne *PP*, ſera coupée par le milieu en *C*, puiſque *MM* l'eſt en *K* ; & partant les ordonnées *PM*, *PM*, ſeront égales. La droite *MM* ſera donc parallele à l'axe *Aa*.

COROLLAIRE VII.

86. Si l'on conçoit que le plan ſur lequel les Hyperboles oppoſées ſont tracées, ſoit plié le long de l'axe *Aa*, en ſorte que ſes deux parties ſe joignent ; il eſt clair (*fig.* 39.) lorſque l'axe *Aa* eſt le ſecond, que les deux

Hyperboles opposées tomberont exactement l'une sur l'autre ; sçavoir, les points *B*, *M*, &c. sur les points *b*, *M*, &c. puisque * toutes les perpendiculaires *Bb*, *MM* à cet axe, sont coupées par le milieu aux points *C*, *P*, &c.

* Art. 83.

Par la même raison (*fig.* 38) lorsque l'axe *Aa* est le premier, les portions des Hyperboles opposées qui sont de part & d'autre de cet axe, tomberont exactement l'une sur l'autre.

AVERTISSEMENT.

On a suivi jusqu'ici la même methode que dans l'Ellipse, & on auroit pû la continuer jusqu'à la fin ; mais, comme il faut nécessairement parler de certaines lignes particulieres à l'Hyperbole, & qu'on peut par leur moïen prouver les mêmes choses d'une maniere plus aisée, on a pris ce dernier parti.

DÉFINITIONS.

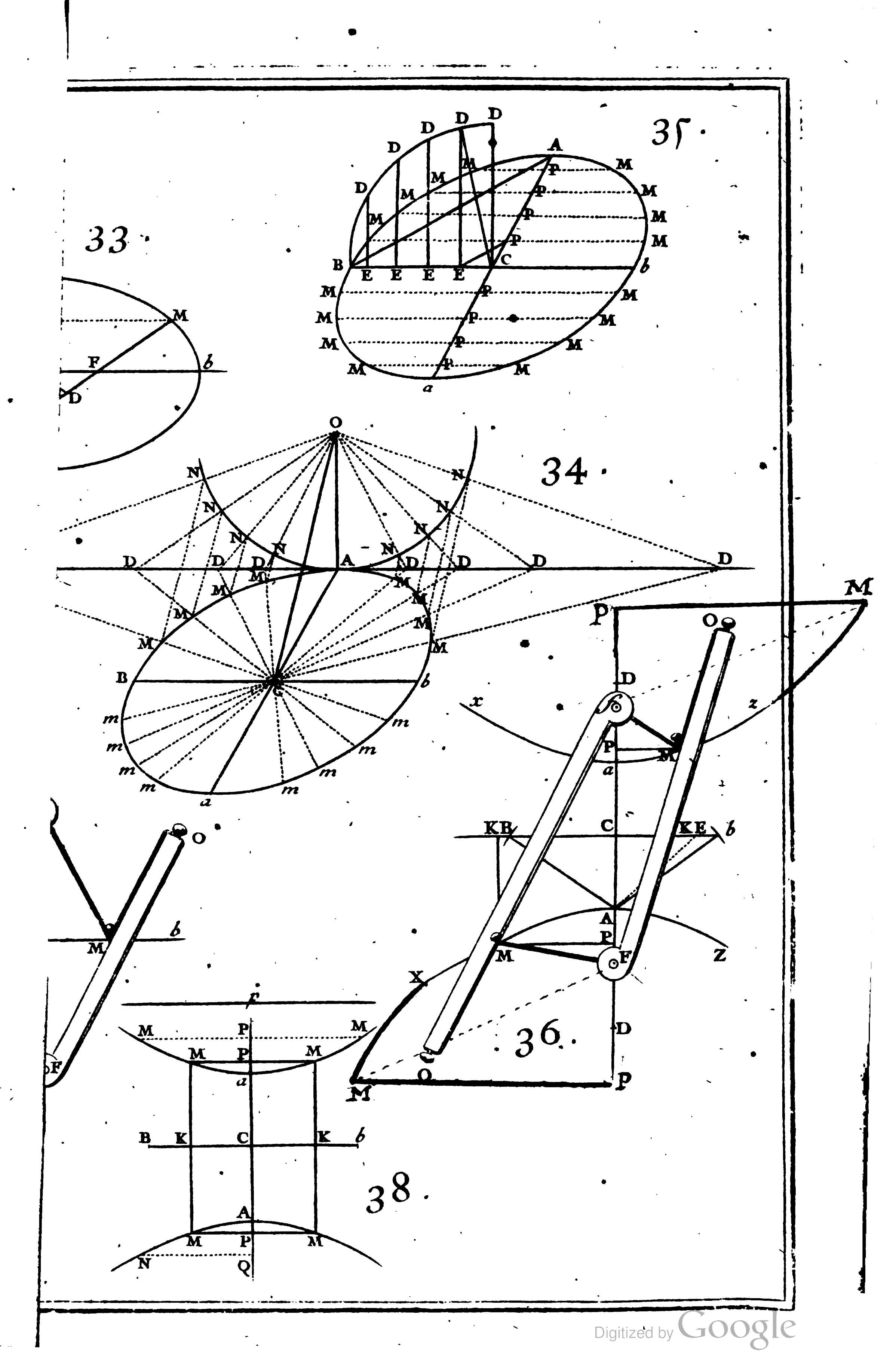
11.

Fig. 40. Si l'on mene du centre *C* deux droites indéfinies *CG*, *Cg*, paralleles aux lignes *Ab*, *AB*, menées de l'extremité *A* du premier axe *Aa*, aux deux extremités *B*, *b*, du second ; ces deux droites seront appellées les *Asymptotes* de l'Hyperbole *MAM* ; & si on les prolonge indéfiniment de l'autre côté du centre, elles seront nommées les *Asymptotes* de l'Hyperbole opposée *MaM*.

12.

Le quarré de la partie *CG*, ou *Cg*, d'une asymptote, comprise entre le centre *C*, & la rencontre de la ligne *AB*, ou *Ab*, menée de l'extremité *A* du premier axe, à l'extremité *B*, ou *b*, du second, est appellé la *Puissance* de l'Hyperbole *MAM*, ou de son opposée *MaM*.

COROLLAIRE I.


35 .
33 .
34 .
36 .
38 .

COROLLAIRE I.

87. Il eſt évident que l'angle GCg, fait par les aſymptotes d'une Hyperbole, ou ſon égal BAb, eſt moindre, égal, ou plus grand qu'un droit, ſelon que le ſecond axe Bb eſt moindre, égal, ou plus grand que le premier Aa. Car lorſque le premier axe Aa ſurpaſſe le ſecond Bb, ſa moitié CA, ſurpaſſe la moitié CB du ſecond; & par conſéquent dans le triangle rectangle CAB, l'angle CAB eſt moindre qu'un demi droit. Les deux angles égaux CAB, CAb, qui font enſemble l'angle BAb, ſeront donc moindres qu'un droit. Les deux autres cas ſe démontrent de la même maniére.

COROLLAIRE II.

88. A cause des triangles ſemblables BAb, BGC, il eſt clair que la ligne AB eſt diviſée par l'aſymptote CG en deux parties égales au point G, & que CG eſt la moitié de AB; puiſque BC eſt la moitié de Bb. On prouvera de même que Ab eſt diviſée par l'aſymptote Cg en deux parties égales au point g, & que Cg eſt la moitié de Ab. Donc toutes les lignes CG, GA, GB, Cg, gA, gb, ſont égales entr'elles; puiſqu'elles ſont égales chacune à la moitié de l'une ou l'autre des lignes AB, Ab, que l'on ſçait être égales entr'elles, ſuivant la définition 5e.

COROLLAIRE III.

89. La puiſſance d'une Hyperbole eſt égale à la quatriéme partie de la ſomme des quarrés des deux demi-axes. Car nommant CA, t; CB, c; CG, m; on aura * $BA = 2m$, & à cauſe du triangle rectangle ACB, le quarré $\overline{AB}^2$ $(4mm) = tt + cc$. Et par conſéquent $\overline{CG}^2$ $(mm) = \frac{tt+cc}{4}$. * Art. 88.

PROPOSITION III.

Theorême.

FIG. 40. 90. *Si l'on mene par un point quelconque* M *de l'une ou de l'autre des Hyperboles opposées, une ligne droite* Rr *perpendiculaire au premier axe* Aa *qu'elle rencontre en* P, *& terminée par les asymptotes en* R *&* r; *je dis que le rectangle de* RM *par* Mr, *est égal au quarré de* BC, *moitié du second axe* Bb.

Il faut prouver que $RM \times Mr = \overline{BC}^2$.

Nommant les connuës CA, t; CB, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; les triangles semblables ACB, CPr, & ACb, CPR, donnent $CA(t) . CB$ ou $Cb(c) :: CP(x) . Pr$, ou $PR = \frac{cx}{t}$. Donc RM, ou $PR \pm PM = \frac{cx}{t} \pm y$; & Mr, ou $Pr \mp PM = \frac{cx}{t} \mp y$. Et par conséquent $RM \times Mr = \frac{ccxx}{tt} - yy = \overline{BC}^2 (cc)$ en mettant

* Art. 81. pour yy sa valeur * $\frac{ccxx}{tt} - cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

91. Il est clair que $\overline{PM}^2 \left(\frac{ccxx}{tt} - cc\right)$ est toûjours moindre que $\overline{PR}^2$ ou $\overline{Pr}^2 \left(\frac{ccxx}{tt}\right)$; Et par conséquent que tous les points des Hyperboles opposées tombent dans les angles faits par leurs asymptotes; de sorte qu'il n'en peut tomber aucun dans les angles d'à côté.

COROLLAIRE II.

92. Si l'on mene par deux points quelconques M, N, d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux lignes droites Rr, Kk, perpendiculaires au premier axe, & terminées par les asymptotes : il est évident que les rectangles $RM \times Mr$, $KN \times Nk$, seront toûjours égaux entr'eux; puisqu'ils sont égaux chacun au quarré de la

moitié BC du second axe Bb. D'où l'on voit que $RM. KN :: Nk. Mr$.

PROPOSITION IV.

Theorême.

93. *Si l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux droites* Hh, Ll, *paralleles entr'elles, & terminées par les asymptotes ; je dis que les rectangles* HM × Mh, LN × Nl *seront égaux entr'eux.*

Il faut prouver que HM × Mh = LN × Nl.

Ayant mené les droites Rr, Kk, perpendiculaires au premier axe Aa, il est clair que les triangles MRH, NKL, & Mrh, Nkl, sont semblables ; puisqu'ils sont formés par des paralleles. On aura donc $RM. KN :: HM. LN$. Et $Nk. Mr :: Nl. Mh$. Or * $RM. KN :: Nk. Mr$. Donc $HM. LN :: Nl. Mh$. Et par conséquent $HM \times Mh = LN \times Nl$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 92.

COROLLAIRE I.

94. Si l'on suppose que la ligne NL parallele à MH, passe par le centre C, c'est à dire, qu'elle devienne CE : il est clair que les deux points L, l, se réüniront au centre C ; & partant que le rectangle $LN \times Nl$, deviendra le quarré $\overline{EC}^2$. D'où l'on voit que si l'on mene d'un point quelconque E, de l'une des Hyperboles opposées au centre C, la droite CE, & par un autre point quelconque M de l'une ou de l'autre de ces Hyperboles, une ligne MHb, parallele à CE, & qui rencontre les asymptotes en H & b ; le quarré de CE sera égal au rectangle de HM par Mh.

COROLLAIRE II.

95. Si l'on mene par un point quelconque N, de l'une des Hyperboles opposées, une ligne droite Ll, terminée par les asymptotes, & qui rencontre l'une ou

l'autre de ces Hyperboles en un autre point n; les parties LN, ln, de cette droite prises entre les points des Hyperboles & la rencontre des asymptotes, seront égales entr'elles. Car nommant LN, a; Nn, b; nl, c; on aura $LN \times Nl$ $(ab \mp ac) = HM \times Mh = Ln \times nl$. $(bc \mp ac)$, d'où l'on tire LN $(a) = ln$ (c).

COROLLAIRE III.

96. Si l'on suppose dans le Corollaire précedent que la ligne Nn, terminée par les Hyperboles opposees, passe par le centre C, c'est à dire, qu'elle devienne le premier diametre ED: il est évident que les deux points L, l. se reüniront au centre C; & qu'ainsi NL deviendra EC, & nl, CD. D'où l'on voit que tout premier diametre DE, est divisé en deux egalement par le centre C.

COROLLAIRE IV.

97. Si deux lignes droites Mm, Nn, paralleles entr'elles, sont terminees par une Hyperbole ou par les Hyperboles opposées, & rencontrent une asymptote aux points H, L; je dis que les rectangles $MH \times Hm$, $NL \times Ln$, seront égaux entr'eux. Car prolongeant, s'il est necessaire, ces deux lignes, jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre asymptote aux points h, l; les parties MH, mh, & NL, nl, seront egales * entr'elles : & partant, puisque $HM \times Mh = LN \times Nl$, il s'ensuit que $MH \times Hm = NL \times Ln$.

* Art. 95.

PROPOSITION V.

Theorême.

FIG. 41.

98. *Si l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées deux droites* MH, NL, *paralleles entr'elles & terminées par une asymptote; & deux autres droites* Mh, Nl, *aussi paralleles entr'elles, & terminées par l'autre asymptote; je dis que les*

rectangles HM × Mh, NL × Nl, *sont égaux entr'eux.*

Cette Proposition se prouve de la même maniere que la précedente, & il n'y a rien à changer dans la démonstration.

COROLLAIRE I.

99. Si les droites MH, Mh, & NL, Nl, sont paralleles aux deux asymptotes; il est clair que les parallelogrammes $MHCh$, $NLCl$, aussi bien que les triangles CHM, CLN, qui en sont les moitiés, sont égaux entr'eux; puisque les côtés de ces parallelogrammes autour des angles égaux HMh, LNl, sont réciproquement proportionnels. FIG. 42.

COROLLAIRE II.

100. Les mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précedent, il est visible que $CH \times HM = CL \times LN$; puisque dans cette supposition $Mh = CH$, & $Nl = CL$: c'est à dire, que si l'on mene par deux points quelconques M, N, de l'une, ou des Hyperboles opposées, deux droites MH, NL, paralleles à l'une des asymptotes, & terminées par l'autre; les rectangles $CH \times HM$, $CL \times NL$, seront toûjours égaux entr'eux; & qu'ainsi $CH . CL :: LN . MH$.

COROLLAIRE III.

101. Puisque l'extremité A du premier axe, est un des points de l'Hyperbole, & que la ligne AB, qui coupe en G, l'asymptote CG, est parallele à l'autre asymptote Cg; il s'ensuit * que le rectangle $CH \times HM$ sera toûjours égal au même rectangle $CG \times GA$, ou * au quarre $\overline{CG}^2$, c'est à dire, selon la définition 12e, à la puissance de l'Hyperbole. Si donc l'on nomme la donnée CG, m; & les indéterminées CH, x; HM, y; on aura toûjours $CH \times HM$ $(xy) = \overline{CG}^2$ (mm). Or comme cette proprieté convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en détermine la position par

* Art. 100.
* Art. 88.

rapport à ses asymptotes ; il s'ensuit que l'équation $xy = mm$ en exprime parfaitement la nature par rapport à ses asymptotes.

COROLLAIRE IV.

102. Il suit de ce que MH (y) $= \frac{mm}{x}$, que plus CH (x) augmente, plus au contraire HM (y) diminuë ; de sorte que CH (x) étant infiniment grande, HM (y) sera alors infiniment petite, c'est à dire, nulle ou zero. D'où l'on voit que l'Hyperbole AM, & son asymptote CH (étant prolongées) s'approchent de plus en plus, de sorte qu'enfin leur distance devient moindre qu'aucune donnée ; & que cependant elles ne se peuvent jamais rencontrer, puisqu'elles ne se joignent que dans l'infini où l'on ne peut jamais arriver. Il en est de même pour l'autre asymptote Cg.

COROLLAIRE V.

103. Entre toutes les lignes qui passent par le centre C, 1°. Celles qui, comme Aa, tombent dans les angles faits par les asymptotes du côté des Hyperboles, rencontrent chacune des Hyperboles opposées en un seul point A, ou a ; & étant prolongées, elles passent au dedans de ces Hyperboles. Car à cause des angles GCA, gCA ; & de leurs opposés au sommet, il est clair que la ligne Aa, s'éloigne de plus en plus de l'une & de l'autre asymptote ; au lieu que les Hyperboles opposées s'en approchent toûjours * de plus en plus. 2°. Celles qui, comme Bb, tombent dans les angles d'à côté, faits aussi par les asymptotes, ne peuvent jamais rencontrer les Hyperboles opposées, quoiqu'on les prolonge à l'infini ; puisqu'aucun des points des Hyperboles * ne peut tomber dans ces angles.

*Art. 102.

*Art. 91.

*Def. 9.

D'où l'on voit * que tous les premiers diametres, tombent dans les angles faits par les Asymptotes du côté des Hyperboles, & que les seconds tombent dans les angles d'à côté.

COROLLAIRE VI.

104. Si l'on mene par un point quelconque H, de l'une des asymptotes CE, une parallele HM, à l'autre Ce; elle ne rencontrera l'Hyperbole qu'en un seul point M; & étant continuée, elle passera au dedans. Car sa distance de Ce, demeure par tout la même, au lieu que l'Hyperbole s'en approche * toûjours de plus en plus. FIG. 43. * Art. 102.

COROLLAIRE VII.

105. De-là il est évident que si par un point quelconque M, d'une Hyperbole, l'on mene deux droites indéfinies MH, Mh, paralleles à ses asymptotes Ce, CE.

1°. Tous les points de l'Hyperbole qui lui est opposée, tomberont dans l'angle HMh; puisqu'ils tombent tous * dans l'angle fait par ses asymptotes, lequel est renfermé dans l'angle HMh. * Art. 91.

2°. Les deux portions de l'Hyperbole, tomberont dans les deux angles à côté de celui-ci; ainsi aucun de ses points ne tombera dans l'angle opposé au sommet à l'angle HMh.

3°. Toutes les lignes qui, comme MF, tombent dans l'angle HMh, rencontrent (étant prolongées du côté de F) l'Hyperbole opposée en un point N, & passent au dedans; puisqu'elles s'écartent de plus en plus des droites MH, Mh, & par consequent de ses deux asymptotes qui leur sont paralleles: mais étant prolongées de l'autre côté du point M, elles entrent au dedans de l'Hyperbole qui passe par ce point, & ne la rencontrent jamais ailleurs.

4°. Toutes les lignes qui, comme Ee, tombent dans les angles à côté de l'angle HMh, rencontrent les deux asymptotes de l'Hyperbole qui passe par le point M; ainsi lorsqu'elles passent au dedans de l'une de ses portions, elles la rencontrent necessairement en quelque point N, puisqu'elles vont rencontrer l'asymptote qui tombe au dehors de cette portion.

COROLLAIRE VIII.

106. Si l'on mene par un point quelconque *M*, d'une Hyperbole, une ligne droite *Ff*, qui rencontre l'une de ses asymptotes au point *F*, & l'une des asymptotes de l'Hyperbole opposée au point *f*; & qu'on la prolonge en *N*, en sorte que *fN*, soit égale à *FM* : je dis que le point *N*, sera à l'Hyperbole opposée. Car la ligne *Ff*, tombe dans l'angle *HMh*, & rencontre par consequent l'Hyperbole opposée en quelque point *N*, comme l'on vient de démontrer dans le Corollaire

* Art. 95. précedent. Donc * &c.

2°. Si l'on mene par un point quelconque *M*, d'une Hyperbole, une ligne droite *Ee*, terminée par ses asymptotes, & qu'on prenne sur cette ligne, la partie *eN*, égale à *EM* : je dis que le point *N*, sera encore l'un des points de cette Hyperbole. Car menant *MH*, parallele à l'asymptote *Ce*, & terminée par l'autre en *H*, si l'on prend sur cette autre asymptote, la partie *CL*, égale à *HE*, & qu'on tire *LN*, parallele à *HM*; on a démontré dans l'article 104 qu'elle rencontrera l'Hyperbole en un point *N*, & dans l'article 100. que ce point sera tel que *CL* ou *HE*. *HM* :: *CH* ou *EL*. *LN*; d'où l'on voit que la ligne *LN*, rencontre l'Hyperbole dans le même point où elle rencontre la droite *Ee*. Mais à cause des paralleles *HM*, *LN*, il est clair que *eN* = *EM*, puisque *CL* = *HE*. Donc &c.

PROPOSITION VI.

Problême.

FIG. 43. 107. D'UN *point donné* M, *sur une Hyperbole dont les asymptotes* CE, Ce, *sont données; mener la tangente* DMd; *& démontrer qu'on n'en peut mener qu'une seule.*

Ayant mené du point donné *M*, une parallele *MH*, à l'une des asymptotes *Ce*, & terminée par l'autre *CE*, au point *H*; on prendra sur cette asymptote, la partie

HD;

HD égale à *HC*; on tirera par le point donné *M*, la droite *DM*, qui rencontre l'aſymptote *Ce* en un point *d*. Je dis en premier lieu, que cette ligne *DMd*, touchera l'Hyperbole au point *M*.

Car à cauſe des triangles ſemblables *CDd*, *HDM*, la ligne *Dd*, terminée par les aſymptotes, eſt diviſée en deux parties égales par le point *M*, de même que *CD*, l'eſt en *H*. Or s'il étoit poſſible qu'elle rencontrât l'Hyperbole en un autre point *O*, il eſt clair que *Od*, ſeroit * égale à *MD*, & par conſequent à *Md*, c'eſt à dire, la partie au tout; ce qui ne pouvant être, il s'enſuit que la ligne *DMd*, ne peut rencontrer l'Hyperbole, qu'au ſeul point *M*. De plus, ſi elle paſſoit au dedans, comme la ligne *Ee*, il eſt viſible qu'elle rencontreroit la portion de l'Hyperbole, au dedans de laquelle elle paſſeroit en quelque point *N*; puiſqu'elle iroit, rencontrer en un point *e*, l'aſymptote *Ce*, qui tombe * au dehors de cette portion. Il eſt donc évident que la ligne *Dd*, ne rencontre l'Hyperbole qu'au ſeul point *M*, & qu'elle n'entre point au dedans; c'eſt à dire, qu'elle eſt tangente en ce point.

* *Art.* 95.

* *Art.* 91.

Je dis en ſecond lieu, qu'il n'y a que la ſeule ligne *DMd*, qui puiſſe toucher l'Hyperbole au point *M*; car ſi l'on prend ſur l'aſymptote *CE*, la partie *HE*, plus grande ou moindre que *HD*, & qu'on tire par le point donné *M*, la droite *EM*, qui rencontre l'autre aſymptote *Ce*, au point *e*, il eſt clair à cauſe des paralleles *MH*, *Ce*, que *ME* ſera plus grande ou moindre que *Me*; puiſque *HE* a été priſe plus grande ou moindre que *HD* ou que *HC*. Or cela poſé, ſi l'on prend ſur la plus grande partie *Me*, le point *N*, en ſorte que *Ne* ſoit égale à *ME*, il eſt évident que ce point * ſera encore à l'Hyperbole, & qu'ainſi la ligne *Ee*, ne la touchera point au point *M*. Ce qui reſtoit à démontrer.

* *Art.* 106.

REMARQUE.

108. On a démontré dans l'art. 102. que plus CH devient grande, plus au contraire HM diminuë ; de ſorte que CH étant infiniment grande, HM devient infiniment petite, c'eſt à dire, nulle ou zero. Or CH étant infiniment grande, HD (qui lui eſt égale) le ſera auſſi ; & par conſequent les lignes MD, HD, qui ne ſe rencontrent que dans l'infini, pouvant être regardées comme paralleles, tomberont l'une ſur l'autre ; puiſque le point M ſe confond alors avec le point H : c'eſt à dire, que l'aſymptote CE, étant prolongée a l'infini, auſſi-bien que l'Hyperbole, peut être regardée comme une ligne qui la touche dans ſon extremité. Il en eſt de même de l'autre aſymptote Ce, laquelle peut être regardée comme touchant la même Hyperbole dans ſon autre extremité.

D'où l'on voit que les deux aſymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les Hyperboles oppoſées dans leurs extremités.

COROLLAIRE I.

109. Comme il n'y a que la ſeule ligne DMd, laquelle étant terminées par les aſymptotes, ſoit coupée en deux parties égales au point M ; il s'enſuit que ſi une ligne droite DMd, terminée par les aſymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point M, qui coupe cette ligne droite en deux parties égales ; elle ſera tangente de cette Hyperbole en ce point. Et réciproquement que ſi une ligne droite DMd, terminée par les aſymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point M ; elle ſera coupée en deux parties égales par ce point.

COROLLAIRE II.

Fig. 44. 110. Si par le point touchant M d'une tangente quelconque DMd, terminée par les aſymptotes CL,

cl, d'une Hyperbole, l'on mene un premier diametre MCm; & que par le point m, où il rencontre l'Hyperbole opposée, l'on tire une parallele Ee, à la tangente Dd, terminée par les asymptotes aux points E, e : je dis que cette ligne sera tangente au point m. Car les triangles CMD, CmE, seront semblables & égaux, puisque* CM est égal à Cm. La ligne mE, sera donc égale à MD. On prouvera de même (à cause des triangles semblables & égaux CMd, Cme) que me est égale à Md. C'est pourquoi la ligne Ee est divisée en deux également au point m; puisque Dd l'est au point M. Et par conséquent * elle sera tangente en m.

* Art. 96.

* Art. 109.

D'où l'on voit que les tangentes Dd, Ee, qui passent par les extremités d'un premier diametre quelconque Mm, sont paralleles entr'elles; & de plus égales, lorsqu'elles sont terminées par les asymptotes.

DÉFINITIONS.

13.

S'il y a deux diametres Mm, Ss, dont l'un Ss, soit parallele aux tangentes qui passent par les extremités de l'autre Mm; & de plus terminé en S, s, par les droites MS; Ms, menées de l'une des extremités M du diametre Mm, parallelement aux asymptotes : ces deux diametres Mm, Ss, seront appellés ensemble *Conjugués*. FIG. 44.

14.

Les lignes droites menées des points des Hyperboles opposées parallelement à l'un des diametres conjugués, & terminées par l'autre, sont nommées *Ordonnées* à cet autre. Ainsi NO, est une ordonnée au diametre Mm.

15.

Si l'on prend une troisiéme proportionnelle à deux diametres conjugués, elle sera le *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion.

COROLLAIRE I.

111. La définition 13[e] convient aux deux axes ; puiſque ſelon l'article 84. le ſecond axe eſt parallele aux tangentes qui paſſent par l'extremité du premier ; & que de plus, ſelon la définition 11[e], il eſt terminé par deux droites menées de l'une des extremités du premier axe, parallelement aux aſymptotes. D'où l'on voit que les deux axes peuvent être regardés comme deux diametres conjugués qui font entr'eux des angles droits.

COROLLAIRE II.

112. Comme le diametre SCs, eſt parallele à la tangente DMd, qui paſſe par l'une des extremités M du diametre MCm, & que cette tangente rencontre les deux aſymptotes CD, Cd, de l'Hyperbole, qui paſſe par le point M : il s'enſuit qu'il tombe dans les angles à côté de l'angle DCd, fait par les aſymptotes de cette Hyperbole ; Et qu'ainſi c'eſt un ſecond diametre.

D'où l'on voit qu'entre deux diametres conjugués MCm, SCs ; il y en a toûjours un premier Mm, & un ſecond Ss.

COROLLAIRE III.

113. Le ſecond diametre SCs, eſt coupé par le milieu au centre C, & de plus égal à la tangente DMd, qui paſſant par l'une des extremités M du premier diametre Mm, qui lui eſt conjugué, eſt terminée par les aſymptotes. Car à cauſe des paralleles MS, Cd, & Ms, CD ; il eſt clair que CS eſt égale à Md, & Cs à MD. Or DMd, eſt diviſée * en deux parties égales au point touchant M. Donc &c.

* Art. 109.

COROLLAIRE IV.

114. Deux diametres conjugués Mm, Ss, étant donnés, & ſçachant lequel des deux eſt un premier diametre ; il ne faut pour avoir les aſymptotes CD, Cd, que

tirer par le centre *C*, des paralleles aux deux droites *MS*, *Ms*, menées de l'une des extremités *M*, du premier diametre *Mm*, aux deux extremités *S*, *s*, du second.

Et réciproquement les deux asymptotes *CD*, *Cd*, d'une Hyperbole étant données, avec l'un de ses points *M*; il ne faut pour avoir deux de ces diametres conjugués *MCm*, *SCs*, que tirer *MH* parallele à l'une des asymptotes *Cd*, qui rencontre l'autre asymptote *CD* en *H*; & l'ayant prolongée en *S*, en sorte que *HS* soit égale à *HM*, mener les droites *CM*, *CS*. Car tirant *MD* parallele à *CS*, il est clair à cause des triangles semblables *CHS*, *MHD*, que *HD* est égale à *HC*; puisque *MH* est égale à *HS*; & qu'ainsi * *MD* est tangente en *M* : d'où il suit selon la définition 13e, que les lignes *CM*, *CS*, sont deux demi-diametres conjugués. * *Art.* 107.

Il est donc évident que deux diametres conjugués *Mm*, *Ss*, étant donnés de position & de grandeur, & sçachant de plus lequel des deux est un premier diametre; on a les deux asymptotes *CD*, *Cd*, avec l'un des points *M*, de l'une des Hyperboles opposées.

Et réciproquement que les asymptotes *CD*, *Cd*, d'une Hyperbole étant données, avec un de ses points *M*; on a deux de ses diametres conjugués *Mm*, *Ss*, de position & de grandeur; & l'on sçait lequel des deux est un premier diametre; sçavoir, celui qui passe par le point donné *M*.

COROLLAIRE V.

115. UN second diametre *SCs*, étant donné de position, pour en déterminer la grandeur, & trouver le premier diametre *Mm*, qui lui est conjugué; on lui menera par tout où l'on voudra au dedans de l'angle fait par les asymptotes, une parallele *Ll*, terminée par les asymptotes en *L*, *l*; & par son point de milieu *O*, le premier diametre *CO*, qui rencontrera l'Hyperbole en

un point *M*; par lequel ayant tiré les droites *MS*, *Ms*, paralleles aux aſymptotes; il eſt clair, ſelon la définition 13[e], que les points *S*, *s*, où elles rencontrent le ſecond diametre *SCs*, donné de poſition, en déterminent la grandeur, & que le premier diametre *MCm* lui eſt conjugué. Car menant par le point *M*, la ligne *Dd*, parallele à *Ll*, & terminée par les aſymptotes, elle ſera coupé en deux également au point *M*; puiſque *Ll*, l'eſt au point *O*: & partant * elle ſera tangente en *M*.

* *Art.* 109.

De-là, il eſt évident qu'un ſecond diametre *SCs*, étant donné de poſition, ſa grandeur eſt déterminée en ſorte qu'il ne peut en avoir qu'une ſeule; comme auſſi la grandeur & la poſition du premier diametre *Mm*, qui lui eſt conjugué.

COROLLAIRE VI.

116. Un ſecond diametre *SCs*, étant donné de poſition & de grandeur, avec ſon parametre, & la poſition de ſes ordonnées; il ſera facile de trouver de poſition & de grandeur le premier diametre *MCm*, qui lui eſt conjugué, avec ſon parametre. Car ayant mené par le centre *C*, une parallele indéfinie aux ordonnées du diametre *Ss*, on marquera ſur cette ligne deux points *M*, *m*, également éloignés de part & d'autre du centre *C*, en ſorte que *Mm*, ſoit égale à la moyenne proportionnelle entre le ſecond diametre *Ss*, & ſon parametre. Puis ayant trouvé une troiſiéme proportionnelle aux deux lignes *Mm*, *Ss*, il eſt clair, ſelon les définitions 14 & 15, que *Mm*, ſera le premier diametre conjugué au diametre *Ss*, & qu'il aura pour ſon parametre cette troiſiéme proportionnelle.

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 44. 117. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* ON, *au premier diametre.* Mm, *eſt au rectangle de* MO *par* Om, *par-*

ties de ce diametre prolongé ; comme le quarré de son conjugué Ss, *est au quarré de ce premier diametre* Mm.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 . MO \times Om :: \overline{Ss}^2 . \overline{Mm}^2$.

Ayant mené par l'une des extremités *M*, du premier diametre *Mm*, une parallele *Dd* au second diametre *Ss*, terminée par les asymptotes ; elle sera tangente en *M*, selon la définition 13e. Et par consequent * elle sera coupée en deux également par ce point : c'est pourquoi, si l'on prolonge l'ordonnée *ON* (qui selon la définition 14e est parallele au diametre *Ss*) de part & d'autre du diametre *Mm*, elle rencontrera les asymptotes en deux points *L*, *l*, qui seront également éloignés de part & d'autre du point *O*. Cela posé, soient nommées les données *CM*, ou *Cm*, *t* ; *CS*, ou *Cs*, ou * *MD*, ou *Md*, *c* ; & les indéterminées *CO*, *x* ; *ON*, *y* ; on aura à cause des triangles semblables *CMD*, *COL* ; cette proportion : $CM (t) . MD (c) :: CO (x) . OL$ ou $Ol = \frac{cx}{t}$. Donc LN ou $LO \pm ON = \frac{cx}{t} \pm y$, & Nl ou $Ol \mp NO = \frac{cx}{t} \mp y$; Et partant $LN \times Nl = \frac{ccxx}{tt} - yy =$ * $DM \times Md = cc$. D'où il suit que $\overline{ON}^2 (yy) . MO \times Om (xx - tt) :: \overline{Ss}^2 (4cc) . \overline{Mm}^2 (4tt)$. Puisqu'en multipliant les Extrêmes & les Moyens, on trouve $4ttyy = 4ccxx - 4cctt$, c'est à dire (en ~~divisant~~ multipliant par $4tt$, & transposant à l'ordinaire) l'équation même précédente $\frac{ccxx}{tt} - yy = cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 109.
* Art. 113.
* Art. 90.

COROLLAIRE GENERAL.

118. Il est visible que ce qu'on a démontré dans la Proposition seconde * ; par rapport aux deux axes *Aa*, *Bb*, s'etend par le moyen de cette Proposition à deux diametres conjugués quelconques, *Mm*, *Ss*. Or comme les articles 80, 81, 82, 83, 84 & 85, se tirent de la seconde Proposition, & subsistent également, soit que l'angle *ACB*, soit droit ou qu'il ne le soit pas ; il s'en-

* Art. 79.

ſuit que ſi l'on ſuppoſe dans ces articles que les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, ſoient deux diametres conjugués quelconques, ces articles ſeront encore vrais dans cette ſuppoſition : car leur démonſtration demeure toûjours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant par tout où ſe trouve le mot d'*Axe*, celui de *Diametre*.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

FIG. 45. 119. SOIENT *deux tangentes quelconques* DE, FG, *d'une Hyperbole* MA, *terminées par les aſymptotes, & qui s'entrecoupent en un point* O ; *je dis que les côtés des triangles* CDE, CFG, *autour de l'angle commun* C, *ſont réciproquement proportionnels.*

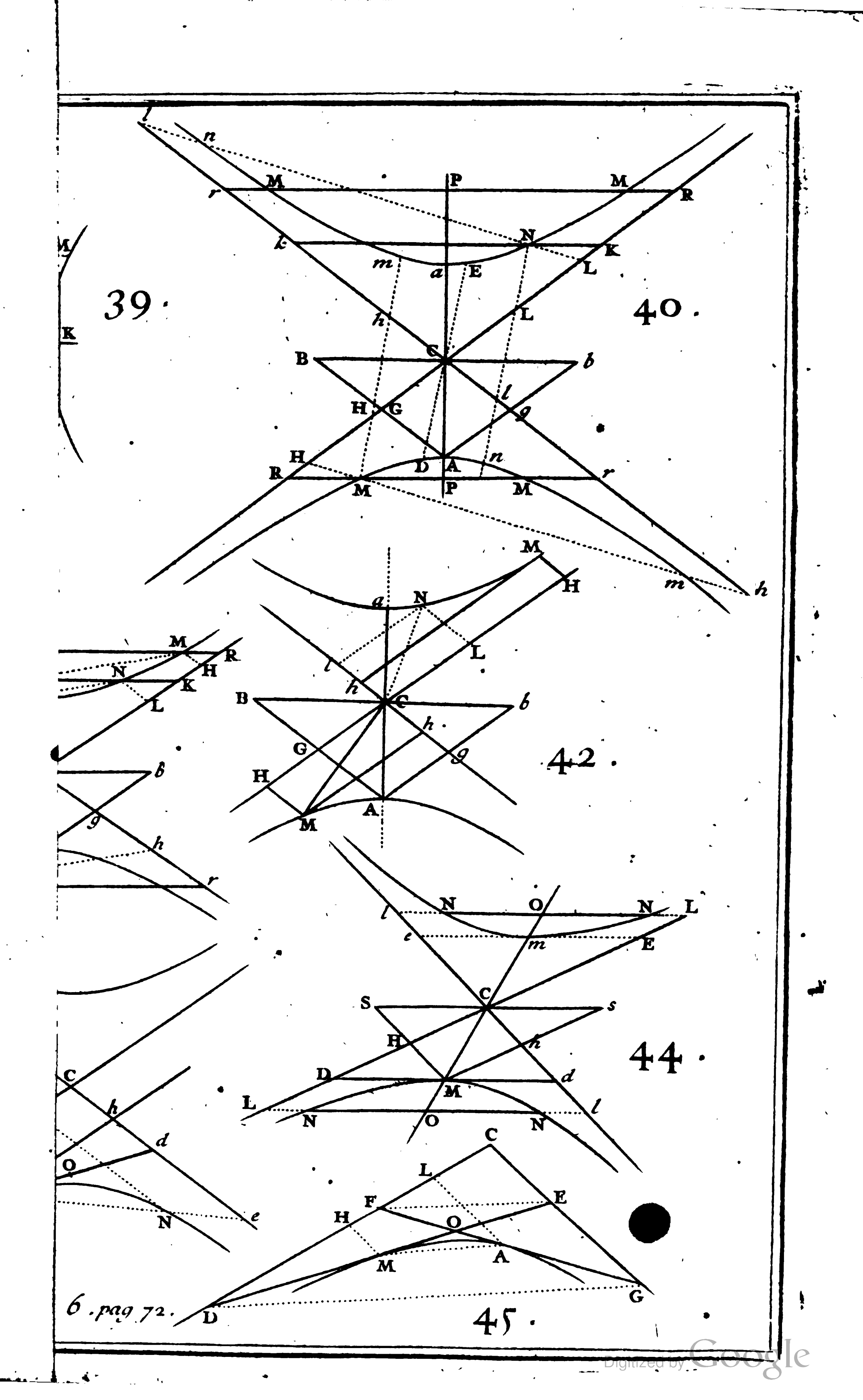
Il faut prouver que CD. CF :: CG. CE.

Ayant mené par les points touchans *M*, *A*, les paralleles *MH*, *AL*, à l'aſymptote *CG* ; il eſt clair à cauſe des triangles ſemblables *CDE*, *HDM*, que *CD* eſt dou-
*Art. 109. ble de *CH*, & *CE* double de *HM* ; puiſque *DE* eſt* double de *DM*. Et à cauſe des triangles ſemblables *CFG*, *LFA*, que *CF* eſt double de *CL*, & *CG* double de *LA* ;
*Art. 100. puiſque *FG*, eſt double de *FA*. Or* *CH*. *CL* :: *LA*. *HM*. Et partant ſi l'on prend le double de chaque terme, on aura 2*CH* ou *CD*. 2*CL* ou *CF* :: 2*LA* ou *CG*. 2*HM* ou *CE*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

120. IL ſuit de cette Propoſition que les droites *DG*, *FE*, ſont paralleles entr'elles. D'où il eſt évident :

1°. Que les triangles *CDE*, *CFG*, ſont égaux ; car les triangles *FDE*, *FGE*, qui ont la même baſe *FE*, & qui ſont entre les mêmes paralleles *DG*, *FE*, ſont égaux ; Et partant, ſi l'on ajoûte de part & d'autre le même


39.
40.
42.
44.
45.
6. pag. 72.

même triangle *CEF*, on formera les triangles *CDE*, *CFG*, qui seront égaux entr'eux.

2°. Que la ligne *DE*, est couppée en même raison aux points *M*, *O*, que la ligne *FG* l'est aux points *A*, *O*. Car menant par les points touchans la droite *MA*, il est clair qu'elle sera parallele aux deux droites *DG*, *FE*; puisqu'elle couppe par le milieu les droites *DE*, *FG*, renfermées entre ces paralleles.

PROPOSITION IX.

Theorême.

121. SI *par un point quelconque* M, *d'une Hyperbole*, *l'on mene une ordonnée* MP *à tel de ses diametres* Aa *que l'on voudra*, *& une tangente* MT *qui le rencontre en* T; *je dis que* CP. CA :: CA. CT. *en observant que les points* P, T, *tombent du même côté du centre* C, *lorsque la ligne* Aa *est un premier diametre*; *& au contraire qu'ils tombent de part & d'autre du centre*, *lorsque c'est un second diametre*. FIG. 46. & 47.

Premier cas. Lorsque la ligne *Aa* est un premier diametre. On prolongera la tangente *MT* jusqu'à ce qu'elle rencontre les asymptotes *CD*, *CG*, aux points *D*, *E*; & l'ordonnée *PM*, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'asymptote *CD* au point *N*; on menera ensuite par le point *A* la ligne *AK*, parallele à *DE*, qui rencontre l'asymptote *CG* au point *K*, & la tangente *FG* terminée par les asymptotes, qui sera parallele * à *PM*, & qui rencontre au point *O* l'autre tangente *DE*. FIG. 46. * *Def.* 14.

Cela posé, *AP* est à *AC*, ou *FN* à *FC*, en raison composée de *FN* à *FD*, ou de *OM* à *OD*, ou * de *OA* à *OG*, ou de *EK* à *EG*, & de *FD* à *FC*, ou * de *EG* à *EC*. Or *AT* est à *TC*, ou *KE* à *EC*, en raison composée de *EK* à *EG*, & de *EG* à *EC*. Donc *AP*. *AC* :: *AT*. *TC*. puisque les raisons composantes de ces deux raisons sont les mêmes; & par consequent *AP* + *AC* ou *CP*. *CA* :: *AT* + *TC* ou *CA*. *CT*. *Ce qui étoit proposé en premier lieu.* * *Art.* 120. * *Art.* 120.

Second cas. Lorsque la ligne Aa est un second diametre. Ayant mené par le centre C la ligne CK parallele à l'ordonnée PM, qui rencontre l'Hyperbole au point B, & la tangente MT au point R, & par le point touchant M la ligne MK parallele à Aa; il est clair que CB sera le premier demi-diametre conjugué au second Aa, & qu'ainsi MK sera ordonnée à ce diametre.

Cela posé, si l'on nomme les données CA ou Ca, t; CB, c; & les indéterminées CP ou MK, x; PM ou CK, y; on aura selon ce qu'on vient de démontrer dans le premier cas, $CR = \frac{cc}{y}$; & partant RK ou $CK - CR = \frac{yy-cc}{y}$. Or les triangles semblables KRM, CRT, donnent $KR\left(\frac{yy-cc}{y}\right) . RC\left(\frac{cc}{y}\right) :: MK(x)$. $CT = \frac{ccx}{yy-cc} = \frac{tt}{x}$. en mettant pour $yy - cc$ sa valeur $\frac{ccxx}{tt}$ tirée de ce que $yy =$ * $\frac{ccxx}{tt} + cc$. C'est à dire que $CP . CA :: CA . CT$. *Ce qui restoit à démontrer.*

* Art. 80. & 118.

PROPOSITION X.

Theorême.

Fig. 48. & 49.

122 *Si par un point quelconque* M *d'une Hyperbole qui a pour centre le point* C, *on mene une ordonnée* MP *à l'un ou à l'autre axe* Aa, *& une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT, *laquelle passe par* M: *Je dis que* CP *sera toûjours à* PG *en la raison donnée de l'axe* Aa *à son Parametre.*

Car nommant le demi-axe CA ou Ca, t; & les indéterminées CP, x; PM, y; on aura * $CT = \frac{tt}{x}$; Et partant $PT = \frac{xx \mp tt}{x}$, selon que Aa est le premier ou le second axe. Or les triangles rectangles semblables TPM, MPG, donnent $TP\left(\frac{xx \mp tt}{x}\right) . PM(y) :: PM$

* Art. 121.

(y). $PG = \frac{xyy}{xx \mp tt}$. D'où l'on tire cette proportion CP (x). PG ($\frac{xyy}{xx \mp tt}$) :: $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$ ($xx \mp tt$). $\overline{PM}^2$ (yy). puisqu'en multipliant les moyens & les extrêmes, on trouve le même produit xyy. Mais $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$ est à $\overline{PM}^2$, comme * l'axe Aa est à son parametre. Donc CP est aussi à PG en cette même raison. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 81.

PROPOSITION XI.

Theorême.

123. Si *d'un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on tire à ses deux foyers* F, f, *les droites* MF, Mf; *je dis que la tangente* MT, *qui passe par ce point* M, *divise en deux également l'angle* FMf. Fig. 90.

Car ayant mené les perpendiculaires FD, fd, sur la tangente MT; le premier axe Aa, qui passe par les foyers F, f, & qui rencontre la tangente en T; & l'ordonnée MP, à cet axe : on nommera les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x. L'on aura MF * ($\frac{mx}{t} - t$). Mf ($\frac{mx}{t} + t$) :: TF ou CF (m) $- CT$ * ($\frac{tt}{x}$). Tf ou Cf (m) $+ CT$ ($\frac{tt}{x}$). puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Or les triangles rectangles semblables TFD, Tfd, donnent TF. Tf :: FD. fd. L'hypothenuse MF du triangle rectangle MDF, sera donc à l'hypothenuse Mf du triangle rectangle Mdf, comme le côté DF est au côté df; & par consequent ces deux triangles seront semblables. Donc les angles FMD, fMd, qui sont opposés aux côtés homologues DF, df, seront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 78. * Art. 121.

COROLLAIRE.

124. De-la il est évident, que la tangente MT, étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M, laisse l'Hyperbole AM, toute entiere du côté de son foyer interieur F Et comme cela arrive toûjours en quelque endroit de cette Hyperbole qu'on prenne le point M, il est visible qu'elle sera concave dans toute son étenduë autour de son foyer interieur F.

PROPOSITION XII.

Theorême.

Fig. 51. 125. *La difference des quarrés de deux diametres conjugués quelconques* Mm, Ss, *est égale à la difference des quarrés des deux axes* Aa, Bb.

Il faut prouver que $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$, *ou que* $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$.

* Def. 11. & 13. Si l'on mene les droites MS, AB, elles seront paralleles à l'asymptote Cg, & de plus couppees en deux également par l'autre asymptote CG, aux points H, G; puisque * les lignes Ms, Ab, sont paralleles à cette asymptote, & que les seconds diametres Ss, Bb, sont coupés * en deux également au centre C: C'est pourquoi si l'on mene sur l'asymptote CG, les perpendiculaires AF, BE, ML, SK, on formera les triangles GAF, GBE, & HML, HSK, qui seront semblables & égaux. Cela posé, soient nommées les données CG ou * GA, m; GE ou GF, a; AF ou BE, b; & les indéterminées CH, x; HM, y: ce qui donne $CE = m + a$, $CF = m - a$; $\overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$ ou $\overline{CB}^2 = mm + 2am + aa + bb$, $\overline{CF}^2 + \overline{FA}^2$ ou $\overline{CA}^2 = mm - 2am + aa + bb$. Et partant $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = 4am$. Or les triangles semblables GAF, HML, fournissent $GA\ (m) . AF\ (b) :: HM\ (y) . ML$ ou $KS = \frac{by}{m}$. Et $GA\ (m) . GF\ (a) :: HM$

* Def. 11. & 13.

* Art. 113.

* Art. 88.

(y). HL ou $HK = \frac{ay}{m}$. Donc $CK = x + \frac{ay}{m}$, $CL = x - \frac{ay}{m}$; $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2$ ou $\overline{CS}^2 = xx + \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$, $\overline{CL}^2 + \overline{LM}^2$ ou $\overline{CM}^2 = xx - \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$. Et partant $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \frac{4axy}{m} = 4am$, en mettant pour xy sa valeur * mm. Donc $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$; *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 101.

Si l'angle GCg, fait par les asymptotes, étoit aigu, au lieu que dans cette figure & le raisonnement qui lui est approprié, il est obtus; CF seroit alors plus grande que CE, & on prouveroit de la même maniere que $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$. Mais si l'angle GCg fait par les asymptotes étoit droit, il est visible alors que les lignes AB, MS, seroient perpendiculaires sur l'asymptote CG; & qu'ainsi les deux demi-diametres conjugués CM, CS, seroient égaux entr'eux, de même que les deux demi-axes CA, CB. Or comme alors la difference des deux diametres conjugués Mm, Ss, est nulle, aussi bien que celle des deux axes Aa, Bb; il s'ensuit que cette Proposition est vraie dans tous les cas.

COROLLAIRE.

126. DE-LA il est évident qu'un premier diametre quelconque Mm, est moindre, plus grand, ou égal au second diametre Ss, qui lui est conjugué; selon que l'angle GCg, fait par les asymptotes, est obtus, aigu, ou droit.

DÉFINITION.

16.

Les deux Hyperboles opposées sont appellées *Equilateres*, lorsque deux de leurs diametres conjugués quelconques sont égaux entr'eux; ou bien lorsque l'angle fait par leurs asymptotes est droit.

COROLLAIRE.

FIG. 52. 127. Si d'un point quelconque *M* d'une Hyperbole équilatere, l'on mene une ordonnée *MP* à tel de ses
* Art. 81. & 118. diametres *Aa* qu'on voudra, on aura * $\overline{MP}^2 = \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$: sçavoir —, lorsque *Aa* est un premier diametre ; & +, lorsque c'est un second. Car le diametre conjugué
*Art. 126. au diametre *Aa* * lui sera toûjours égal.

PROPOSITION XIII.

Problême.

FIG. 53. 54. & 55. 128. Deux *diametres conjugués quelconques étant donnés, & sçachant lequel des deux est le premier ; ou ce qui re-*
* Art. 114. *vient * au même, les asymptotes* CD, CF, *d'une Hyperbole étant données, avec un de ses points quelconques* M : *mener deux diametres conjugués* Aa, Bb, *qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné.*

Ayant coupé dans un cercle quelconque qui a pour centre le point *o*, un arc *dcf* capable de l'angle *DCF* fait par les asymptôtes ; on menera par le point de milieu *e*, de la corde *df*, la ligne *ec* qui fasse avec cette corde de part ou d'autre l'angle *dec* ou *fec* égal à l'angle donné ; & par le point *c*, où elle rencontre l'arc *dcf*, les droites *cd*, *cf*. Cela fait, on prendra sur les asymptotes les parties *CD*, *CF*, égales aux cordes *cd*, *cf* ; & ayant tiré *DF*, l'on menera le second diametre *Bb* parallele à cette ligne, & le premier diametre *Aa* qui passe par son milieu *E*. Je dis que ces deux diametres *Aa*, *Bb*, font entr'eux un angle égal à l'angle donné, & qu'ils sont conjugués l'un à l'autre.

Car par la construction l'angle *dcf* est égal à l'angle *DCF* fait par les asymptotes ; & par consequent les triangles *DCF*, *dcf*, & *DCE*, *dce*, sont égaux & semblable. L'angle *BCa*, que font entr'eux les deux diametres *Aa*, *Bb*, sera donc égal à l'angle *DEC* ou *dec*

qui a été fait égal à l'angle donné. De plus, si l'on mene par le point *A*, que je suppose être l'une des extremités du premier diametre *Aa*, une parallele *DE*; il est clair qu'elle sera couppée également par ce point, puisque *DF* l'est au point *E*; & qu'ainsi * elle sera tangente en *A*; d'où il suit * que les diametres *Aa*, *Bb*, sont conjugués. * Art. 109. * Def. 13.

Maintenant pour déterminer la grandeur de ces deux diametres, on tirera par le point donné *M*, une parallele *MKL* au premier diametre *Aa*, laquelle rencontre l'asymptote *CD* au point *K*, & l'autre asymptote *CF*, prolongé au delà du centre *C*, au point *L*: & ayant pris *CA* moyenne proportionnelle entre *KM*, *ML*; il est clair * que le point *A* sera l'une des extremités du premier diametre *Aa*; & qu'ainsi menant les lignes *AB*, *ab*, paralleles aux asymptotes *CF*, *CD*, elles * détermineront par leurs points de rencontre *B*, *b*, la grandeur du second diametre *Bb*. * Art. 94. * Def. 13.

Comme l'on peut mener deux differentes lignes *ec*, *ec*, qui fassent avec la corde *df*, de part & d'autre des angles *dec*, *fec*, égaux à l'angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; il s'ensuit qu'on pourra toûjours trouver alors deux differens diametres conjugués *Aa*, *Bb*, qui satisferont également, comme l'on voit dans les figures 54 & 55. Mais il est à remarquer que les diametres conjugués *Aa*, *Bb*, de la fig. 55. ont une position semblable par rapport à l'asymptote *CF*, à ceux de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote *CD*; & que leur grandeur demeure la même dans ces deux differentes positions. Car,

1°. Menant du centre *o* au point *e*, milieu de la corde *df*, la ligne *oe*, elle sera perpendiculaire à cette corde, & par consequent les angles *oec*, *oec*, seront égaux; c'est pourquoi tirant les rayons *oc*, *oc*, les triangles *oec*, *oec*, qui ont le côté *oe* commun, les angles *oec*, *oec*, & les côtés *oc*, *oc*, égaux entr'eux, auront aussi leurs troisiémes côtés *ec*, *ec*, égaux. Les triangles *fec*, *dec*, qui ont les côtés *ef*, *ed*, & *ec*, *ec*, & les

angles fec, dec, égaux, seront donc égaux & semblables ; d'où l'on voit que l'angle ecf, ou ECF, de la figure 55. est égal à l'angle ecd, ou ECD, de la fig. 54. & qu'ainsi la position du diametre Aa, de la fig 55. par rapport à l'asymptote CF, est semblable à celle du diametre Aa, de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote CD.

2°. Si l'on mene dans la figure 55. la ligne Ml, qui fasse avec l'asymptote CF, prolongée du côté du centre C, l'angle MlC égal à l'angle MLC ou ECF, de la figure 54 : il est clair que les lignes Ml, Mk, de la figure 55. seront égales aux lignes ML, MK, de la figure 54 ; puisqu'on suppose que la position du point M. par rapport aux asymptotes, est la même dans ces deux figures. Or l'angle MlL, complement à deux droits de l'angle MlC, de la figure 55, ou de ECF de la figure 54, est égal à l'angle MKk, complement à deux droits de l'angle ECD de la fig. 55. ou de ECF de la fig. 54 ; Et par consequent dans la fig. 55. les deux triangles LMl, kMK, qui ont l'angle en M commun, & les angles aux points l, K, égaux, sont semblables : ce qui donne $LM . Ml :: kM . MK$. Et partant $LM \times MK = lM \times Mk$ ou

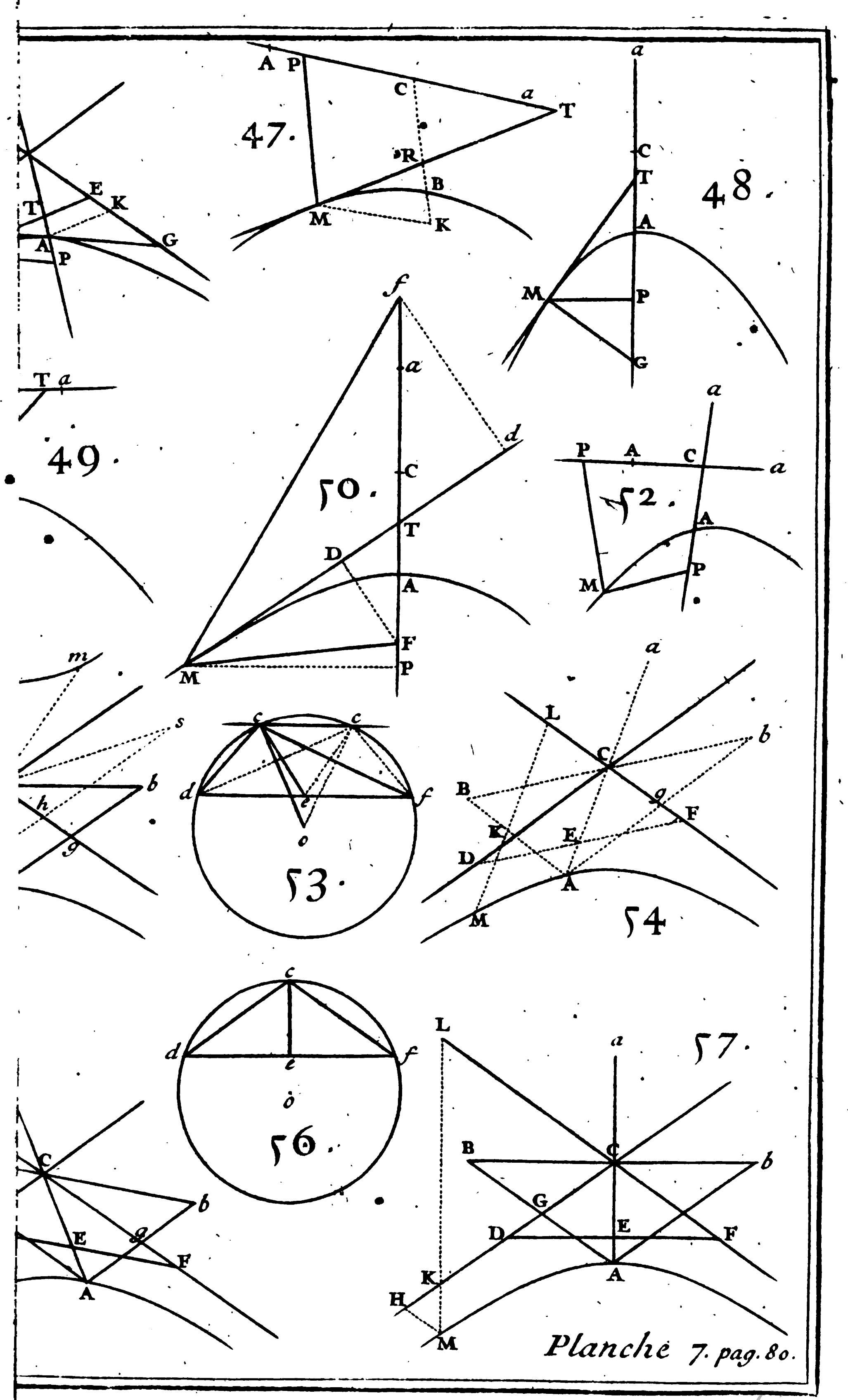
* Art. 94. $LM \times MK$ de la figure 54. D'où l'on voit * que les premiers demi-diametres CA, CA, des figures 54 & 55. sont égaux. Il en est de même du diametre Bb ; puisque sa position & sa grandeur dépendent de celles du premier diametre Aa, auquel il est conjugué.

Comme l'on ne peut mener qu'une seule ligne ec, qui fasse avec la corde df de part ou d'autre, un angle égal

Fig. 56. & 57. à l'angle donné, lorsque cet angle est droit ; il s'ensuit qu'il n'y a que deux diametres conjugués Aa, Bb, qui

* Art. 111. fassent entr'eux un angle droit ; & qu'ainsi * ils seront les deux axes. Mais le triangle dcf ou DCF, étant alors isoscelle, le premier axe Aa divisera par le milieu l'angle DCF fait par les asymptotes ; d'où l'on voit que pour trouver de position les deux axes, il n'y a qu'à tirer deux lignes droites Aa, Bb, perpendiculaires entr'elles, dont l'une d'elles Aa, divise par le milieu l'angle

DC


47.
48.
49.
50.
52.
53.
54.
56.
57.
Planche 7. pag. 80.

DCF, fait par les aſymptotes : après quoi l'on en déterminera la grandeur, comme on vient de l'enſeigner pour les diametres conjugués.

On peut encore trouver les deux axes de cette autre maniere. Soit menée par le point donné *M* une parallele *MH* à l'une des aſymptotes *CF*, & terminée par l'autre *CD* au point *H*. Soit priſe ſur l'aſymptote *CD*, la partie *CG* égale à la moyenne proportionnelle entre *CH*, *HM* : & ſoit tirée par le point *G* une parallele *AB* à *CF*, telle que chacune de ſes parties *GA*, *GB*, ſoit égale à *CG*. Il eſt évident que les lignes *CA*, *CB*,* ſeront les deux demi-axes de poſition & de grandeur. * *Art.* 101. & 88.

COROLLAIRE.

129. Il eſt donc évident, 1°. Qu'il n'y a que deux diametres conjugués qui faſſent entr'eux un angle droit ; & qu'ainſi il ne peut y avoir que deux axes. 2°. Qu'on peut toûjours trouver deux differens diametres conjugués qui faſſent entr'eux un angle égal à un angle donné, lorſque cet angle n'eſt pas droit ; que les deux premiers ont une poſition ſemblable par rapport à l'autre aſymptote, à celle des deux autres par rapport à l'autre aſymptote ; d'où il ſuit qu'ils ſont ſemblablement poſés de part & d'autre des deux axes, puiſque les deux axes diviſent par le milieu les angles faits par les aſymptotes ; & qu'enfin leur grandeur demeure la même dans ces deux differentes poſitions.

PROPOSITION XIV.

Problême.

130. Deux *diametres conjugués quelconques étant donnés, & ſçachant lequel des deux eſt le premier ; ou ce qui eſt la même choſe* * *les aſymptotes de deux Hyperboles oppoſées étant données avec un de leurs points quelconque : décrire ces Hyperboles par un mouvement continu.* * *Art.* 114.

PREMIERE MANIÉRE.

On cherchera les deux axes, comme l'on vient d'enseigner dans la proposition précedente, & l'on décrira ensuite les Hyperboles opposées selon l'article 76.

SECONDE MANIÉRE.

FIG. 58. Soient *Aa*, *Bb*, les diametres conjugués donnés, entre lesquels le diametre *Aa* est le premier, ou bien *CG*, *Cg*, les asymptotes données, avec le point *A*, un de ceux des Hyperboles opposées. Ayant mené par le point donné *A* une parallele *AG*, à l'une des asymptotes *Cg*, & terminée par l'autre en *G*, on fera glisser le long de l'asymptote *CG*, indefiniment prolongée de part & d'autre du centre *C*, une droite *HK* égale à *CG*, qui entraînera par son extremité *H* une parallele *HM* à l'asymptote *Cg*, & par son autre extremité *K*, une droite *KA* mobile autour du point fixe *A*. Je dis que l'interſection continuelle *M* des droites *AK*, *HM*, décrira dans ce mouvement les deux Hyperboles opposées qu'on demande.

Car à cause des triangles semblables *KHM*, *KGA*, on aura toûjours *KH* ou *CG*. *HM* :: *KG* ou *CH*. *GA*. Et partant $CH \times HM = CG \times GA$. Le point *M* sera
* Art. 101. donc * un des points de l'Hyperbole qui passe par le point donné *A*, & qui a pour asymptotes les doites données *CG*, *Cg*; ou de l'Hyperbole opposée.

PROPOSITION XV.

Problême.

131. LES *mêmes choses étant données que dans la Proposition précedente; décrire les Hyperboles opposées par plusieurs points.*

PREMIERE MANIÉRE.

FIG. 59. Soient *CD*, *CE*, les asymptotes données, & *A* le

point donné. Ayant mené par ce point A autant de lignes DE, DE, DE, &c. qu'on voudra, terminées par les asymptotes ; & ayant pris sur ces lignes droites les parties EM, EM, EM, &c. égales AD, AD, AD, &c ; sçavoir chacune à sa correspondante : il est clair * 1°. Que les points M, M, M, &c, seront à l'Hyperbole qui passe par le point A, lorsque les points E, E, E, &c. tombent au dessous du centre. 2°. Que ces Hyperboles ont pour asymptotes les droites CD, CE. Faisant donc passer par tous les points M, M, M, &c. qui tombent dans l'angle fait par les asymptotes, une ligne courbe, & par les autres points M, M, M, &c. qui tombent dans l'angle opposé au sommet à celui ci, une autre ligne courbe ; ces deux lignes seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande.

* Art. 106.

SECONDE MANIERE.

Soient les lignes Aa, Bb, les deux diametres conjugués donnés, entre lesquels Aa est le second. Ayant pris sur le premier demi-diametre CB prolongé indéfiniment du côté de B, de petites parties CE, EE, EE, &c. égales entr'elles, autant & de telle grandeur qu'on voudra, on menera par celui des points E, qui est le plus proche du centre C, la ligne EP parallele à BA ; & on prendra sur le second diametre Aa de part & d'autre du centre C, autant de petites parties CP, PP, PP, &c. toutes égales à CP, qu'il y a de petites parties CE, EE, EE, &c. Ayant tiré CD perpendiculaire & égale à CB, on menera par tous les points P, P, P, &c, des paralleles MPM, MPM, MPM, &c. au premier diametre Bb, sur chacune desquelles on prendra de part & d'autre du point P, des parties PM, PM, égales chacune à sa correspondante ED. Je dis que les deux lignes courbes qui passent par tous les points M ainsi trouvés, seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande. FIG. 60.

Car nommant les données CA, t ; CB ou CD, c ; &c

les indéterminées CP, x ; PM, y ; les triangles semblables CAB, CPE, donneront cette proportion $CA(t) . CB(c) :: CP(x) . CE = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle ECD rectangle en C, (en imaginant chaque hypothenuse ED qu'on a omise de peur de confusion dans la figure) le quarré $\overline{ED}^2$ ou $\overline{PM}^2 (yy) = \overline{CE}^2 (\frac{ccxx}{tt})$

* Art. 81. & 118. $+ \overline{CD}^2 (cc)$. La ligne PM sera donc * une ordonnée au second diametre Aa, qui a pour conjugué le premier Bb ; & comme cette démonstration convient à toutes les lignes PM, puisque chaque CP est toûjours à la correspondante CE, en la raison de CA à CB ; il s'ensuit &c.

FIG. 61. * Def. 16. Lorsque les diametres conjugués Aa, Bb, sont égaux entr'eux, c'est à dire*, lorsque les Hyperboles qu'on demande sont équilateres ; la construction devient beaucoup plus aisée. Car ayant mené CD perpendiculaire & égale à CA, & tiré par un point quelconque P du diametre Aa, une parallele MPM au premier diametre Bb ; il n'y aura qu'à prendre sur cette ligne de part & d'autre du point P, les parties PM, PM, égales chacune à PD, pour avoir deux points des Hyperboles opposées. Car à cause du triangle PCD rectangle en C (en imaginant chaque hypothenuse PD) on aura toûjours $\overline{PD}^2$ ou $\overline{PM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CD}^2$ ou $\overline{CA}^2$; Et partant la ligne

* Art. 127. PM sera * une ordonnée au second diametre Aa, qui a pour conjugué le premier Bb qui lui est égal.

DÉFINITION.

17.

FIG. 62. Soient deux Hyperboles opposées AM, am, qui ayent pour premier axe la ligne Aa, & pour second axe la ligne Bb ; & soient deux autres Hyperboles opposées BS, bs, qui ayent au contraire pour premier axe la ligne Bb, & pour second axe la ligne Aa : ces deux nouvelles Hyperboles BS, bs, sont appellées *Conjuguées*

aux deux premieres *AM*, *am*; & les quatre ensemble sont appellées Hyperboles *conjuguées*.

COROLLAIRE.

132. Il est clair que les lignes *Ba*, *Ab*, sont paralleles; puisque les droites *Aa*, *Bb*, terminées par ces lignes, s'entrecoupent * en deux également au point *C*. D'où il suit, selon la définition 11e. que l'Hyperbole *BS* conjuguée à *AM*, a pour l'une de ses asymptotes la ligne *CG* asymptote de l'Hyperbole *AM*; & pour l'autre, la ligne *Cg* autre asymptote de l'Hyperbole *AM* indéfiniment prolongée du côté *C*: puisque ces deux lignes passent par le centre *C*; & sont les paralleles aux deux droites *Ba*, *BA*, menées de l'extremité *B* du premier axe *Bb* de l'Hyperbole *BS* aux deux extremités *A*, *a*, du second. Il est donc évident que les deux droites *CG*, *Cg*, paralleles à *Ab*, *AB*, indéfiniment prolongées de part & d'autre du centre *C*, sont non seulement les asymptotes des Hyperboles opposées *AM*, *am*; mais aussi des deux autres *BS*, *bs*, qui leur sont conjuguées.

* *Def.* 4. & 5.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

133. *Si l'on mene par un point quelconque* H *d'une asymptote* CG *commune aux deux Hyperboles* AM, BS, *une parallele* MS *à l'autre asymptote* Cg; *je dis qu'elle rencontrera ces deux Hyperboles en des points* M, S, *qui sont également éloignés de part & d'autre du point* H.

Car, 1°. La ligne *MS* rencontrera * chacune des Hyperboles *AM*, *BS*, en un point. 2°. A cause de l'Hyperbole *AM*, le rectangle * $CH \times HM = CG \times GA$; & à cause de l'Hyperbole *BS*, le rectangle $CH \times HS = CG \times GB$. Donc, puisque * $GB = GA$, il s'ensuit que $CH \times HS = CH \times HM$; Et qu'ainsi $HS = HM$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 104.
* *Art.* 101.
* *Art.* 88.

COROLLAIRE I.

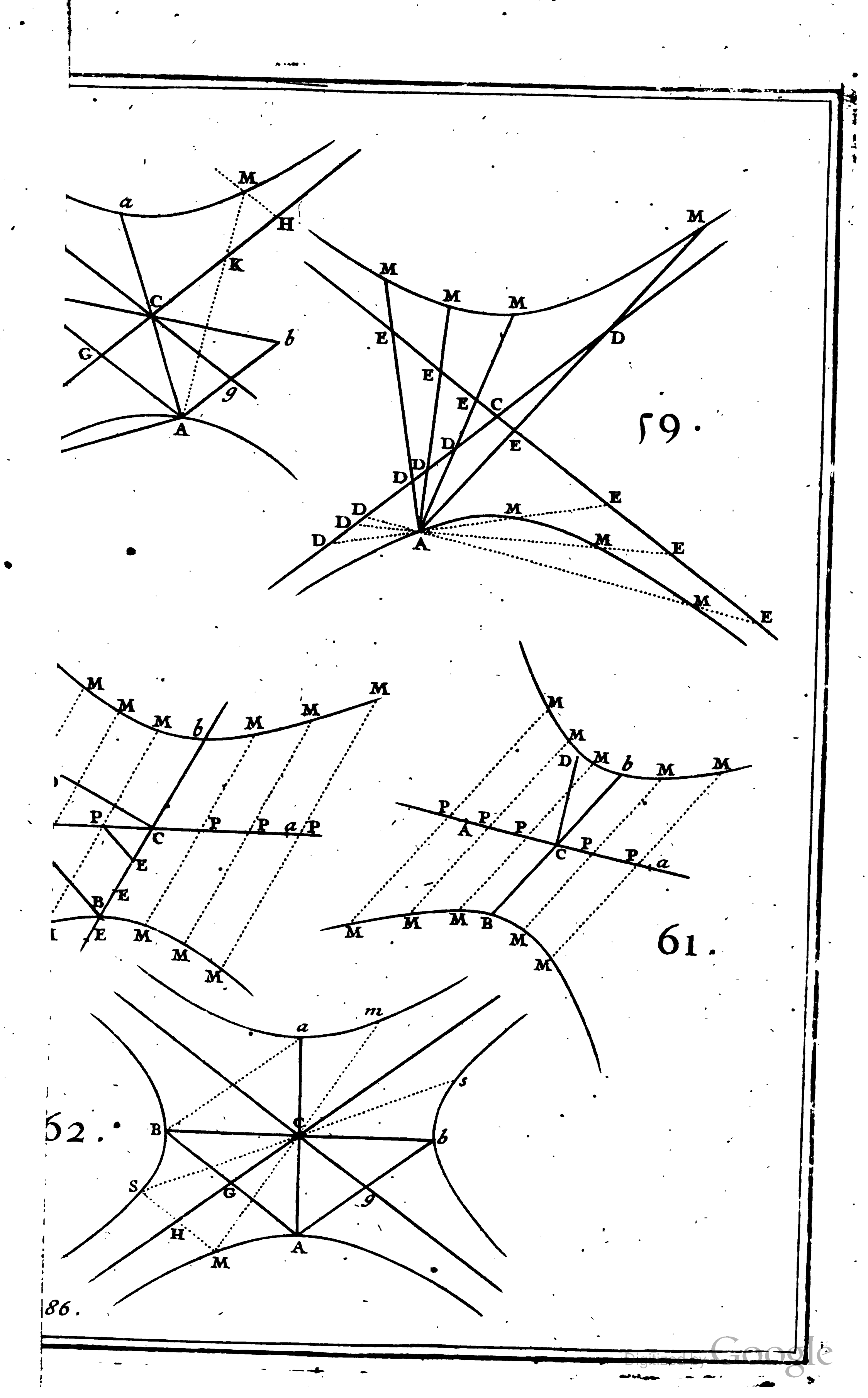
134. SI l'on mene des points M, S, des deux Hyperboles AM, BS, les diametres MCm, SCs, terminés par les deux autres Hyperboles am, bs; il est clair * que le diametre Ss sera le second diametre conjugué au premier Mm des deux Hyperboles opposées AM, am; & réciproquement que le diametre Mm sera le second diametre conjugué au premier Ss des deux Hyperboles opposées BS, bs. D'où l'on voit que deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss, de deux Hyperboles opposées AM, am, sont aussi deux diametres conjugués des deux autres Hyperboles BS, bs, qui leur sont conjuguées; avec cette difference que le premier diametre Mm devient le second, & qu'au contraire le second Ss devient le premier.

* Art. 114.

COROLLAIRE II.

135. DE LA il est manifeste que les Hyperboles conjuguées BS, bs, aux deux AM, am, passent par les extremités S, s, de tous les seconds diametres SCs de ces Hyperboles : & réciproquement que les Hyperboles AM, am, passent par les extremités M, m, de tous les seconds diametres MCm des deux Hyperboles BS, bs, qui leur sont conjuguées.




59.
61.
62.
M
a
H
K
C
b
G
g
A
D
E
P
B
m
s
S
86.

LIVRE QUATRIE'ME.

Des trois Sections Coniques.

DE'FINITION.

ON entend par le terme general de *Section Conique*, chacune des trois lignes Courbes dont l'on vient de parler dans les Livres précedens; sçavoir, la *Parabole*, l'*Ellipse*, l'*Hyperbole* ou les *Hyperboles opposées*.

PROPOSITION I.

Theorême.

136. SI *par l'extremité* A *d'un diametre quelconque* Aa *d'une Ellipse, ou d'un premier diametre* Aa *d'une Hyperbole, l'on mene une parallele* AG *à ses ordonnées* PM, *qui soit égale à son parametre; & qu'on tire de l'autre extremité* a, *la droite* aG, *qui coupe en* O *une ordonnée quelconque* PM *prolongée s'il est necessaire: je dis que le quarré de l'ordonnée* PM *est égal au rectangle de* AP *par* PO. FIG. 63. & 64.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 = AP \times PO$.

Selon les articles 41 & 55. du second Livre, 81. & 118. du troisiéme, on aura $Aa.\ AG :: AP \times Pa.\ \overline{PM}^2$. Or à cause des triangles semblables aAG, aPO, il vient $Aa.\ AG :: Pa.\ PO :: AP \times Pa.\ AP \times PO$. Donc $\overline{PM}^2 = AP \times PO$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

137. DE-LA il est évident que le quarré d'une ordonnée quelconque *PM* à un diametre *Aa*, est toûjours moindre dans l'Ellipse, & toûjours plus grand dans l'Hyperbole, que le rectangle fait du parametre *AG*

par la partie *AP* de ce diametre, prise entre son origine ou extremité *A*, & la rencontre *P* de l'ordonnée; au lieu que dans la Parabole * ils sont égaux. Or c'est à cause de cette proprieté, que Apollonius, surnommé le *Grand Geometre*, a imposé aux Sections Coniques les noms que nous avons marqués : car il a voulu donner à entendre par celui de *Parabole*, la justesse ou exactitude; par celui d'*Ellipse*, le défaut ou manquement; & par celui d'*Hyperbole*, l'excès qui se trouve dans la comparaison des quarrés des ordonnées *PM* avec les rectangles correspondans *AP* × *AG*.

* Art. 7. & 20.

Fig. 65.

PROPOSITION II.

Theorême.

Fig. 66. & 67.

138. DANS *une Ellipse tout diametre* Aa, *& dans les Hyperboles opposées tout premier diametre* Aa *est divisé en deux également par le centre* C, *& ne rencontre la Section qu'en deux points.*

On a démontré cette Proposition dans les articles 50 du second Livre; 96 & 103 du troisiéme.

PROPOSITION III.

Theorême.

139. IL *ne peut y avoir qu'une seule tangente* LAL *qui passe par un point donné* A *sur une Section Conique.*

Cette Proposition se trouve démontrée dans les articles 21 du Livre premier; 56 du Livre second; & 107 du troisiéme.

PROPOSITION IV.

Theorême.

140. LES *tangentes* LAL, lal, *qui passent par les extremités* A, a, *d'un diametre quelconque d'une Ellipse, ou de deux*

deux Hyperboles opposées ; sont paralleles entr'elles.

Ceci a été démontré dans les articles 44 & 55 du Livre second ; & 110 du Livre troisiéme.

PROPOSITION V.

Theorême.

141. U*N diametre quelconque étant donné dans l'Ellipse ou dans les Hyperboles opposées ; je dis que la position du diametre qui lui est conjugué, est déterminée de maniere qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.*

Car 1°. Si la Section est une Ellipse, ou qu'étant les Hyperboles opposées le diametre donné *Aa* soit un premier diametre ; il est clair selon l'article 56 du Livre second, & la définition 13[e] du troisiéme Livre, que son conjugué *Bb* sera parallele à la tangente *LAL*, qui passe par l'une de ses extremités *A*. Donc * &c. * *Art.* 139.

2°. Si la Section étant les deux Hyperboles opposées, le diametre donné *Bb* est un second diametre ; la chose a été démontré dans l'article 115 du troisiéme Livre.

COROLLAIRE.

142. IL est donc évident qu'une Section Conique étant donnée avec un de ses diametres, la position des ordonnées à ce diametre, sera déterminée de maniere que chacune n'en peut avoir qu'une seule, & qu'elles sont toutes paralleles entr'elles. Car elles doivent être paralleles dans la Parabole * à la tangente qui passe par l'origine du diametre donné, & dans les autres * Sections au diametre conjugué au diametre donné. * *Art.* 21. * *Def.* 12, II. & 14, III.

PROPOSITION VI.

Theorême.

143. D*ANS une Ellipse tout diametre* A a, *& dans les Hyperboles opposées tout premier diametre* A a, *divise la Section en des portions* A M, a m, *qui étant prises de part*

M.

& d'autre de ce diametre dans des positions contraires ; sont parfaitement semblables & égales entr'elles.

Car ayant pris sur le diametre *Aa* (prolongé lorsqu'il s'agit des Hyperboles opposées,) de part & d'autre du centre *C* deux parties quelconques *CP*, *Cp*, égales en-
* *Art.* 45. 55. 85. & 118. tr'elles ; & mené de part & d'autre les ordonnées *PM*, *pm*, il est clair que ces ordonnées sont * égales entr'elles,
* *Art.* 142. & que les angles *CPM*, *Cpm*, sont * egaux. Si donc l'on conçoit que le plan *Cpm* separé de celui qu'on voit ici, soit placé de l'autre côté du diametre *Aa* dans une position contraire, en sorte que la droite *Cp* tombe sur *CP*, & *pm*, sur *PM* ; il est visible que le point *a* tombe-
* *Art.* 138. ra * sur le point *A*, & le point *m* sur le point *M*. Et comme cela arrivera toûjours de quelque grandeur qu'on puisse prendre les parties *CP*, *Cp* ; il s'ensuit que tous les points *m* de la portion *am*, tomberont exactement sur tous les points *M* de la portion *AM* ; & qu'ainsi ces deux portions se confondront l'une avec l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 68. 69. 70. 71. 144. S*i l'on mene par un point quelconque* P *d'un diametre* Aa *d'une Section Conique (prolongé lorsque la Section étant une Hyperbole, c'est un premier diametre) une parallele* MPM *aux ordonnées à ce diametre ; je dis qu'elle rencontrera la Section en deux points* M, M, *également éloignés de part & d'autre du point* P, *& non en davantage : Et réciproquement que si une ligne* MM *terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diametre* Aa *en un point* P, *autre que le centre, elle sera parallele aux ordonnées à ce diametre.*

Ceci a été démontré dans les articles 9, 11 & 20 du Livre premier ; 43, 45 & 55 du Livre second ; 83, 85 & 118 du Livre troisiéme.

COROLLAIRE I.

145. DE-LA il est manifeste que si une ligne quelconque *MM* terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diametre *Aa* en un point *P* autre que le centre; toutes les paralleles à cette ligne terminées par la Section, le seront aussi.

PROPOSITION VIII.

Problême.

146. UNE *Section Conique étant donnée, en trouver un diametre.*

Ayant mené deux droites *MM*, *NN*, paralleles entr'elles, & terminées par la Section; on tirera par leurs points de milieu *P*, *Q*, une ligne droite *Aa* qui sera un diametre.

Car * le diametre qui passe par le point *P* milieu de *MM*, doit aussi passer par le point *Q* milieu de *NN*. * *Art.* 145.

COROLLAIRE I.

147. SI l'on mene en même sorte un autre diametre quelconque *Dd*; il est clair que la Section Conique sera une parabole * lorsque *Dd* est parallele à *Aa*; une Ellipse * lorsque *Dd* rencontre *Aa* au dedans de la Section; & enfin une Hyperbole * ou les Hyperboles opposées lorsque les diametres *Dd*, *Aa*, se rencontrent en un point *C* hors de la Section; & dans ces deux derniers cas que le point de rencontre *C* est le centre. Cela est une suite des définitions des diametres de ces trois lignes courbes. * *Def.* 7. I. * *Def.* 9. II. * *Def.* 9. III.

Lorsque l'Ellipse est donnée toute entiere, il suffit pour avoir le centre de mener un diametre *Aa*; car sa grandeur étant déterminée par la rencontre de l'Ellipse, il n'y a * qu'à le diviser par le milieu en *C*. Il en est de même lorsque * les Hyperboles opposées sont données. * *Art.* 90. * *Art.* 96.

COROLLAIRE II.

148. DE-LA il suit qu'une Section Conique étant donnee, avec un point O sur le même plan, on peut toûjours mener un diametre *Dd* qui passe par ce point. Car il ne faut dans la Parabole que mener par le point donné, O une parallele *Dd* à un diametre quelconque *Aa*; & dans l'Ellipse, ou dans l'Hyperbole, ou dans les Hyperboles opposées, une ligne droite *Dd* qui passe par le point donné O, & par le centre *C* que l'on aura trouvé par le Corollaire precedent.

COROLLAIRE III.

149. DE LA il est évident qu'une ligne droite *MM*, ne peut rencontrer une Section Conique qu'en deux points *M*, *M*; & jamais en davantage. Car si l'on mene par le point de milieu *P* de la ligne *MM* un diametre *Aa*, il est clair selon l'article 144, qu'elle sera parallele aux ordonnées à ce diametre; d'où il suit selon le même article qu'elle ne peut rencontrer la Section qu'aux deux points *M*, *M*.

Si la ligne droite passoit par le centre *C*; on auroit recours à l'article 138. où cela a déja été demontré.

COROLLAIRE IV.

150. UNE Ellipse ou une Hyperbole (*fig.* 69 70) étant donnée; trouver deux de ses diametres conjugués *Aa*, *Bb*; & de plus mener les asymptotes *CG*, *Cg*, lorsque c'est une Hyperbole.

Ayant trouvé un diametre *Aa* par le moyen des deux paralleles *MM*, *NN*, & mené par le centre *C* une parallele *Bb*, à ces deux lignes: il est clair* que les diametres *Aa*, *Bb*, seront conjugués; puisque les lignes *MM*, *NN*, étant coupées en deux également par le diametre *Aa* aux points *P*, *Q*, seront* ordonnées de part & d'autre à ce diametre.

* *Def.* 12, II. & 14, III.

* *Art.* 144.

Maintenant pour mener (*fig.* 70.) les asymptotes CG, Cg; on fera $AP \times Pa . \overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 . \overline{CB}^2$ ou $\overline{Cb}^2$. ou (ce qui est la même chose) comme la moyenne proportionnelle entre AP, Pa, est à PM, de même CA est à CB ou Cb. Et ayant tiré les droites AB, Ab, on leur menera par le centre C les paralleles indéfinies Cg, CG, qui seront les asymptotes cherchées. Car il est clair que Bb sera * la grandeur du second diametre conjugué au premier Aa; & le reste est évident selon les définitions 13 & 14 du troisiéme Livre. * *Art.* 81. & 118.

PROPOSITION IX.

Problême.

151. UNE *Section Conique étant donnée, avec un de ses diametres* A a; *trouver la position des ordonnées* P M *à ce diametre.*

Ayant mené deux paralleles au diametre donné Aa, qui en soient également éloignées de part & d'autre, & qui rencontrent la Section en des points M, M; je dis que la ligne MM qui coupe le diametre donné au point P, est ordonnée de part & d'autre à ce diametre, pourvû que le point P ne tombe point sur le centre. FIG. 68. 69. 70. 71.

Car par la construction la ligne MM sera coupée en deux également par le diametre Aa au point P; & par conséquent elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre. * *Art.* 144.

On peut toûjours par cette maniere trouver la position d'une ordonnée PM à un diametre donné Aa. Car 1°. Dans la Parabole & l'Hyperbole (*fig.* 68. & 70.) lorsque le diametre donné Aa est un premier diametre; il est clair qu'à quelque distance qu'on mene de part & d'autre les deux paralleles au diametre Aa, elles rencontreront chacune la Section en un point M; puisque * la Section s'eloigne toûjours de plus en plus à l'infini du diametre Aa. 2°. Dans l'Ellipse (*fig.* 69.), & dans les Hyperboles opposées (*fig.* 71.) lorsque le diametre donné * *Art.* 10. 20. 84. & 118.

Aa est un second diametre : il est clair qu'on peut toûjours mener deux paralleles de part & d'autre du diametre *Aa*, qui coupent la Section chacune en un point *M*, en sorte que la ligne *MM* rencontre le diametre donné *Aa* en un point *P* autre que le centre ; puisque dans l'Ellipse * les ordonnées du diametre *Aa* vont toûjours en diminuant depuis le centre *C* jusqu'en *A*, & qu'au contraire dans les Hyperboles opposées * elles vont toûjours en augmentant à mesure qu'elles s'éloignent du centre *C*.

* *Art.* 44. & 55.
* *Art.* 84. & 118.

COROLLAIRE I.

152. DE-LA on tire (*fig.* 68, 69, 70.) une nouvelle maniere de mener une tangente par un point donné *A* sur une Section Conique donnée. Car * ayant mené par ce point un diametre *Aa*, & trouvé une double ordonnée *MPM* à ce diametre ; il est clair * que si l'on mene par le point *A* une parallele à *MM*, elle sera tangente en *A*.

* *Art.* 148.
* *Art.* 10, 20, 44, 55, 84, 118. & *Def.* 9, I. 12, II. 7, III.

COROLLAIRE II.

153. DE-LA on voit encore comment une Ellipse ou les Hyperboles opposées (*fig.* 69, 70, 71.) étant données avec un de leurs diametres quelconques *Aa* ; on peut trouver le diametre *Bb* qui lui est conjugué. Car il n'y a qu'à mener par le centre *C* une parallele *Bb* aux ordonnées à ce diametre.

Ou bien ; soit *Bb* le diametre donné, & qu'il faille trouver son conjugué *Aa*. Ayant tiré *MM* parallele à *Bb* & terminée par la Section, on menera par son point de milieu *P*, & le milieu *C* de *Bb*, le diametre cherché *Aa*.

COROLLAIRE III.

154. UNE Hyperbole *MAM* (*fig.* 70.) étant donnée, avec un de ses seconds diametres *Bb* de position ; en terminer la grandeur, & trouver en même temps la position de ses ordonnées.

On cherchera le premier diametre Aa conjugué au second Bb, par le moyen de la seconde maniere du Corollaire précedent ; & ayant fait $AP \times Pa$, $\overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 . \overline{CB}^2$ ou $\overline{Cb}^2$. Il est clair * que Bb sera la grandeur du second diametre Bb, & que ses ordonnées seront paralleles au diametre Aa. * Art. 82. & 118.

PROPOSITION X.

Problême.

155. D'UN *point donné* T *hors une Section Conique donnée, mener deux tangentes* TM, TM, *à cette Section.* FIG. 72. 73. 74.

POUR LA PARABOLE.

Ayant mené (*fig.* 72.) par le point donné T * un diametre qui rencontre la Parabole au point A, & pris sa partie AP égale à AT ; on tirera par le point P * une parallele aux ordonnées qui rencontrera * la Parabole en deux points M, M ; par lesquels & par le point donné T on tirera les droites TM, TM, qui seront * les tangentes cherchées. * Art. 148. * Art. 151. * Art. 144. * Art. 22. & 23.

POUR L'ELLIPSE.

Ayant mené (*fig.* 73.) par le point donné T * le diametre Aa, & pris CP troisiéme proportionnelle à CT, CA ; on menera par le point P, une parallele aux ordonnées qui rencontrera * l'Ellipse en deux points M, M ; par lesquels & par le point donné T on tirera les droites TM, TM, qui seront * les tangentes cherchées. * Art. 148. * Art. 144. * Art. 57. & 58.

POUR L'HYPERBOLE & LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

Ayant mené (*fig.* 74.) par le point donné T, * le diametre Aa, dont on déterminera la grandeur * s'il est un second diametre ; on prendra CP troisiéme proportion- * Art. 148. * Art. 154.

nelle à CT, CA (du même côté du point donné T, par rapport au centre, lorsque ce point tombe dans l'un des angles faits par les asymptotes ; & du côté opposé, lorsqu'il tombe dans l'un des angles à côté) : & l'on menera par le point P une parallele aux ordonnées qui ren-
*Art. 144. contrera * l'Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux points M, M ; par lesquels & par le point donné
*Art. 121. T, on tirera les droites TM, TM, qui seront * les tangentes cherchées.

Si le point donné tomboit sur le centre C, les deux
*Art. 108. tangentes seroient alors * les asymptotes CG, Cg, & on les tireroit comme l'on a enseigné dans l'art. 150. Et enfin si le point donné tomboit sur une asymptote comme en S, on tireroit par le point H milieu de CS, une parallele
*Art. 104. HM à l'autre asymptote CG, laquelle rencontreroit * l'Hyperbole en un point M, par où & par le point don-
*Art. 107. né S, on tireroit une droite SM qui seroit * une des tangentes cherchées ; & l'autre seroit l'asymptote même Cg sur laquelle se trouve le point donné S.

COROLLAIRE I.

156. COMME la ligne MPM parallele aux ordon-
*Art. 144. nées rencontre toûjours * la Section en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage ; il s'ensuit qu'on ne peut mener d'un point donné T hors une Section Conique que les deux tangentes TM, TM. D'où il est évident que le diametre qui passe par le point de rencontre T de deux tangentes, coupe par le milieu en P la ligne MM qui joint les points touchans ; & réciproquement que le diametre qui coupe par le milieu en P une ligne droite MM qui joint les points touchans de deux tangentes MT, MT, passe par leur point de rencontre T.

COROL. II.

COROLLAIRE II.

157. TOUTES les tangentes de la Parabole (*fig.* 72.) se rencontrent deux à deux, étant prolongees autant qu'il est necessaire. Car si l'on joint deux points touchans quelconques *M*, *M*, par une ligne droite, & qu'après l'avoir coupée par le milieu en *P*, on prenne sur le diametre qui passe par ce point, & qui rencontre la Parabole en *A*, la partie *AT* egale à *AP*; il est clair que les deux tangentes *MT*, *MT*, qui passent par les points *M*, *M*, se rencontreront en ce point *T*.

COROLLAIRE III.

158. IL est encore évident (*fig.* 74.) que toutes les tangentes d'une Hyperbole se rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il est necessaire; & toûjours au dedans de l'angle fait par les asymptotes. Car si l'on joints deux points touchans quelconques *M*, *M*, par une ligne droite, & qu'après l'avoir coupée par le milieu en *P*, on prenne sur le diametre qui passe par ce point & qui rencontre l'Hyperbole en *A*, la partie *CT* troisiéme proportionnelle à *CP*, *CA*; il est clair que les deux tangentes *MT*, *MT*, se rencontreront en ce point *T*, lequel sera toûjours * au dedans de l'angle fait par les asymptotes, puisque le demi-diametre *CA* tombe au dedans de cet angle. * *Art.* 103.

COROLLAIRE IV.

159. TOUTES les tangentes d'une Ellipse ou des Hyperboles opposées (*fig.* 73. 74.) se rencontrent deux à deux, lorsque la ligne qui joint les deux points touchans ne passe point par le centre: sçavoir, celles de l'Ellipse du même côté du centre par rapport à cette ligne, & celles des Hyperboles opposées de l'autre côté. Cela se prouve par le moyen de la Proposition cy-dessus,

comme l'on vient de faire voir dans les deux Corollaires précedens.

PROPOSITION XI.

Problême.

160. *UNE Section Conique étant donnée, en trouver un diametre qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à un angle donné.*

POUR LA PARABOLE.

* *Art.* 146. Ayant trouvé * un de ses diametres *AP*, on menera
FIG. 75. 76. par son origine *A*, la ligne *AN*, qui fasse avec *AP* de part ou d'autre l'angle *PAN* égal à l'angle donné, & qui rencontre la Parabole au point *N*. Ayant divisé *AN* par le milieu en *O*, & tiré *OM* parallele à *AP*; je dis que la ligne *MO* est le diametre qu'on cherche.

Car 1°. Tous les diametres d'une Parabole devant être paralleles entr'eux, selon la définition septiéme du premier Livre, il s'ensuit que *MO* sera un diametre; puisque *AP* en est un.

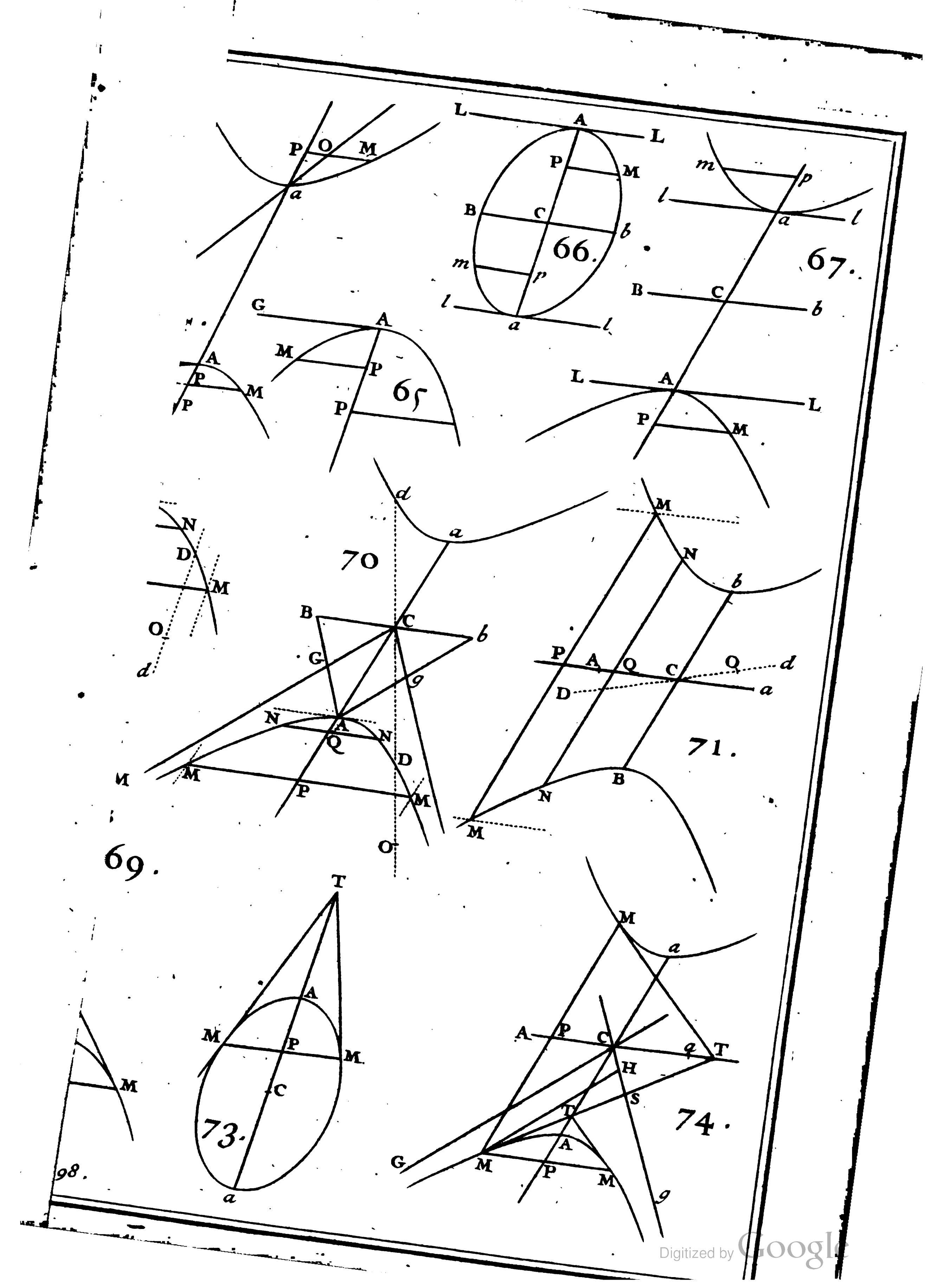
2°. La ligne *AN* terminée par la Parabole étant coupée en deux parties égales par le diametre *MO*, elle lui
* *Art.* 144. sera * ordonnée de part & d'autre.

3°. A cause des paralleles *MO*, *AP*, l'angle *MOA* que fait le diametre *MO* avec son ordonnée *OA*, sera égal à l'angle *PAN* qui a été fait égal à l'angle donné. Donc &c.

Si l'angle donné est droit, il est manifeste que le dia-
* *Art.* 23. metre *MO* qu'on trouvera par cette methode sera * l'axe de Parabole.

POUR LES AUTRES SECTIONS.

* *Art.* 146. Ayant trouvé * un de leurs diametres *Aa*, & décrit
FIG. 77. 78. sur ce diametre de part ou d'autre un arc de cercle *ANa*
79. 80. capable de l'angle donné ou de son complement à deux droits; on menera du point *N* où il rencontre la Sec-



66.
67.
65
70
69.
71.
73.
74.
98.

tion aux deux extremités A, a, du diametre Aa, les lignes NA, Na; par les milieux desquelles O, Q, & par le centre C, on tirera deux diametres, Mm, Ss. Je dis que chacun de ses diametres fera de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à l'angle donné.

Car la ligne AN terminée par la Section, étant coupée en deux également au point O par le diametre Mm, elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre. Or le diametre Mm est parallele à la ligne Na, puisqu'il divise par le milieu aux points C, O, les lignes Aa, AN; & partant l'angle mOA que fait le diametre Mm avec son ordonnée AO, sera égal à l'angle ANa, qui par la construction est égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. On prouvera de même que le diametre Ss fait avec son ordonnée QN un angle égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. Donc &c. *Art. 144.

Il est visible 1°. Que le diametre Ss est * conjugué au diametre Mm; puisqu'il est parallele à son ordonnée ON. 2°. Que les diametres conjugués Mm, Ss, deviennent * les deux axes, lorsque l'angle donné est droit. *Def. 12. II. & 14. III. *Art. 58. & 128.

PROPOSITION XII.

Problême.

161. Un *diametre d'une Section Conique étant donné, avec son parametre, & la position de ses ordonnées, & sçachant de plus si c'est un premier ou second diametre lorsqu'il s'agit de l'Hyperbole; décrire la Section par une methode uniforme pour toutes les trois.*

PREMIERE MANIERE.

1° *Pour la Parabole.* Ayant trouvé * l'axe AP, son origine A, & son parametre AG que l'on prendra sur l'axe prolongé du côté de son origine; on menera par le point G une ligne droite indéfinie DD perpendiculaire à PG. *Art. 27. FIG. 81.

On fera mouvoir ensuite une ligne droite indéfinie *DM* le long de *GD* toûjours parallelement à *AG*, en entraînant par son extremité *D* le côté *DA* de l'angle droit *DAM*, mobile sur son sommet *A* autour de l'origine *A* de l'axe *AP*. Je dis que l'intersection continuelle *M* de la ligne *DM* & du côté *AM*, décrira dans ce mouvement la Parabole qu'on demande.

Car menant *MP* perpendiculaire à l'axe, les triangles rectangles *AGD*; *MPA*, seront semblables; puisque chacun des angles *GAD*, *PMA*, étant joint à l'angle *PAM*, vaut un droit. On aura donc *AG*. *GD* ou *PM* :: *PM*. *AP*. D'où il suit que $\overline{PM}^2 =$ *GA* × *AP*; & qu'ainsi *PM* est une * ordonnee à l'axe *AP*.

* *Art.* 7.

On a déja donné cette construction dans le Livre premier article 29, d'une maniere qui convient à tous les diametres : On ne la repete ici, & on ne la restraint à l'axe, que pour en faire voir la liaison & le rapport qu'elle a avec celle qu'on va donner pour les autres Sections.

Pour les autres Sections. Ayant trouvé entre le diametre donné & son parametre une moyenne proportionnelle, & l'ayant placée en sorte qu'elle soit parallele aux ordonnées, & coupée en deux également par le centre; il est clair * qu'on aura deux diametres conjugués; par le moyen desquels on cherchera * les deux axes, & ensuite le parametre de celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse, & du premier dans l'Hyperbole. Cela fait.

* *Def.* 13. II. & 15. III.
* *Art.* 64. & 128.

FIG. 82. 83. On prolongera dans l'Ellipse, & on coupera dans l'Hyperbole l'axe *Aa* en *G*; en sorte que *aG* soit à *GA*, comme l'axe *Aa* est à son parametre. Ayant tiré par le point *G* une perpendiculaire indéfinie *DD* à l'axe *Aa*, on fera mouvoir le point *D* le long de cette ligne, en entraînant avec lui la ligne droite *Da* mobile autour de l'extremité *a* de l'axe *Aa*, & le côté *DA* de l'angle droit *DAM* mobile sur son sommet *A* autour de l'autre extremité *A* de l'axe *Aa*. Je dis que l'intersection

continuelle M des lignes AM, aD, décrira dans ce mouvement la Section requise.

Car menant MP perpendiculaire sur l'axe Aa, les triangles semblables aPM, aGD, donnent $aP. PM :: aG. GD$. Or les triangles rectangles AGD, MPA, sont semblables ; puisque chacun des angles GAD ; PMA ; étant joint à l'angle PAM, vaut un droit ; Et partant $AP. PM :: GD. GA$. Si donc l'on multiplie les Antecedens & les Consequens des deux premieres raisons, par ceux de ces deux dernieres ; on aura $aP \times PA. \overline{PM}^2 :: aG \times GD. GD \times GA :: aG. GA$, c'est à dire, comme l'axe Aa est à son parametre. Donc * &c. * Art. 41. & 81.

Il est à remarquer que plus le point D s'éloigne du point G sur la ligne DD ; plus l'angle PaM augmente, & plus au contraire l'angle PAM diminuë ; de sorte que les lignes aM, AM, deviennent paralleles dans l'Hyperbole, & se coupent ensuite de l'autre côté de la ligne DD, où elles décrivent par leur intersection continuelle l'Hyperbole opposée.

Si l'on conçoit dans l'Ellipse & dans l'Hyperbole, que le point a s'éloigne à l'infini du point A, ou (ce qui est la même chose) que l'axe Aa devienne infiniment grand ; les lignes GA, Da, qui ne se rencontrent que dans l'infini, peuvent être regardées comme paralleles : ainsi cette derniere construction retombe dans le cas de la précédente. C'est pourquoi l'Ellipse ou l'Hyperbole deviendroit alors une Parabole qui auroit pour parametre la ligne AG ; & par consequent on peut regarder une Parabole, comme une Ellipse ou une Hyperbole dont l'axe est infini : sçavoir, le premier dans l'Hyperbole, & celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse.

SECONDE MANIERE.

Pour la Parabole. Soit un triangle isoscelle HAL, FIG. 84. dont l'un des côtés AH soit situé sur le diametre donné AP prolongé indéfiniment de part & d'autre de son

origine A, & l'autre côté AL ſur la tangente indéfinie LAL qui paſſe par le point A. Soit conçûë ſa baſe HL ſe mouvoir toûjours parallelement à elle même en entraînant par l'une de ſes extremités L la ligne indefinie LM parallele à AP, & par l'autre extremité H la ligne HF parallele à AL & égale au parametre donné du diametre AP, laquelle entraîne auſſi par ſon extremité F la droite FA mobile autour du point fixe A. Je dis que l'interſection continuelle M des deux droites FA, LM, décrit pendant que la ligne HL ſe meut dans l'angle HAL & ſon oppoſé ou ſommet, la Parabole MAM qu'on demande.

Car menant l'ordonnée MP au diametre AP, les triangles ſemblables AHF, APM, donnent AH ou AL ou $PM.\ HF :: AP.\ PM$, & prenant $\overline{PM}^2 = AP \times HF$. Donc * &c.

*Art. 7. & 20. On doit obſerver que le point H doit tomber au delà de l'origine A du diametre AP; lorſque les points F, L, tombent de part & d'autre de ce diametre.

FIG. 85 86. *Pour les autres Sections.* La conſtruction eſt la même que pour la Parabole, à l'exception que la ligne LM doit tourner autour de l'autre extremité a du diametre donné Aa; au lieu que dans la Parabole elle lui eſt parallele. On ſuppoſe dans l'Hyperbole que le diametre donné eſt un premier diametre; car ſi c'étoit un ſecond, on trouveroit ſelon l'article 115 du Livre troiſiéme, le premier qui lui eſt conjugué & ſon parametre.

Car menant MP ordonnée au diametre Aa, les triangles ſemblables aPM, aAL, & APM, AHF, donnent $aP.\ PM :: aA.\ AL$ ou AH. Et $AP.\ PM :: AH.\ HF$. Et partant, ſi l'on multiplie les Antecedens & les Conſequens des deux premieres raiſons par ceux des deux ſecondes, on aura $aP \times PA.\ \overline{PM}^2 :: aA \times AH.\ AH \times HF :: aA.\ HF$. Donc * &c.

*Art. 41. 55. 81. & 118. Il faut obſerver que les points H, a, doivent tomber de part & d'autre du point A dans l'Ellipſe, & du même côté dans l'Hyperbole, lorſque les points F, L, tom-

bent de part & d'autre du diametre Aa.

COROLLAIRE I.

162. DE LA on voit comment un diametre Aa étant donné avec une de ses ordonnées PM ; on peut trouver son parametre HF. Car 1°. Dans la Parabole on prendra sur le diametre AP la partie AH égale à PM ; & ayant tiré la ligne HF parallele à PM, & terminée en F par la ligne AM tirée de l'origine A du diametre par l'extremité M de l'ordonnée ; il est clair que cette ligne HF sera le parametre du diametre AP. FIG. 84.

2°. Dans les autres Sections, on menera par l'une des extremités a du diametre donné Aa la ligne aM qui rencontre la tangente AL, qui passe par l'autre extremité A, au point L ; & ayant pris sur le diametre Aa la partie AH égale à AL, on tirera HF parallele à PM, laquelle rencontrant en F la ligne AM, sera le parametre du diametre Aa. FIG. 85. 86.

COROLLAIRE II.

163. ON tire de la seconde maniere qu'on vient d'expliquer, une methode uniforme & trés-exacte dans la pratique de décrire une Section Conique par plusieurs points. La voici dans l'Ellipse : & elle servira de Regle pour les autres Sections.

Ayant pris sur la tangente AL, qui passe par l'une des extremités A du diametre donné Aa, la partie AG égale à son parametre, & mené une parallele indéfinie GF à Aa ; on tirera librement par le point A autant de lignes droites AF, AF, &c. qu'on voudra. Ayant pris sur la tangente indéfinie AL, les parties AL, AL, &c. égales aux correspondantes GF, GF, &c. & mené les droites aL, aL, &c ; je dis que les intersections M, M, &c. des droites correspondantes FA, La, FA, La, &c. seront des points de l'Ellipse qui a pour diametre la ligne Aa, pour tangente la ligne AL, & pour parametre du FIG. 87.

diametre *Aa* la ligne *AG*. Cela est visible en menant *FH* parallele à *AG*, & tirant la ligne *HL* par le point *L* correspondant au point *F*. Car le triangle *HAL* sera isoscelle; puisque * *AL* est égale à *GF* ou *AH*, & *HF* sera égale au parametre du diametre *Aa*: c'est pourquoi cette construction retombe dans celle de la seconde des deux maniéres précedentes.

* *Hyp.*

Comme les lignes *GF*, *AL*, deviennent fort grandes, lorsqu'il s'agit de trouver des points *M* qui soient proches du point *a*; on pourra se servir, pour trouver ces points, de la tangente *al* qui passe par l'autre extremité *a* du diametre *Aa*, & de la ligne *gf* parallele à *Aa*, comme l'on voit dans cette figure.

Si l'on mene les ordonnées *MP*, *MP*, &c paralleles à la tangente *AL*, & qu'on les prolonge de l'autre côté du diametre *Aa* en *M*, *M*, &c. en sorte qu'elles soient coupées chacune en deux également par ce diametre; il est clair * que ces nouveaux points *M*, *M*, &c. seront encore à la même Ellipse.

* *Art.* 43.

On pourroit se servir d'une même ouverture de compas *GF* ou *AL* pour marquer sur les lignes *GF*, *AL*, autant de points *F*, *F*, &c, *L*, *L*, &c, qu'on voudra; car par ce moyen toutes ces petites parties étant egales entr'elles, chaque *GF* seroit égale à la correspondante *AL*; ce qui est le fondement de la démonstration.

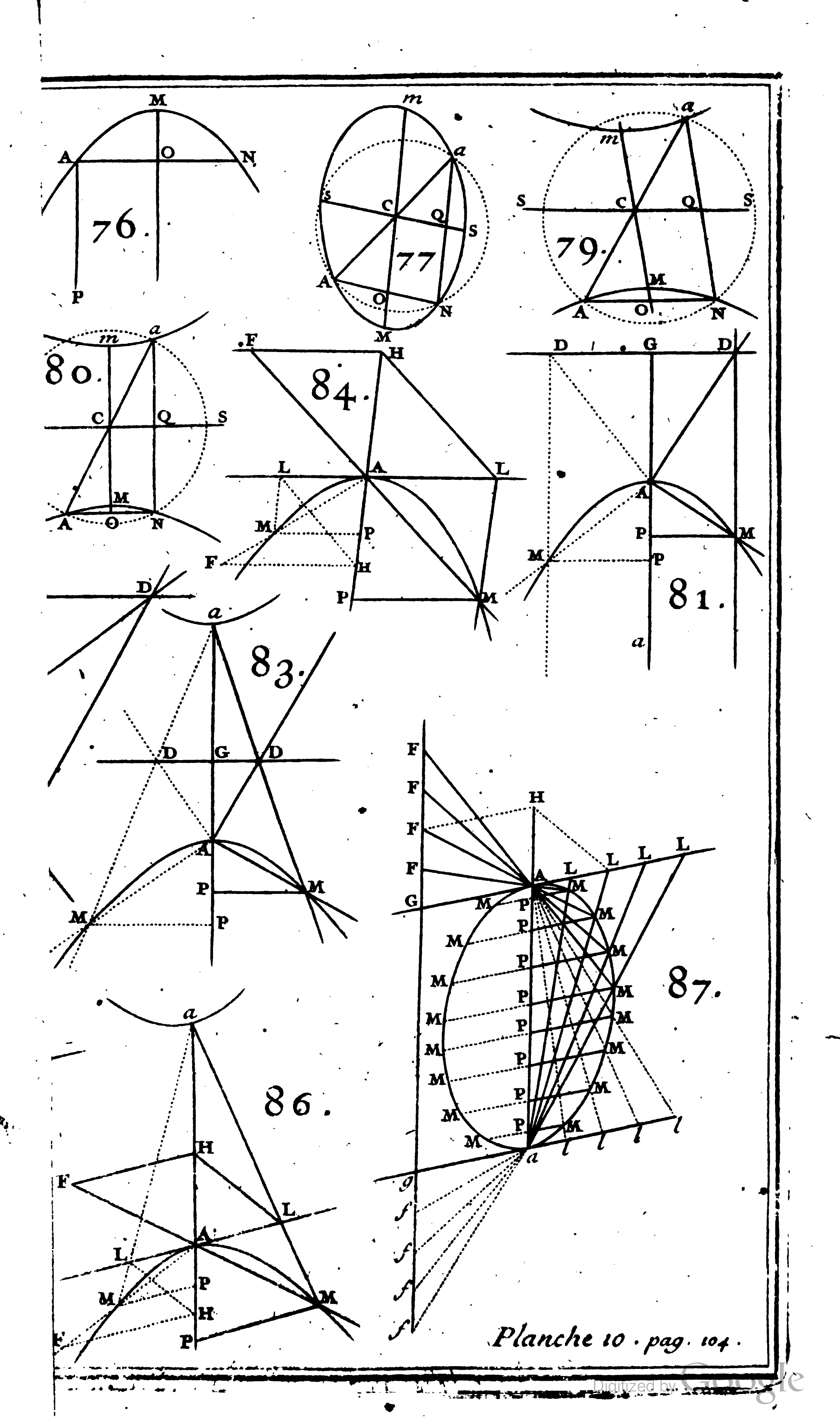
PROPOSITION XIII.

Theorême.

FIG. 88. 89. 90. 91.

164. S'IL *y a deux droites* MN, AR, *terminées par une Section Conique, lesquelles se rencontrent en un point* P, *& qui soient paralleles à deux droites données de position; je dis que le rectangle* MP × PN *sera toûjours au rectangle* AP × PR *en raison donnée en quelque endroit de la Section que puissent tomber les droites* MN, AR.

POUR


76.
77.
79.
80.
84.
81.
83.
86.
87.
Planche 10 . pag. 104 .

POUR LA PARABOLE.

Soient (*fig.* 88.) les tangentes CB, EB, qui se rencontrent au point B, paralleles aux droites MN, AR: je dis que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{CB}^2 . \overline{EB}^2$.

Car ayant mené * par le point G milieu de MN le diametre CG, & tiré par son origine C la parallele CB à MN; il est clair * qu'elle sera tangente en C. On menera de la même sorte la tangente EB parallele à AR, que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre le diametre CG au point K; & tirant par le point touchant E l'ordonnée EL, on aura * $KC = CL$; & par consequent $KB = BE$. On tirera ensuite AD ordonnée, & AF parallele au diametre CG, & on nommera les données KB ou BE, m; BC, n; CK, e; le parametre CH du diametre CG, p; & les indéterminées AP, x; PM, y; AD, r; CD, s.

* Art. 148.

* Art. 10. & 21.

* Art. 22. & 23.

Cela posé, les triangles semblables KBC, APF, donneront $PF = \frac{nx}{m}$, AF ou $DG = \frac{ex}{m}$: Et par consequent $CG = \frac{ex}{m} + s$, GM ou $GN = y + \frac{nx}{m} + r$, PN ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} + 2r$; $MP \times PN = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry$, $\overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$.

Or * $CD\ (s) . CG\ (\frac{ex}{m} + s) :: \overline{AD}^2\ (rr) . \overline{GM}^2 = rr + \frac{err}{ms}x = rr + \frac{ep}{m}x$, puisque $\overline{AD}^2\ (rr) = CD \times CH\ (ps)$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = 0$, qui convient également à tous les points de la Parabole, lorsque la ligne AR tombe au dessus du diametre CG, & que le point d'intersection P tombe entre les points A, R.

* Art. 8. & 20.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = 0$, on aura (en effaçant tous les termes où y se rencontre)

$\frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{et}{m}x = 0$. D'où l'on tire $x = \frac{emt}{nn} - \frac{2mr}{n}$ $= AR$; puiſque PM (y) devenant nulle ou zero, il eſt clair que AP (x) devient AR. Donc $AP \times PR$ $= \frac{emt}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx$; & par conſequent $MP \times PN$ $(yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry)$. $AP \times PR$ $(\frac{emt}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx$ :: $\overline{CB}^2$ (nn). $\overline{EB}^2$ (mm). puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on retrouve l'équation précedente. Or comme les tangentes CB, BE demeurent toûjours les mêmes, en quelque endroit de la Parabole que tombent leurs paralleles MN, AR; il s'enſuit &c.

Il peut arriver differens cas, ſelon les differentes poſitions des droites MN, AR; mais comme la démonſtration demeure toûjours la même, & qu'il ne peut y avoir de changement que dans quelques lignes, ou dans quelques termes qui s'évanoüiſſent, je ne m'arrêterai point à les expliquer en détail. On doit obſerver la même choſe dans les deux autres Sections.

POUR LES AUTRES SECTIONS.

Ayant mené (*fig.* 89. 90. 91.) les deux demi-diametres CO, CB, paralleles aux droites MN, AR; je dis que $MP \times PN$. $AP \times PR$ :: $\overline{CO}^2$. $\overline{CB}^2$.

Soit mené le diametre CG qui ait pour double ordonnée MN, ſur lequel ſoient abaiſſées les droites BE, AD, paralleles à MN; & ayant tiré AF parallele à CG, ſoient nommées les données CB, m; BE, n; CE, e; & le demi-diametre CK, t; ſon demi conjugué CO, c; & les interminées AP, x; PM, y; AD, r; CD, s.

Cela poſé, les triangles ſemblables CBE, APF, donneront $PF = \frac{nx}{m}$, AF ou $DG = \frac{ex}{m}$. Par conſéquent dans l'Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées (*fig.* 90. & 91.) on aura $CG = \frac{ex}{m} + s$, GM ou $GN = y + \frac{nx}{m} - r$, PN ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} - 2r$; $MP \times PN$

$= yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry$, $\overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nn}{mm}xx$
$- \frac{2nr}{m}x + rr$. Or * $\overline{CD}^2 \mp \overline{CK}^2$ $(ss \mp tt)$. $\overline{CG}^2 \mp \overline{CK}^2$ * Art. 82. & 118.
$(\frac{eexx}{mm} \mp \frac{2esx}{m} + ss \mp tt) :: \overline{AD}^2$ (rr). $\overline{GM}^2 = rr$
$+ \frac{eerrxx \mp 2emrrsx}{mmss \mp mmtt} = rr + \frac{eeccxx \mp 2eccmsx}{mmtt}$, en mettant pour $\frac{rr}{ss \mp tt}$ sa * valeur $\frac{cc}{tt}$. Et comparant ensemble ces * Art. 82. & 118.
deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m}y$
$- 2ry + \frac{nntt - ccee}{mmtt}xx - \frac{2nrtt \mp 2ccee}{mtt}x = 0$, dans laquelle mettant à la place de $nntt - ccee$ sa valeur $cctt$ (il faut imaginer l'Hyperbole conjuguée qui passe* par l'extremité B, (lorsque CB est la moitié d'un second diametre) * Art. 134.
tirée de ce que * $\overline{CE}^2 + \overline{CK}^2$ $(ee + tt)$. $\overline{EB}^2$ $(nn) ::$ * Art. 81. & 108.
$\overline{CK}^2$ (tt). $\overline{CO}^2$ (cc), on aura celle-ci $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry$
$+ \frac{cc}{mm}xx - \frac{2nrtt \mp 2cces}{mtt}x = 0$, qui convient à tous les points de la Section, lorsque les points A, R, tombent de part & d'autre du diametre CG, & que le point d'intersection P tombe entre les points A, R.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = 0$, on aura (en effaçant tous les termes où y se rencontre) $\frac{cc}{mm}xx$
$- \frac{2nrtt \mp 2cces}{mtt}x = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{2mnrtt \mp 2ccems}{cctt}$
$= AR$; puisque PM (y) devenant nulle ou zero, il est clair que AP (x) devient AR. Donc $AP \times PR$
$(\frac{2mnrtt \mp 2mcces}{cctt}x - xx)$. $MP \times PN$ $(yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry)$
$:: \overline{CB}^2$ (mm). $\overline{CO}^2$ (cc). Car multipliant les extrêmes & les moyens de cette proportion, on retrouve l'équation précédente. Or comme les demi-diametres CO, CB, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit de la Section que tombent leurs paralleles MN, AR; il s'ensuit &c.

Je ne mets point ici en particulier le calcul pour l'Ellipse,

parce qu'il ne differe de celui de l'Hyperbole qu'en quelques lignes.

COROLLAIRE I.

FIG. 92. 165. S'IL y a deux lignes droites *MN*, *AR*, terminées par une Section Conique, lesquelles se rencontrent en un point *P*; & qu'on mene par tout où l'on voudra deux autres droites *FG*, *HD*, paralleles aux deux premieres, & terminées aussi par la Section, lesquelles se rencontrent en un point *Q*: il est clair que $MP \times PN. AP \times PR :: FQ \times QG. BQ \times QD$. Car les deux droites *AR*, *BD*, étant paralleles entr'elles, seront paralleles à la même droite *CZ* donnée de position; comme aussi les deux droites *MN*, *FG*, à la même droite *CY* donnée pareillement de position.

COROLLAIRE II.

166. S'IL y a deux paralleles *AR*, *BD*, terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent aux points *E*, *Q*, une ligne droite *FG* terminée par la même Section; je dis que $FE \times EG. AE \times ER :: FQ \times QG. EQ \times QD$. Car concevant dans le premier Corollaire que *MN* tombe sur *FG*, il est clair que les rectangles $MP \times PN$, $AP \times PR$, deviennent $FE \times EG$, $AE \times ER$.

COROLLAIRE III. POUR LE CERCLE.

FIG. 93. 167. ON peut tirer de ce Theorême la proprieté du Cercle, qui est si connuë de tous les Geometres; sçavoir que si par un point quelconque *P* pris au dedans ou au dehors d'un cercle, on mene autant de lignes qu'on voudra *AR*, *MN*, *HL*, &c. terminées par la circonference, les rectangles $AP \times PR$, $MP \times PN$, $HP \times PL$, &c. seront tous égaux entr'eux. Car menant les demi-diametres *CB*, *CO*, *CD*, &c. paralleles à ces lignes, il est clair par le Theorême, que tous rectangles seront entr'eux, comme les quarrés de ces demi-diametres ou rayons, lesquels par la proprieté essentielle du cercle sont tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE IV. POUR LA PARABOLE.

168. S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Parabole, & qu'on mene par un des points quelconques A de la Parabole un diametre AF qui rencontre cette ligne au point F : je dis que le rectangle $MF \times FN$ est égal au rectangle de AF par le parametre CH du diametre CG, qui passe par le milieu de MN. FIG. 94.

Car concevant dans le Theorême que AP tombe sur AF, il est clair que la ligne $PF\ (\frac{n}{m}x)$ devient nulle ou zero, & qu'ainsi $\frac{n}{m} = o$. C'est pourquoi effaçant dans l'équation à la Parabole $yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = o$, tous les termes ou $\frac{n}{m}$ se rencontre, on en formera celle-ci $yy + 2ry - \frac{ep}{m}x = o$. Or $AF = \frac{ex}{m}$, $CH = p$, & $MF \times FN = yy + 2ry$. Donc &c.

Ce n'est que pour faire voir la généralité du Theorême, que j'en déduis cette proprieté ; car on la peut démontrer plus aisément sans y avoir recours, en cette sorte. $\overline{GM}^2 = GC \times CH$, $\overline{AD}^2$ ou $\overline{GF}^2 = DC \times CH$, & partant $\overline{GM}^2 - \overline{GF}^2$ ou $MF \times FN = \overline{GC - DC} \times CH = AF \times CH$.

COROLLAIRE V. POUR LA PARABOLE.

169. DE-LA il est évident,

1°. Que s'il y a deux droites MN, EL, terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles ; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de cette Parabole, deux diametres AF, BP, qui rencontrent ces lignes aux points F, P : il est évident, dis-je, que $MF \times FN . EP \times PL :: AF . BP$. Car le diametre CG qui passe par le milieu de MN, passe aussi par le milieu

de EL; & par consequent le rectangle $EP \times PL = BP \times CH$, de même que $MF \times FN = AF \times CH$.

2°. Que s'il y a une ligne droite MN terminée par une Parabole, & qui rencontre deux de ses diametres AF, BK, aux points F, K; on aura $MF \times FN . MK \times KN :: AF . BK$.

3°. Que s'il y a deux lignes droites MN, EL, terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles, qui rencontrent un de ses diametres quelconques BP aux points K, P; on aura $MK \times KN . EP \times PL :: BK . BP$.

COROLLAIRE VI. POUR LA PARABOLE.

170. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole qui passe par trois points donnés A, M, N, & dont les diametres AF, CG, soient paralleles à une ligne droite donnée de position; & démontrer qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

Car ayant mené une ligne MN qui joigne deux des points donnés M, N; on tirera par le troisiéme A un diametre AF parallele à la ligne donnée de position, & qui rencontre la ligne MN au point F, & par le point de milieu G de MN une parallele GC à AF. On fera ensuite $MF \times FN . MG \times GN$. ou $\overline{GM}^2 :: AF . GC$. Et ayant pris CH troisiéme proportionnelle à CG, GM, on décrira * du parametre CH, & du diametre CG dont l'origine est en C, une Parabole dont les ordonnées soient paralleles à MN; elle satisfera à la question.

* Art. 29. & 30.

Car 1°. Elle passera * par les points M, N; puisque par la construction $CH \times CG = \overline{GM}^2$ ou $\overline{GN}^2$. 2°. Elle passera par le point A; puisque $MG \times GN . MF \times FN :: CG . FA$. 3°. Les diametres AF, CG, seront paralleles à la droite donnée de position.

* Art. 7. & 30.

Comme la Parabole qui satisfait au Problême, a necessairement pour diametre la ligne CG, qui a pour origine le point C, & pour parametre la ligne determinée CH; il s'ensuit qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

COROLLAIRE VII. POUR LA PARABOLE.

171. S'il y a deux droites AR, MN, terminées par une Parabole, lesquelles se rencontrent en un point P; & qu'ayant fait $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$, on tire la ligne AF: je dis que cette ligne sera un diametre. Car ayant mené les tangentes CB, EB, paralleles aux droites MN, AR, & par le point touchant C le diametre CG qui rencontre EB prolongée en K; on aura $\overline{EB}^2$ ou $\overline{KB}^2 . \overline{BC}^2 :: AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$, & par consequent $KB. CB :: AP. PF$. Les triangles KBC, APF seront donc semblables, & leurs côtes AF, KC, paralleles entr'eux : d'où il suit que la ligne AF qui se trouve ainsi parallele au diametre CG, sera un diametre ; puisque dans la Parabole * tous les diametres sont paralleles entr'eux. FIG. 88. * Def. 7, I.

COROLLAIRE VIII. POUR LA PARABOLE,

172. On tire du Corollaire précédent une maniére de décrire une Parabole qui passe par quatre points donnés A, M, R, N.

Car ayant joint ces quatre points par deux droites AR, MN, qui s'entrecoupent en un point P, & fait $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$; on tirera la ligne AF, & on décrira * une Parabole qui passe par les trois points A, M, N, & dont les diametres sont paralleles à la ligne AF. Elle sera celle qu'on demande ; car selon le Theorême la ligne AP doit rencontrer cette Parabole en un point R, tel que $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{EB}^2$. ou $\overline{KB}^2 . \overline{BC}^2 :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$. * Art. 170.

Si l'on eut pris le point F de l'autre côté du point P, on auroit décrit une autre Parabole qui auroit encore passé par les quatre points donnés. Mais l'on doit remarquer que lorsqu'un de ces points F tombe sur l'un des FIG. 95.

points donnés M ou N, il ne peut y avoir qu'une Parabole qui satisfasse ; & que lorsque tous les deux tombent sur les points M, N, il n'y en peut avoir aucune : puisqu'alors le diametre AF de la parabole passeroit par deux de ses points, ce que l'on a démontré * être impossible.

* *Art.* 10.

COROLLAIRE IX.

POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

FIG. 96. 97.

173 S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, laquelle rencontre une asymptote CB au point Q, & qui soit parallele à une ligne donnée de position ; & qu'on tire par un point quelconque A de la Section une droite AP parallelle à cette asymptote, & qui rencontre au point P la ligne MN : je dis que le rectangle $MP \times PN$ sera toûjours au rectangle $2AP \times PQ$ en raison donnée, en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN, AP.

Car concevant dans le Theorême (*fig.* 90. 91.) que le demi-diametre CB devienne une asymptote, il est clair * qu'alors les trois côtés du triangle CBE deviennent chacun infini. C'est pourquoi menant (*fig.* 96. 97.) par l'extremité K du diametre LK qui passe par le milieu de MN, une parallele KS à MN, qui rencontre l'asymptote CB en S, on formera un triangle CKS dont tous les côtés seront finis, & qui sera semblable au triangle CBE ; & partant on aura $CK\ (t) . KS$ ou * $CO\ (c)$ :: $CE\ (c) . EB\ (n)$. Ce qui donne $ce = nt$. Si l'on met à la place de ce sa valeur nt dans l'équation à l'Hyperbole $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nntt - ccee}{mmtt}xx - \frac{2nrtt \mp 2cces}{mtt}x = 0$ que l'on a trouvée dans le Theorême, on en formera celle-ci $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry - \frac{2nrt \mp 2ncs}{mt}x = 0$ ou $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry = \frac{2nrt \pm 2ncs}{mt}x$. Or en prolongeant AD, s'il est necessaire,

* *Art.* 102.

* *Art.* 113.

cessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'asymptote CB en H, les triangles semblables CKS, CDH, donneront $CK\ (t).\ KS\ (c) :: CD\ (s).\ DH = \frac{cs}{t}$. Et partant AH ou $PQ = \frac{rt \mp cs}{t}$. On aura donc $MP \times PN$ $(yy + \frac{2cx}{m}y - 2ry).\ 2AP \times PQ\ (\frac{2rt \mp 2cs}{t}x) :: EB\ (n).$ $CB\ (m) :: KS.\ CS$. Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens on retrouve l'équation précédente. Or les lignes KS, CS, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN, AP; parce que le diametre LK qui passe par le milieu de MN, passe aussi * par le milieu de toutes les paralleles à MN terminées par la Section, en quelque endroit qu'elles se rencontrent. Donc &c. * Art. 145.

On peut démontrer ce Corollaire immédiatement, & sans avoir recours au Theorême, en cette sorte. Soient les données $CK = t$, KS ou $CO = c$, $CS = m$, & les indéterminées $CD = s$, AD ou $DI = r$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles semblables CSK, APF, donnent $PF = \frac{cx}{m}$, AF ou $DG = \frac{tx}{m}$; Et partant GM ou $GN = y + \frac{cx}{m} - r$, $CG = \frac{tx}{m} + s$. Or à cause des triangles semblables CKS, CDH, CGQ, on aura $CK\ (t).$ $KS\ (c) :: CD\ (s).\ DH = \frac{cs}{t} :: CG\ (\frac{tx}{m} + s).\ GQ$ $= \frac{cx}{m} + \frac{cs}{t}$. Et partant $MQ \times QN$ ou $\overline{GQ}^2 - \overline{GM}^2$ $= \frac{2ccsx}{mt} + \frac{ccss}{tt} - yy - \frac{2cxy}{m} + 2ry + \frac{2crx}{m} - rr =$ * $AH \times HI$ ou $\overline{DH}^2 - \overline{DI}^2 = \frac{ccss}{tt} - rr$; d'où l'on tire (en effaçant de part & d'autre $\frac{ccss}{tt} - rr$, & transposant d'une part tous les termes où y se rencontre) cette équation $yy + \frac{2cxy}{m}$ $- 2ry = \frac{2ccsx}{mt} + \frac{2crx}{m}$, laquelle étant reduite en proportion, donne $MP \times PN\ (yy + \frac{2cxy}{m} - 2ry).\ 2AP \times PQ$ * Art. 97. Fig. 96.

P

$(\frac{2csx}{t} + 2rx) :: KS (c). CS (m)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

La démonstration est la même pour les Hyperboles opposées à quelques signes près.

COROLLAIRE X.

POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

FIG. 98. 174. Il suit du Corollaire précédent.

1°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles MN, HG, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, & qui rencontrent une asymptote CS aux points Q, I; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section deux paralleles AP, BD, à l'asymptote CS, qui rencontrent ces lignes aux points P, D: les rectangles $MP \times PN$, $2AP \times PQ$ seront entr'eux, comme les rectangles $HD \times DG$, $2BD \times DI$; & partant on aura $MP \times PN. HD \times DG :: AP \times PQ. BD \times DI$.

2°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles MN, HG, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, & qui rencontrent une asymptote CS aux points Q, I; & qu'on mene par un point quelconque A de la Section, une parallele AO à CS, qui rencontre ces lignes aux points P, O: on aura (en concevant dans le cas précédent que BD tombe sur AP) cette proportion, $MP \times PN. HO \times OG :: AP \times PQ. AO \times OI :: AP. PO.$ puisque $PQ = OI$.

3°. Que s'il y a une ligne droite HG terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées; & qui rencontre une asymptote CS en I; & qu'on mene par deux points quelconques de la Section A, B, deux paralleles AO, BD, à CS, qui rencontrent cette ligne aux points O, D: on aura $HO \times OG. HD \times DG :: AO \times OI. BD \times DI$. Cela est encore une suite du premier cas, en concevant que la ligne MN tombe sur HG.

COROLLAIRE XI.

175. Si l'on conçoit qu'une ligne droite BD qui rencontre une Section Conique en deux points B, D, se meuve parallelement à elle-même jusqu'à ce qu'elle rase la Section, c'est à dire, jusqu'à ce qu'elle devienne la tangente LS : il est clair que les deux points d'interfection B, D, se reünissent alors au point touchant L ; & qu'ainsi on peut considerer un point touchant comme deux points d'intersection qui tombent l'un sur l'autre. Or cela posé, on voit naître des Corollaires 1, 2, 5, 10, plusieurs cas dont voici les principaux. FIG. 92.

1°. S'il y a deux tangentes KS, LS, qui se rencontrent en un point S, & deux autres droites MN, AR, paralleles à ces tangentes & terminées par la Section, lesquelles se rencontrent en un point P ; je dis que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$. Ceci a été démontré dans le Theorême à l'égard de la Parabole : mais pour les autres Sections, concevant dans le premier Corollaire que FG tombe sur la tangente KS, & BD sur LS ; il est clair que les deux points d'intersection F, G, se reünissent au point touchant K, comme aussi les deux B, D, au point touchant L ; & qu'ainsi les rectangles $FQ \times QG$, $BQ \times QD$, deviennent les quarrés $\overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$.

2°. Si dans une Ellipse ou dans des Hyperboles opposées, l'on mene une tangente TX parallele à KS, & qui rencontre SL au point X, on prouvera comme dans le nombre précédent, que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{TX}^2 . \overline{LX}^2$. D'où il suit que $\overline{KS}^2 . \overline{LS}^2 :: \overline{TX}^2 . \overline{LX}^2$. Et $KS . SL :: TX . LX$. C'est à dire, que si deux tangentes paralleles KS, TX, rencontrent une troisiéme tangente LS aux points S, X, on aura $KS . LS :: TX . LX$. ou $KS . TX :: LS . LX$.

3°. Si dans une Ellipse, dans une Hyperbole ou dans des Hyperboles opposées, il y a deux tangentes KS, LS, qui se rencontrent en un point S, & qu'on mene

deux demi-diametres CY, CZ paralleles à ces tangentes ; je dis quels seront entr'elles comme ces deux demi-diametres. Car selon le Theorême $\overline{CY}^2 . \overline{CZ}^2 :: MP \times PN . AP \times PR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$, selon le nombre premier. Et par conséquent $CY . CZ :: KS . LS$.

4°. S'il y a deux droites AR, FG, terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent deux tangentes KI, LO, qui leur soient paralleles, aux points I, O ; je dis que $FO \times OG . \overline{LO}^2 :: \overline{KI}^2 . AI \times IR$. Ce qui est évident en concevant dans le premier Corollaire que BD devient la tangente LO ; & MN, la tangente KI.

5°. S'il y a deux paralleles AR, BD, terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent une tangente KH aux points I, H ; je dis que $\overline{KI}^2 . AI \times IR :: \overline{KH}^2 . BH \times HD$, ou $\overline{KI}^2 . \overline{KH}^2 :: AI \times IR . BH \times HD$. Ce qui est une suite du second Corollaire, en concevant que la ligne FG tombe sur la tangente KH.

6°. Si l'on suppose dans le nombre précédent que la Section Conique soit une Hyperbole, & que la tangente HK en soit une asymptote ; les rectangles $BH \times HD$, $AI \times IR$ deviendront égaux entr'eux. Car le point touchant K sera * alors infiniment éloigné des points H, I ; & par conséquent les droites infinies HK, IK, qui ne different entr'elles que d'une grandeur finie HI, doivent être regardées comme égales. Ceci a déja eté démontré dans l'article 97. & on ne le repete ici que pour servir de preuve à ce que l'on vient de dire, & pour faire voir qu'on arrive souvent aux mêmes verités par des routes bien differentes.

* Art. 108.

7°. S'il y a deux tangentes KS, LS, qui se rencontrent en un point S, avec une ligne droite AR terminée par la Section, parallele à l'une d'elles LS, & qui rencontre l'autre KS en un point I ; je dis que $\overline{KI}^2 . AI \times IR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$. Cela est visible en concevant dans le second Corollaire que les lignes FG, BD, tombent sur les tangentes KS, LS.

8°. S'il y a dans une Ellipse ou dans les Hyperboles opposées deux tangentes paralleles KI, TV, qui rencontrent aux points I, V, une ligne AR terminée par la Section aux points R, A; je dis que $\overline{KI}^2 . AI \times IR :: \overline{TV}^2 . RV \times VA$. Cela suit encore du second Corollaire en imaginant que les paralleles MN, FG, tombent sur les tangentes TV, KI.

9°. S'il y a dans une Parabole deux paralleles MN, CH, dont l'une soit tangente en C, & l'autre soit terminée par la Parabole; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux diametres AF, BO qui rencontrent ces lignes aux points F, O : il est clair en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire sixiéme que EL tombe sur la tangente CH; 1°. Que $MF \times FN . \overline{CO}^2 :: AF . BO$. 2°. Que si l'on prolonge FA jusqu'à ce quelle rencontre la tangente CH en Q, on aura $MF \times FN . \overline{CQ}^2 :: AF . AQ$. FIG. 94.

10°. S'il y a deux paralleles MN, KT, dont l'une KT touche une Hyperbole en K & rencontre une de ses asymptotes en S, & l'autre MN est terminée par l'une ou par l'autre des Hyperboles opposées, & rencontre la même asymptote en Q; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux paralleles AP, BT, à l'asymptote CS, lesquelles rencontrent ces lignes aux points P, T; on aura (en concevant dans les trois nombres du Corollaire dixiéme, que la secante GH tombe sur la tangente RT) 1°. Le rectangle $MP \times PN . \overline{KT}^2 :: AP \times PQ . BT \times TS$. 2°. En prolongeant PA jusqu'à ce qu'elle rencontre KT en R, le rectangle $MP \times PN . \overline{KR}^2 :: AP . AR$; 3°. Le quarré $\overline{KT}^2 . \overline{KR}^2 :: BT \times TS . AR \times RS$. FIG. 98.

11°. S'il y a dans les Hyperboles opposées deux tangentes paralleles KR, LF; qui rencontrent une asymptote CS aux points S, V; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux paralleles AR, BF à l'asymptote CS lesquelles rencontrent ces tangentes

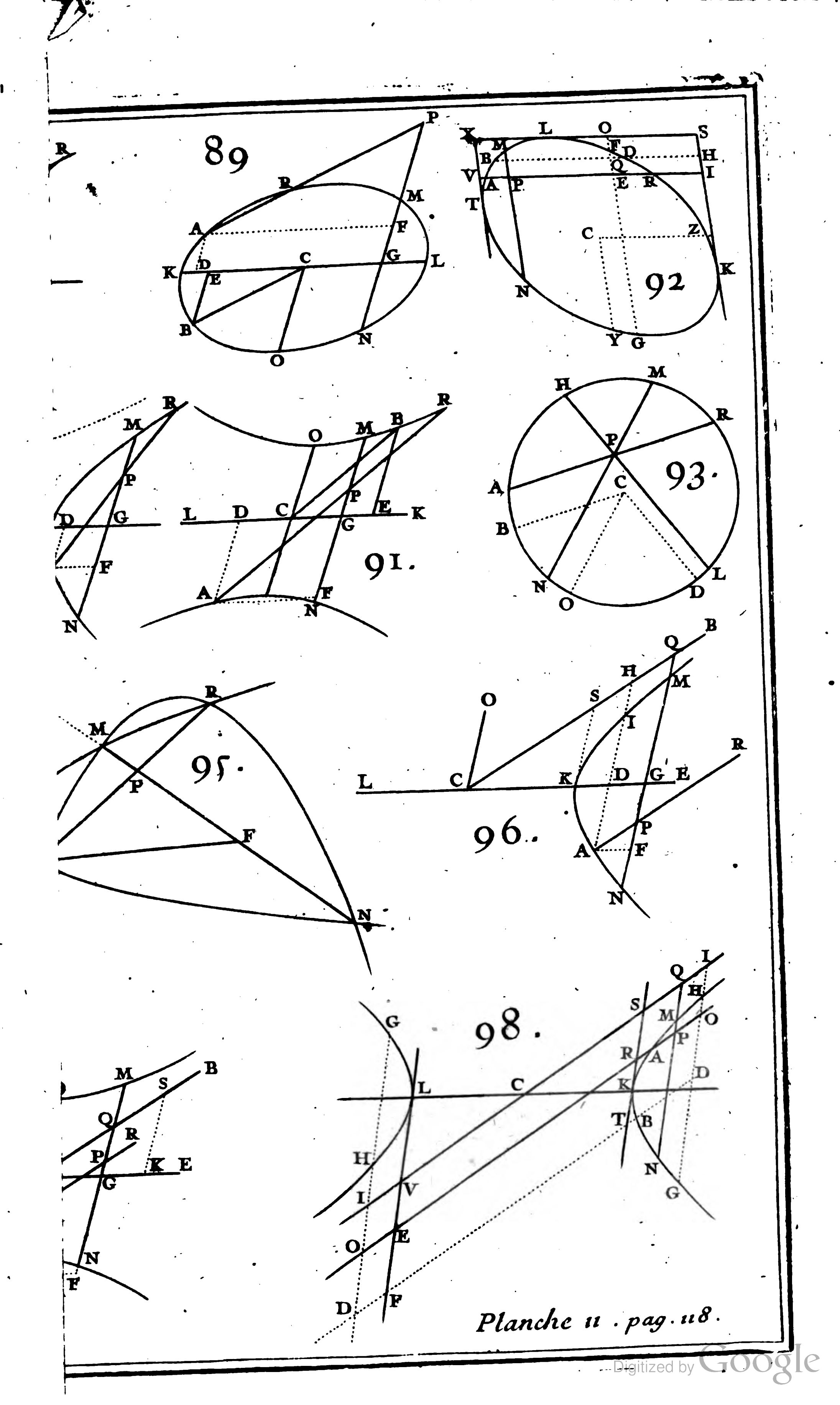
aux points R, F: on aura (en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire dixiéme, que les deux Secantes MN, GH, tombent sur les deux tangentes KR, LF) 1°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LF}^2 :: AR \times RS . BE \times FK$.
2°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LE}^2 :: AR . AE$.

PROPOSITION XIV.

Problême.

Fig. 99. 100. & 101. 176. Décrire *une Ellipse ou deux Hyperboles opposées autour d'un parallelogramme donné* FGHK, *& dont l'un de ses diametres* AB *parallele aux deux côtez* FK, GH, *soit à son conjugué* DE, *en la raison donnée de* m *à* n.

Ayant mené les lignes AB, DE, qui coupent par le milieu les côtés opposés du parallelogramme donné
* Art. 146. $FGHK$, il est clair * qu'elles seront sur deux diametres conjugués de la Section qu'on demande, & qu'ainsi leur point d'interfection en sera le centre; puisque selon l'une des conditions du Problême, les paralleles FG, KH, doivent être terminées par la Section, aussi bien que les deux autres paralleles FK, GH. Or cela posé, si l'on prend AB, DE, pour ces deux diametres conjugués, & qu'on nomme (les points L, O, coupant en deux parties égales les lignes FG, KH,) les données CL ou CO, a; LF ou OK, b; & l'inconnuë CA ou CB, t; on aura.
* Art. 41. & 55. 1°. Lorsque * la Section est une Ellipse, $BL \times LA$ $(tt - aa)$. $\overline{LF}^2$ $(bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: mm . nn$. Et partant $tt = aa$
* Art. 81. & 118. $+ \frac{mmbb}{nn}$. 2°. Lorsque * la Section doit être deux Hyperboles opposées, $\overline{CL}^2 \mp \overline{CA}^2$ $(aa \mp tt)$. $\overline{LF}^2$ $(bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: mm . nn$, ce qui donne $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ ou $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$; sçavoir $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ lorsque la ligne AB est un premier diametre, & $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$ lorsque c'est un second. D'où l'on tire la construction sui-


89
92
91.
93.
95.
96.
98.
Planche 11. pag. 118.

vante que je distingue en trois differens cas.

Premier cas. Lorsque la Section est une Ellipse ; soit fait un triangle rectangle VST dont l'un des côtés $ST = CL$, & l'autre $SV = \frac{m}{n} LF$; & soit décrit du demi-diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué CD, comme m est à n, une Ellipse : Je dis qu'elle satisfera au Problême. Car 1°. Le diametre AB parallele aux côtés FK, GH, est à son conjugué DE, en la raison donnée de m à n. 2°. A cause du triangle TSV rectangle en S, le quarré $\overline{TV}^2$ ou $\overline{CA}^2$ $(tt) = \overline{TS}^2$ $(aa) + \overline{SV}^2$ $(\frac{mmbb}{nn})$; & partant $BL \times LA$ $(tt - aa)$ $= \frac{mmbb}{nn}$: c'est pourquoi l'on aura $BL \times LA$ $(\frac{mmbb}{nn})$. $\overline{LF}^2$ (bb) :: mm. nn :: $\overline{AB}^2$. $\overline{DE}^2$. D'où l'on voit que LF est une ordonnée au diametre AB ; & qu'ainsi la Section passe par le point F. On prouvera de même que la Section passera par les points G, H, K ; puisque $GL = LF = OK = OH$, & que $CO = CL$.

Second cas. Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que CL est plus grande que $\frac{m}{n} LF$: soit formé un triangle TSV rectangle en S, dont l'un des côtés $SV = \frac{m}{n} LF$, & l'hypothenuse $VT = CL$; & soient décrites du premier demi diametre $CA = TS$, qui soit à son demi-conjugué CD, comme m est à n, deux Hyperboles opposées.

Troisiéme cas. Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que CL est plus petite que $\frac{m}{n} LF$: on formera un triangle TSV rectangle en T dont l'un des côtés $TS = CL$, & l'hypothenuse $SV = \frac{m}{n} LF$. On décrira ensuite du second demi-diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué CD, comme m est à n, deux Hyperboles opposées.

La démonstration de ces deux derniers cas est sem-

blable à celle du premier, mais il faut remarquer que lorsque $CL = \frac{m}{n} LF$, le Problême est impossible.

COROLLAIRE I.

177. COMME la position des deux diametres conjugués AB, DE, est déterminée, aussi bien que leur grandeur; puisque selon les conditions du Problême ils doivent couper par le milieu les côtés opposés du parallelogramme, & qu'on ne trouve pour le demi-diametre CA ou CB qu'une seule valeur : il s'ensuit qu'il ne peut y avoir qu'une seule Section qui satisfasse.

COROLLAIRE II.

178. DE-LA on voit comment on peut décrire une Section Conique autour d'un parallelogramme donné $FGHK$, & qui passe par un point donné M.

Car ayant mené les deux diametres conjugués AB, DE, qui coupent par le milieu les côtés opposés du parallelogramme, & du point donné M l'ordonnée MP au diametre AB, laquelle rencontre les côtés opposés FK, GH, aux points R, Q, & la Section (que je suppose décrite) au point N; il est clair que $PN = PM$, & qu'ainsi $RN = QM$, puisque $PR = PQ$. Le rectangle $RM \times MQ$ sera donc égal au rectangle $RM \times RN$. Or* $FR \times RK . MR \times RN$ ou $RM \times MQ :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2$. Et par consequent la raison du diametre AB parallele aux côtés FK, GH, à son conjugué DE, est donnée; puisque les rectangles $FR \times RK$, $RM \times MQ$, sont donnés. De plus la Section sera une Ellipse, lorsqu'entre les deux ordonnées MP, KO, au diametre AB, qui tombent du même côté du centre C, celle qui est la plus proche du centre est plus grande que la plus éloignée; & au contraire deux Hyperboles opposées, lorsqu'elle est plus petite. D'où l'on voit que cette question se reduit au Problême précédent.

* Art. 164.

Si le point donné *M* tomboit sur l'un des côtés du parallelogramme, prolongé à discrétion ; il est clair que ce Problême seroit alors impossible, puisque ce côté rencontreroit la Section en trois differens points ; ce qui ne peut * être. * *Art.* 149.

COROLLAIRE III.

179. DE-LA on tire encore la maniére de décrire une Section Conique, qui ait pour diametre une ligne *AB* donnée de position, pour centre le point donné *C*, & pour deux ordonnées à ce diametre les droites *MP*, *KO*.

Car ayant pris sur le diametre *AB* la partie *CL* égale à *CO*, & mené *LF* parallele & égale à *OK* ; il est clair qu'elle sera * une ordonnée au diametre *AB*, & qu'ainsi prolongeant *KO* en *H*, & *FL* en *G*, en sorte que *OH* = *OK*, & *LG* = *LF*, les droites égales & paralleles *KH*, *FG*, seront * deux doubles ordonnées au diametre *AB*. D'où l'on voit que la Section doit être décrite autour du parallelogramme *FGHK*, & passer par le point donné *M* ; ce qui se fera par le moyen du Corollaire précédent. * *Art.* 45. 55. 85. & 118. * *Art.* 144.

Comme cette question se réduit à celle du Corollaire précédent, qui se réduit au Problême ; & que selon le Corollaire premier, on ne peut trouver qu'une seule Section qui y satisfasse : il s'ensuit de même qu'on ne peut décrire qu'une seule Section qui remplisse les conditions de ce dernier Corollaire.

PROPOSITION XV.

Problême.

180. DE'CRIRE *une Section Conique qui passe par cinq points donnés* F, M, K, G, N ; *& démontrer qu'il n'y en peut avoir qu'une seule.* FIG. 102. & 103.

Ayant joint quatre des points donnés par deux lignes droites FG, MN, qui se rencontrent au point R, on menera par le cinquième point donné K deux droites KD, KH, paralleles aux droites FG, MN, & qui les rencontrent aux points E, Q. On prendra sur ces deux lignes prolongées, s'il est necessaire, les points D, H, tels que $MR \times RN . GR \times RF :: ME \times EN . KE \times ED$. Et $FR \times RG . MR \times RN :: FQ \times QG . HQ \times QK$. en observant que les points K, D, ou K, H, doivent tomber de part & d'autre du point de rencontre E, ou Q, lorsque les points M, N, ou F, G, tombent aussi de part & d'autre de ce même point ; & au contraire. On menera ensuite par les points de milieu des paralleles DK, FG, & MN, KH, les droites LI, AB, qui s'entre-

* Art. 179. coupent au point C. On décrira enfin * la Section Conique qui a pour diametre la ligne AB donnée de position, pour centre le point donné C, & pour ordonnées les deux droites MP, KO. Je dis qu'elle satisfera au Problême, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

* Art. 166. Car les deux points D, H, seront * à la Section qui passe par les cinq points donnés F, M, K, G, N ; &

* Art. 146. & 147. ainsi les lignes LI, AB, en seront * deux diametres, qui en détermineront par consequent le centre par leur point d'intersection C. Il est donc évident que la Section Conique qui passe par les cinq points donnés, doit avoir nécessairement pour diametre la ligne AB donnée de position, pour centre le point C, & pour ordonnées au diametre AB les droites MP, KO. Or comme il n'y a qu'une seule Section Conique qui puisse remplir ces conditions, il s'ensuit que ce sera celle qu'on demande, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

S'il arrive que les diametres AB, LI, soient paral-

* Art. 147. leles entr'eux ; la Section sera alors * une Parabole qu'on décrira par l'article 170.

LIVRE CINQUIE'ME.

De la comparaison des Sections Coniques entr'elles, & de leurs Segmens.

LEMME I.

181. S*i la difference de deux quantités diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée ; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car si elles ne l'étoient pas, on pourroit assigner entr'elles quelque difference ; ce qui est contre l'hypothese.

LEMME II.

182. S*i la raison de deux quantités est telle que l'antecedent demeurant toûjours le même, sa difference avec son consequent diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée ; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car par le Lemme * précédent, l'antecedent sera égal à son consequent ; & ainsi les quantités dont ils expriment le rapport, seront égales. * *Art.* 181.

LEMME III.

183. S*i l'on suppose sur une ligne courbe quelconque* ABG *un arc* MN *infiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune grandeur donnée ; & qu'on imagine par les extremités de cet arc les ordonnées* MP, NQ, *à l'axe ou diametre* AC, *avec les paralleles* MR, NS, *à ce diametre : je dis que les parallelogrammes* PQRM, PQNS, *peuvent être pris chacun pour l'espace* PQNM *renfermé entre les ordonnées* PM, QN, *la petite droite* PQ, *& le petit arc de la courbe* MN. FIG. 104.

Tous les points d'une ligne courbe ou s'éloignent

continuellement de plus en plus de ſon diametre, ou bien s'en approchent continuellement de plus en plus ; ou enfin cette ligne courbe eſt compoſée de pluſieurs portions, dont les unes s'eloignent de plus en plus, & les autres s'approchent de plus en plus de ſon diametre. Car il eſt évident qu'il ne peut y avoir aucune portion dans une ligne courbe, dont tous les points ſoient également éloignes de ſon diametre ; puiſqu'alors cette portion ne ſeroit plus courbe, mais une ligne droite parallele à ce diametre.

Suppoſons 1°. Que l'arc *MN* ſoit ſur une courbe *AMB* dont tous les points s'éloignent de plus en plus de ſon diametre *AC*. Si l'on prend du côte du point *N* l'arc *MO* d'une grandeur finie, & qu'ayant nommée l'ordonnee *OF* parallele à *MP*, on tire les droites *OD*, *ME*, paralleles au diametre *AC* ; il eſt clair que l'eſpace Curviligne *PFOM* ſera plus grand que le parallelogramme inſcrit *PFEM*, & moindre que le parallelogramme circonſcrit *PFOD*. Or ſi l'on imagine que le point *O* ſe meuve ſuivant la courbe vers le point *M*, il eſt viſible que le parallelogramme *MEOD* qui eſt la difference des parallelogrammes inſcrits & circonſcrits à l'arc *OM*, diminuëra continuellement juſqu'à ce qu'enfin il devienne nul ou zero dans l'inſtant que le point *O* parvient en *M*. D'où il ſuit que lorſque le point *O* eſt arrivé en *N*, c'eſt à dire, infiniment près de *M*, le parallelogramme *MEOD*, qui devient *MRNS*, ſera moindre qu'aucune grandeur donnée. Il eſt donc évident ſelon le Lemme * premier, que les parallelogrammes *PQRM*, *PQNS*, deviennent alors égaux entr'eux ; & par conſequent auſſi égaux chacun à l'eſpace curviligne *PQMN*. Donc &c.

* Art. 181.

Suppoſons 2°. Que le petit arc *MN* ſoit ſur une courbe *BMG* dont tous les points approchent de plus en plus de ceux de ſon diametre *CG*. Il eſt viſible que la démonſtration demeure la même que pour le premier cas, en obſervant ſimplement que le parallelogramme

circonscrit *PQNS* devient inscrit en ce cas-ci.

Supposons 3°. Qu'une ligne courbe telle que *ABG*, soit composée de plusieurs portions dont les unes, comme *AB*, s'éloignent de plus en plus du diametre *AG*; & les autres au contraire, comme *BG*, s'en approchent de plus en plus. Je dis que les points, comme *B*, qui séparent ces portions, ne peuvent tomber sur les arcs *MN*; car si cela étoit le point *B* seroit plus près du point *M* que n'est le point *N*; ce qui est contre la supposition. Il est donc évident que ce dernier cas est necessairement renfermé dans l'un ou dans l'autre des deux premiers.

Corollaire I.

184. De là il suit que si l'on mene par tout où l'on voudra une ordonnée *CB* parallele à *PM*, & qu'on imagine que la portion de courbe *AB* soit divisée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits, tels que *MN*; l'espace *ACB* renfermé par les droites *AC*, *CB*, & par la portion de courbe *AB*, sera égal à la somme de tous les parallelogrammes tels que *PQRM* ou *PQNS*. Il s'ensuit de même que l'espace *MPCB* renfermé par les droites *MP*, *PC*, *CB*, & par la portion de courbe *MB*, sera égal à la somme de tout ce qu'il y aura de ces parallelogrammes dans cet espace; & de même dans toute l'étenduë de la courbe *ABG*.

Corollaire II.

185. S'il y a une figure quelconque *CMDOC* renfermée entre deux paralleles *CE*, *DF*, & qu'on imagine par tout où l'on voudra entre ces paralleles deux droites *MO*, *NL*, infiniment proches l'une de l'autre, & qui leur soient aussi paralleles; je dis que l'espace *OMNL* qu'elles couperont dans la figure *CMDOC*, sera egal au rectangle d'une d'elles, comme de *MO*, par leur distance *MR* ou *OS*. Car menant la perpendicu- Fig. 105.

laire *AB* sur les paralleles *CE*, *DF*, laquelle rencontre les paralleles *MO*, *NL*, aux points *P*, *Q*; il est clair par le Lemme * que l'espace *PMNQ* est egal au rectangle *PMRQ*, & l'espace *POLQ* au rectangle *POSQ*; & par consequent que l'espace *OMNL* est égal au rectangle *OMRS* ou *OM* × *PQ*.

* Art. 183.

COROLLAIRE VII.

186. Il suit du Corollaire précédent, que s'il y a deux figures quelconques *CMDOC*, *EGFHE* renfermées entre deux paralleles *CE*, *DF*, & qui soient telles qu'ayant mené entre ces paralleles par tout où l'on voudra une ligne *MH* parallele aux droites *CE*, *DF*; les parties *MO*, *GH*, de cette ligne comprises dans les figures *CMDOC*, *EGFHE*, soient toûjours entr'elles en raison donnée : il suit, dis-je, que ces deux figures (j'entends les espaces qu'elles comprennent) sont aussi entr'elles en raison donnée. Car imaginant une autre parallele *NK* infiniment proche de *MH*, & tirant une perpendiculaire *AB* sur les paralleles *CE*, *DF*, laquelle rencontre les paralleles *MH*, *NK*, aux points *P*, *Q*; il est clair par le Corollaire * précédent que l'espace *OMNL* est égal au rectangle *OM* × *PQ*, & de même que l'espace *GHKI* est égal au rectangle *GH* × *PQ*. Ces deux espaces seront donc entr'eux comme *MO* est à *GH*; & comme cela arrive toûjours en quelque endroit qu'on mene la droite *MH*, il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces *MNLO*, c'est à dire, l'espace *CMDOC* sera à la somme de tous les petits espaces *GHKI*, c'est à dire, à l'espace *EGFHE*, en la raison donnée.

* Art. 185.

On prouvera de même que la partie *MDO* de la figure *CMDOC*, est encore à la partie correspondante *GFH* de l'autre figure *EGFHE*, en la raison donnée : comme aussi les parties restantes *CMO*, *EGH*.

Il est visible que si la raison donnée est celle d'égalité,

c'est à dire, que si les parties *MO*, *GH*, de la droite *MH*, sont toûjours égales entr'elles ; les espaces *CMDOC*, *EGFHE*, & leurs parties correspondantes *MDO*, *GFH*, & *CMO*, *EGH*, seront égales entr'elles.

LEMME IV.

187. S*i l'on suppose sur une ligne courbe quelconque un arc infiniment petit* MN ; *& qu'on imagine les tangentes* MT, NT, *qui se rencontrent au point* T, *la soûtendante* MN, *& la droite* NS *perpendiculaire sur* MT *prolongée : je dis qu'on peut prendre pour l'arc* MN *sa soûtendante* MN, *ou la somme des deux tangentes* MT, NT, *ou enfin la droite* MS. FIG. 106.

Toute ligne courbe est nécessairement ou toûjours concave vers un certain endroit, ou composée de plusieurs portions dont les unes étant concaves vers une certaine part, les autres le sont vers le côté opposé. Or les points qui separent ces portions * ne peuvent point se trouver sur les arcs infiniment petits *MN* : puisqu'ils seroient plus près du point *M* que n'est le point *N* ; ce qui est contre la supposition. On peut donc toûjours supposer que l'arc *MN* fait partie d'une courbe ou portion de courbe qui est toûjours concave vers un certain côté. * *Art.* 183. *n.* 3.

Maintenant si l'on prend sur la courbe du côté du point *N*, l'arc *MO* d'une grandeur finie, & qu'on tire la soûtendante *OM*, la tangente *OG*, & la parallele *OD* à *NS* ; il est clair 1°. A cause du triangle *MDO* rectangle en *D*, que la tangente *MD* est moindre que la soûtendante *MO*, & à plus forte raison moindre que l'arc *MNO* ; de sorte que l'arc *MNO* & sa soûtendante *MO* sont plus grands chacun que *MD*, & chacun moindre que la somme des deux tangentes *MG*, *OG*. 2°. A cause de la concavité de l'arc *MNO* vers le même côté, si l'on mene par un point quelconque *N* de l'arc *MO* une tangente *TR*, les points *T*, *R*, où elle rencontre les tangentes *MG*, *OG*, seront situez entre les points *M*, *G*, & *O*, *G* ; ainsi

l'angle *OGD*, qui est externe au triangle *TGR*, est plus grand que l'angle *RTG* ou *NTS*.

Ceci supposé, si l'on mene les droites *ME*, *MF*, paralleles aux tangentes *OG*, *NT*, & qui rencontrent la droite *DO* aux points *E*, *F*; & qu'on imagine que le point *O* se meuve suivant la courbe vers le point *M*: il est visible que l'angle *OGD*, ou son égal *EMD*, diminuëra continuellement jusqu'à ce qu'il s'évanoüisse dans l'instant que le point *O* parvient en *M*; puisqu'alors la tangente *OG* se confond avec la tangente *MD*: d'où il suit que la ligne *ME* diminuë continuellement, jusqu'à ce qu'enfin elle devienne égale à *MD* dans cet instant. Donc lorsque le point *O* est arrivé en *N*, c'est à dire, infiniment près du point *M*, la ligne *ME*, alors en *MF*, ne sera pour lors différente de la tangente *MD*, que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée; & par conséquent * les lignes *TN*, *TS*, dont elles expriment le rapport, seront égales entr'elles. Les deux tangentes *MT*, *TN*, prises ensemble, seront donc égales à la droite *MS*, comme aussi à l'arc *MN*, & à la soûtendante *MN*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 182.

COROLLAIRE I.

188. PUISQUE l'angle *FMD*, ou son égal *NTS*, est infiniment petit dans la supposition que le point *N* soit infiniment près du point *M*, il s'ensuit que dans le triangle *MTN*, l'angle interne *NMT*, qui est moindre que l'exterieur *NTS*, sera aussi infiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucun angle donné; & qu'ainsi on ne pourra mener par le point *M* aucune ligne droite qui tombe dans l'angle *TMN*. D'où l'on voit que ces deux lignes *MT*, *NM*, se confondent entr'elles, & qu'ainsi on peut regarder une tangente comme une ligne droite qui passe par deux points d'une ligne courbe infiniment proches l'un de l'autre.

COROLLAIRE II.

189. Si l'on imagine qu'une ligne courbe quelconque soit divisée en une mulitude infinie d'arcs infiniment petits tels que *MN*; il est clair qu'en prenant au lieu de ces arcs leurs soûtendantes, on verra naître un Polygone d'une infinité de côtés, chacun infiniment petit, que l'on pourra prendre pour la ligne courbe : puisqu'elle* n'en differera en aucune maniere. De plus les petits côtés de ce Polygone étant prolongés de part & d'autre, seront les tangentes de cette courbe; puisqu'ils passent chacun par deux de ses points infiniment proches l'un de l'autre.

* *Art.* 187.

REMARQUE.

190. On doit faire ici attention que l'idée ou notion qu'on a donnée des tangentes des Sections Coniques, ne convient qu'aux lignes courbes qui sont toûjours concaves dans toute leur étenduë vers le même côté, comme sont * ces Sections : au lieu que cette derniere notion est generale pour toutes sortes de lignes courbes. Aussi est-ce elle qui sert de fondement à la méthode des tangentes que j'ai expliquées, dans mon Livre des *Infiniment petits*, & que j'ose assûrer être la plus simple & la plus generale qu'on puisse souhaiter. On en verra un foible échantillon à la fin de ce Livre.

* *Art.* 26. 61. 124.

DEFINITIONS.

1.

Deux segmens de lignes courbes quelconques *BAD*, *bad*, sont appellés *Semblables*; lorsqu'ayant inscrit dans l'un d'eux une figure rectiligne quelconque *BMNOD*, on peut toûjours inscrire dans l'autre une figure rectiligne semblable *bmnod*.

FIG. 107. 108. 109.

2.

Deux Sections Coniques sont appellées *Semblables*; lorsqu'ayant pris dans l'une d'elles un segment quelcon-

que BAD, on peut toûjours assigner dans l'autre un segment semblable bad.

3.

On appelle diametres *Semblables* AP, ap, dans differentes Sections Coniques, ceux qui sont avec leurs ordonnées PM, pm, les mêmes angles APM, apm.

COROLLAIRE.

191. PLUS chacun des côtés BM, MN; &c. bm, mn, &c. devient petit ; plus leur nombre augmente, & plus aussi les figures rectilignes semblables $BMNOD$, $bmnod$, approchent des segmens BAD, bad, ausquels elles sont inscrites ; de sorte qu'elles leur deviennent enfin égales* lorsque chacun des côtés est infiniment petit, & que leur nombre par conséquent est infini. D'où il suit que les segmens semblables BAD, bad, sont entr'eux comme les quarrés de leurs soûtendantes BD, bd, qui sont des côtés homologues ; & les portions des courbes BAD, bad; comme ces soûtendantes.

* Art. 189.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 107. 192. SOIENT *deux Paraboles* AM, am, *qui ayent deux diametres semblables* AL, aL, *situés sur la même droite, en sorte que leurs ordonnées* PM, pm, *soient paralleles entr'elles ; & soit marqué sur cette droite au dedans des Paraboles un point fixe* L, *tel que* LA *soit à* La, *comme le parametre* AG *du diametre* AL *de la Parabole* AM, *est au parametre* ag *du diametre* aL *de la Parabole* am. *Je dis que si l'on mene du point fixe* L *à un point quelconque* M *de la Parabole* AM, *une ligne droite* LM ; *elle rencontrera l'autre Parabole* am *en un point* m *tel que* LM. Lm :: LA. La.

Ayant mené l'ordonnée MP, & nommé les données LA, a; La, b; AG, p; & les indéterminées AP, x;

PM, y ; on aura $LA\ (a).\ La,\ (b) :: AG\ (p).\ ag = \frac{bp}{a}$.
Or si l'on prend sur le diametre aL de la Parabole am, la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée pm ; il est clair * que $\overline{pm}^2 = pa \times ag\ (\frac{bbpx}{aa}) = \frac{bbyy}{aa}$ en mettant pour px * sa valeur yy ; & qu'ainsi $pm = \frac{by}{a}$. Donc $PM\ (y).\ pm\ (\frac{by}{a}) :: LP\ (a - x).\ Lp\ (b - \frac{bx}{a})$. Et par conséquent la ligne LM passera par le point m extremité de l'ordonnée pm, c'est à dire, qu'elle coupera la Parabole am en ce point. Donc à cause des triangles semblables LPM, Lpm, on aura $LM.\ Lm :: PM\ (y).\ pm\ (\frac{by}{a}) :: LA\ (a).\ La\ (b)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art. 6. & 20.*
* *Ibid.*

COROLLAIRE I.

193. Si l'on prend dans la Parabole AM un segment quelconque BAD ; & qu'ayant mené les droites LB, LD qui rencontrent l'autre Parabole am aux points b, d, on tire la soûtendante bd : je dis que le segment bad de la Parabole am, est semblable au segment BAD de la Parabole AM. Car ayant inscrit dans le segment BAD une figure rectiligne quelconque $BMNOD$, il est clair que si l'on mene les droites LM, LN, LO, qui rencontrent l'autre Parabole aux points m, n, o ; les triangles LBM, Lbm ; LMN, Lmn ; LNO, Lno ; LOD, Lod ; LBD, Lbd, seront semblables ; & qu'ainsi les côtés BM, bm ; MN, mn ; NO, no ; OD, od ; BD, bd ; seront paralleles, & toûjours en même raison chacun à son correspondant ; puisque toutes les droites LB, LM, LN, LO, LD, sont coupées en même raison aux points b, m, n, o, d. D'où l'on voit que les figures rectilignes $BMNOD$, $bmnod$, sont semblables. Or comme il est évident que cette démonstration subsiste toûjours, telle que puisse être la figure rectiligne inscrite dans le segment BAD ;

* Def. 1. il s'ensuit que les segmens *BAD*, *bad*, * sont semblables ; & par conséquent * que les Paraboles *AM*, *am*,
* Def. 2. le sont aussi.

COROLLAIRE II.

194. De-là il est évident que si l'on mene par le point *L* une double ordonnée *EF* dans la Parabole *AM*, laquelle rencontre l'autre Parabole *am* aux points *e*, *f*; les segmens *EAF*, *eaf*; des deux Paraboles *AM*, *am*, seront semblables entr'eux.

COROLLAIRE III.

195. Toutes les Paraboles sont semblables entr'elles ; car si l'on prend sur deux diametres semblables de deux differentes Paraboles, les parties *AL*, *aL*, qui soient entr'elles comme les parametres *AG*, *ag*; & si l'on conçoit que le diametre *La* soit situé sur le diametre *LA*: en sorte que les points *L*, *L*, tombent l'un sur l'autre, & que leurs ordonnées *PM*, *pm*, soient paralleles entr'elles : il est clair qu'ayant mené du point fixe *L* à un point quelconque *M* de la Parabole *AM*, une ligne droite *LM*; elle rencontrera toûjours l'autre Parabole *am* en un point *m* tel que *LM*. *Lm* :: *LA*. *La*.
* Art. 193. Donc * &c.

COROLLAIRE IV.

196. De-là il suit que si l'on prend sur deux diametres semblables de deux differentes Paraboles, les parties *AL*, *aL*, qui soient entr'elles comme les parametres de ces diametres, & qu'on tire par les points *L*, *L*, les doubles ordonnées *EF*, *ef*: les segmens *EAF*, *eaf*, des deux Paraboles *AM*, *am*, seront semblables entr'eux.

COROLLAIRE V.

197. Si deux segmens *BAD*, *bad*, sont semblables entr'eux, & que l'un d'eux *BAD*, soit le segment d'une

Parabole ; je dis que l'autre *bad* sera le segment d'une autre Parabole, & qu'ainsi il n'y a entre toutes les courbes imaginables que des Paraboles qui puissent être semblables à une Parabole donnée. Car si l'on place le petit segment *bad* au dedans du grand *BAD*, en sorte que les soûtendantes *bd*, *BD*, soient paralleles ; & qu'on inscrive dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques semblables *BMNOD*, *bmnod*: il est clair que les côtés homologues *BM*, *bm*; *MN*, *mn*; &c. de ces deux figures seront paralleles : puisque les angles *DBM*, *dbm*; *BMN*, *bmn*; &c. sont égaux entr'eux. Or menant *LM*, *LN*, *LO*, par le point de concours *L* des deux droites *Bb*, *Dd*, qui joignent les extremités des soûtendantes paralleles *BD*, *bd*, qui sont les deux côtés homologues donnés ; ces droites *LM*, *LN*, *LO*, passeront par les points correspondans *m*, *n*, *o*, où elles seront divisées en même raison que *LB* l'est en *b*, ou *LD* en *d*; puisque *BD*. *bd* :: *LB*. *Lb* :: *BM*. *bm* :: *LM*. *Lm* :: *MN*. *Mn* :: *LN*. *Ln* :: *NO*. *no* :: *LO*. *Lo* :: *OD*. *od*.

Maintenant si l'on mene par le point *L* le diametre *LA* de la Parabole *AM*; qu'on le divise en *a*, en la même raison que *LB* l'est en *b*, ou *LD* en *d*; & qu'on décrive * du diametre *aL*, & du parametre *ag* qui soit au parametre *AG* du diametre *AL* de la Parabole *AM*, comme *La* est à *LA*, une Parabole *am* dont les ordonnées *pm* soient paralleles aux ordonnées *PM* de l'autre Parabole : il est évident * qu'elle passera par tous les points *b*, *m*, *n*, *o*, *d*, qui divisent dans la raison donnée de *BD* à *bd* toutes les droites *LB*, *LM*, *LN*, *LO*, *LD*. Or comme ce raisonnement subsiste toûjours tel que puisse être le nombre des côtés des figures rectilignes semblables *BMNOD*, *bmnod*, & de telle grandeur qu'ils puissent être ; il s'ensuit que la Parabole *am* passe par tout par où le segment *bad* passe, & qu'ainsi ce segment en est une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 161.
* Art. 192.

PROPOSITION II.

Theorême.

FIG. 108. 109. 198. SOIT *une Ellipse ou Hyperbole* AM *qui ait pour un de ses premiers diametres la ligne* AH, *& pour parametre de ce diametre la ligne* AG; *& ayant pris sur ce diametre (prolongé dans l'Hyperbole) un point fixe* L, *& divisé en même raison aux points* a, h, *ses parties* LA, LH. *Soit une autre Ellipse ou Hyperbole* am *qui ait pour premier diametre la ligne* ah, *pour parametre de ce diametre la ligne* ag *qui soit à* AG *comme* ah *est* AH, *& dont les ordonnées* pm *soient paralleles aux ordonnées* PM *de l'autre Section* AM. *Je dis que si l'on mene du point fixe* L *à un point quelconque* M *de la Section* AM, *une ligne droite quelconque* LM; *elle rencontrera l'autre Section* am, *en un point* m *tel que* LM. Lm :: LA. La : *c'est à dire que toutes les droites tirées du point fixe* L *aux points de la Section* AM, *sont divisées en même raison par la Section* am.

Il faut prouver que LM. Lm :: LA. La.

Ayant mené l'ordonnée MP, & nommé les données LA, a; La, b; AH, $2t$; & les indéterminées AP, x; PM, y; on aura LA (a). La (b) :: LH. Lh :: $LH \mp LA$ ou AH $(2t)$. $Lh \mp La$ ou $ah = \frac{2bt}{a}$. Or si l'on prend sur le diametre ah de la Section am la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée pm; il est clair * que $AP \times PH$ $(2tx \mp xx)$. $\overline{PM}^2$ (yy) :: AH. AG :: ah. ag :: $ap \times ph$ $\left(\frac{2bbtx \mp bbxx}{aa}\right)$. $\overline{pm}^2 = \frac{bbyy}{aa}$, & qu'ainsi $pm = \frac{by}{a}$. Donc PM (y). pm $\left(\frac{by}{a}\right)$ :: LP $(a - x)$. Lp $\left(b - \frac{bx}{a}\right)$. Et par conséquent la ligne LM passera par le point m extremité de l'ordonnée pm, c'est à dire qu'elle coupera la Section am en ce point. Donc à cause des triangles semblables LPM, Lpm, on aura

* Art. 42. 55. 81. & 118.

LM.Lm :: *PM* (y). *pm* $\left(\frac{by}{a}\right)$ :: *LA* (a). *La* (b). *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

199. SI l'on prend dans la Section *AM* un segment quelconque *BAD*, & qu'ayant mené les droites *LB*, *LD*, qui rencontrent l'autre Section *am* aux points *b*, *d*, on tire la soûtendante *bd*: je dis que le segment *bad* de la Section *am* est semblable au segment *BAD* de la Section *AM*; & partant que si l'on mene par le point *L* une double ordonnée *EF* dans la Section *AM*, laquelle rencontre l'autre Section aux points *e*, *f*; les segmens *EAF*, *eaf*, des deux Ellipses ou des deux Hyperboles *AM*, *am*, seront semblables entr'eux. Cela se prouve de même que pour la Parabole dans les articles 193. & 194.

COROLLAIRE II.

200. TOUTES les Ellipses ou Hyperboles *AM*, *am*, qui ont deux diametres semblables *AH*, *ah*, en même raison avec leurs parametres *AG*, *ag*, sont semblables entr'elles. Car si l'on prend les parties *AL*, *aL*, qui soient entr'elles comme les diametres *AH*, *ah*, & que l'on conçoive que le diametre *ah* soit situé sur le diametre *AH*, en sorte que les points *L*, *L*, tombent l'un sur l'autre, & que les ordonnées *pm*, *PM*, soient paralleles entr'elles : il est clair qu'ayant mené du point fixe *L* à un point quelconque *M* de la Section *AM* une ligne droite *LM*, elle rencontrera toûjours l'autre Section *am*, en un point *m* tel que *LM*. *Lm* :: *LA*. *La*. Donc * &c. * *Art.* 199.

COROLLAIRE III.

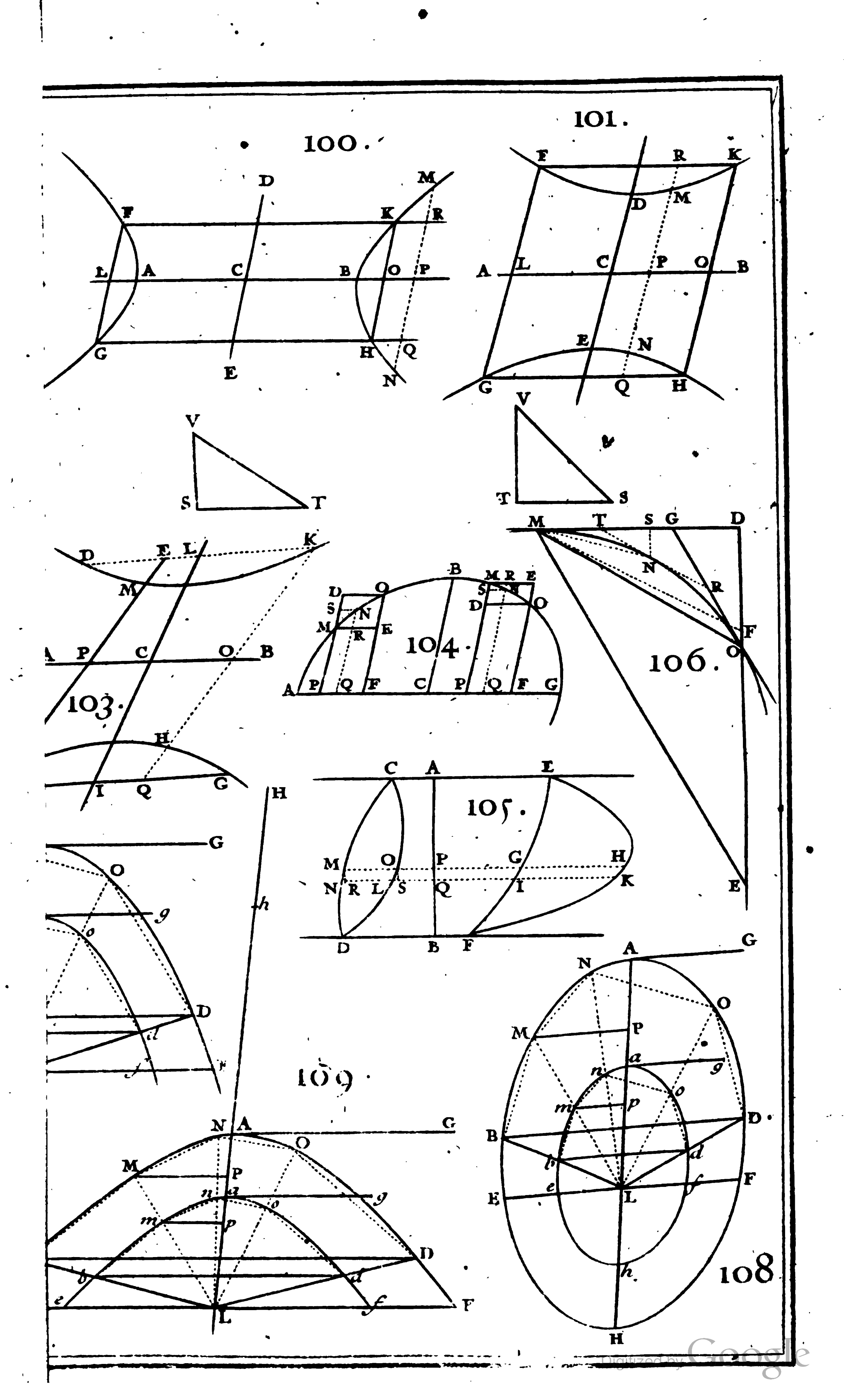
201. DE-LA il est évident que s'il y a deux Ellipses ou deux Hyperboles *AM*, *am*, dont deux diametres semblables *AH*, *ah*, soient en même raison avec leurs parametres *AG*, *ag*; & qu'ayant pris les parties *AL*, *aL*,

qui ſoient entr'elles comme les diametres *AH*, *ab*, on tire par les points *L*, *L*, les doubles ordonnées *EF*, *ef*: il eſt évident, dis je, que les ſegmens *EAF*, *eaf*, des deux Sections *AM*, *am*, ſont ſemblables entr'eux.

COROLLAIRE IV.

202. SI deux ſegmens *BAD*, *bad*, ſont ſemblables entr'eux; & que l'un d'eux ſoit le ſegment d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole *AM*, qui ait pour un de ſes diametres quelconques la ligne *AH* dont le parametre eſt *AG*; Je dis que l'autre *bad* ſera le ſegment d'une autre Ellipſe ou d'une autre Hyperbole *am*, qui aura pour l'un de ſes diametres ſemblables à *AH*, la ligne *ab* qui ſera en même raiſon avec ſon parametre *ag*, que *AH* avec le ſien *AG*. Car ayant placé le ſegment *bad*, au dedans du ſegment *BAD*, en ſorte que la ſoûtendante *bd* ſoit parallele à la ſoûtendante *BD*, & que les lignes *Bb*, *Dd*, concourent en un point *L* du diametre *AH* (ce qui eſt toûjours poſſible), & inſcrit dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques ſemblables; on prouvera comme dans la Parabole article 197. que les droites *LM*, *LN*, *LO*, paſſeront par les points correſpondans *m*, *n*, *o*, où elles ſeront diviſées en même raiſon que *LB* l'eſt en *b*, ou *LD* en *d*.

Maintenant ſi l'on diviſe les parties *LA*, *LH*, du diametre *AH* aux points *a*, *h*, en même raiſon que
*Art. 161. *LB* l'eſt en *b*; & qu'on décrive * du diametre *ah* & du parametre *ag* qui ſoit au parametre *AG* du diametre *AH*, comme *La* eſt à *LA*, ou *ah* à *AH*, une Ellipſe ou une Hyperbole *am*, dans les ordonnées *pm* ſoient paralleles aux ordonnées *PM* de l'autre Ellipſe ou Hyperbo-
*Art. 198. le *AM*: il eſt évident * qu'elle paſſera par tous les points *b*, *m*, *n*, *o*, *d*, qui diviſent dans la raiſon donnée de *bd* à *BD* toutes les droites *LB*, *LM*, *LN*, *LO*, *LD*. Or comme ce raiſonnement ſubſiſte toûjours tel que puiſſe être le nombre des côtés des figures rectilignes ſemblables,


100.
101.
103.
104.
105.
106.
108
109

semblables *BMNOD*, *bmnod*, & de telle grandeur qu'ils puissent être ; il s'ensuit que l'Ellipse ou l'Hyperbole *am* passe par tous les mêmes points par lesquels passe le segment *bd*, & qu'ainsi ce segment en est une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE V.

203. Il est donc évident que si deux Ellipses ou deux Hyperboles *AM*, *am*, sont semblables, & qu'on prenne dans la Section *AM* un de ses diametres quelconques *AH* ; il y aura toûjours dans l'autre Section *am* un diametre *ah* semblable à *AH*, qui aura avec son parametre *ag* la même raison que *AH* avec le sien *AG* : & qu'ainsi les diametres semblables *AH*, *ah*, seront en même raison avec leurs diametres conjugués. Or comme dans une Ellipse ou Hyperbole il ne peut y avoir * que deux differens diametres conjugués qui fassent entr'eux les mêmes angles, & que ces diametres ne different que par leur position, leur grandeur demeurant la même ; il s'ensuit que dans les Ellipses ou les Hyperboles semblables tous les diametres conjugués qui feront les mêmes angles, seront entr'eux en même raison ; observant de prendre pour les antécédens de ces deux raisons les plus grands de ces deux diametres conjugués, & pour conséquens les moindres.

* *Art.* 66. & 128.

PROPOSITION III.

Theorême.

204. *Si l'on mene dans une Section Conique deux paralleles quelconques* BD, EF, *terminées par la Section ; & qu'on joigne leurs extremités par deux droites,* BE, DF ; *je dis que les segmens* BMEB, DMFD, *compris par des portions de la Section, & par les droites qui joignent les extremités des paralleles, seront égaux entr'eux.* FIG. 110. 111.

S

Car ayant prolongé les soûtendantes *BE*, *DF*, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point *G*, & ayant mené par ce point & par le point de milieu *H* de la ligne *BD*, la droite *GH*; il est clair qu'elle divisera par le milieu en *K* la parallele *EF* à *BD*, comme aussi par le milieu en *P* un autre parallele quelconque *OO* à la même ligne *BD*. Donc la ligne *HK* sera un diametre
* Art. 146. * qui aura pour ordonnées de part & d'autre les paralleles *BD*, *EF*; & partant si l'on mene par un de ses points quelconques *P* une parallele à ces lignes, elle rencontre-
* Art. 144. ra * la Section en deux points *M*, *M*, également éloignés du point *P*; d'où l'on voit que les parties *MO*, *OM*, de la même parallele *MM* à *BD*, comprises dans les segmens *BMEB*, *DMFD*, sont toûjours égales entr'elles, en quelque endroit que puisse tomber cette parallele en-
* Art. 186. tre les lignes *BD*, *EF*. Il est donc évident * que ces deux segmens seront égaux entr'eux.

Si les soûtendantes *BE*, *DF*, étoient paralleles entr'elles, il faudroit mener par le point de milieu *H* de la ligne *BD* une droite *HK* parallele à ces soûtendantes, & la démonstration demeureroit toûjours la même.

COROLLAIRE I.

FIG. 110. 205. PUISQUE *PM* est toûjours égale à *PM*; il s'ensuit 1°. Que les Trapeses Coniques *KHBE*, *KHDF*, sont égaux entr'eux. 2°. (Lorsque la ligne *BD* au lieu de rencontrer la Section en deux points la touche en un point *A*) que les Trilignes Coniques *AKE*, *AKF*, sont égaux; & qu'ainsi les segmens *AEMA*, *AFMA*, le sont aussi; puisque le triangle *AEF* est divisé en deux parties égales par le diametre *AK* qui passe par le milieu de *EF*.

COROLLAIRE II.

FIG. 110. 206. SI la Section étant une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole, l'on mene par les extremités des paralleles

BD, EF, les droites BF, DE, qui s'entrecoupent entre ces paralleles ; les segmens BFDAB, DEBAD, seront égaux entr'eux. Car les triangles BFD, BED, qui sont entre les mêmes paralleles BD, EF, & qui ont la même base BD, sont égaux entr'eux ; & partant si l'on ajoûte d'une part le segment DMFD plus le segment BADB, & de l'autre BMEB égal au segment DMFD, plus aussi le même segment BADB ; les touts BFDAB, DEBAD, seront égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

270. DE-LA on voit comment on peut couper par un point donné D sur une Section Conique, deux segmens DGED, DFBD, égaux chacun à un segment donné BEDB. Car ayant tiré les droites BD, DE, & mené BG parallele à DE, & EF parallele à BD, lesquelles rencontrent la Section aux points G, F ; il est clair * en joignant la droite DF, que le segment DFBD est égal au segment BEDB, à cause des paralleles DB, EF ; & de même en joignant DG, que le segment DGED est égal au segment BEDB, à cause des paralleles BG, DE. FIG. 112. * Art. 266.

Si le point donné tomboit sur l'une des extremités du segment donné que je suppose être à present DGED, il faudroit mener par l'autre extremité G, une parallele GF à la tangente qui passe par le point D ; & tirant par le point F où cette parallele rencontre la Section, & par le point donné D, la soûtendante DF, il est clair que le segment DFBD sera égal au segment donné DGED.

Il est visible qu'il ne peut y avoir dans ce dernier cas que le seul segment DFBD qui soit égal au segment donné DGED ; puisque tout autre segment qui aura pour l'une de ses extremités le point donné D, sera plus grand ou moindre que le segment DFBD, selon que son autre extremité sera plus proche ou plus éloignée du point D que n'est le point F. D'où il suit que si deux segmens DGED, DFBD, qui ont une extremité commune D, sont égaux

entr'eux ; & que si l'on mene par le point *D* une parallele à la droite *GF* qui joint leurs autres extremités, elle sera tangente en *D*.

COROLLAIRE IV.

208. On tire du Corollaire précédent une maniere toute nouvelle & fort aisée de mener une Tangente par un point donné *D* sur une Section Conique donnée.

Car ayant tiré par ce point deux droites quelconques *DB*, *DE*, qui rencontrent la Section aux points *B*, *E*, on menera par le point *B* une parallele *BG* à *DE*, & par le point *E* une parallele *EF* à *BD*, lesquelles rencontrent la Section aux points *G*, *F*, que l'on joindra par une ligne droite *GF*, à laquelle on tirera par le point *D* une parallele qui sera la tangente cherchée ; puisque les segmens *DGED*, *DFBD*, étant égaux chacun au même segment *BEDB*, le seront entr'eux.

PROPOSITION IV.

Theorême.

FIG. 113. 114. & 115. 209. *S'il y a dans une Ellipse, dans une Hyperbole, ou dans les Hyperboles opposées deux lignes droites* BD, EF, *paralleles entr'elles & terminées par la Section ; & qu'on tire du centre* C *les demi-diametres* CB, CE, CD, CF, *les Secteurs Elliptiques ou Hyperboliques* CBE, CDF, *seront égaux entr'eux.*

Car menant par les points de milieu *H*, *K*, des droites *BD*, *EF*, le diametre *CK*, les triangles *CHB*, *CHD*, & *CKE*, *CKF*, seront égaux entr'eux ; puisqu'ils ont le même sommet *C*, & que leurs bases *HB*, *HD*, & *KE*, *KF*, sont égales. Par conséquent (*fig.* 114.) $KHBE + CBE = CKE - CHB = CKF - CHD =$ $= KHDF + CDF$; & (*fig.* 113. 115.) $KHBE - CBE$ $= \pm CHB \mp CKE = \pm CHD \mp CKF = KHDF -$ CDF. Donc puisque les Trapeses Coniques *KHBE*,

KHDF, sont * égaux, il s'ensuit que les Secteurs Elliptiques ou Hyperboliques *CBE*, *CDF*, le seront aussi. * *Art.* 205.

COROLLAIRE I.

210. Si la Section est une Ellipse, ou une Hyperbole; & que la ligne *BD* parallele à *EF*, devienne tangente en *A*; il est clair que les Secteurs *CAE*, *CAF*, seront égaux entr'eux. Car prolongeant le demi-diametre *CA* jusqu'à ce qu'il rencontre la ligne *EF* au point *K*, cette ligne sera coupée en deux également en ce point; & par conséquent les triangles *CKE*, *CKF*, seront égaux. Or les trilignes Coniques *AKE*, *AKF*, le sont * aussi. Donc &c. FIG. 113. 114. * *Art.* 209.

COROLLAIRE II.

211. DE-LA on voit que pour diviser en deux parties égales un Secteur Elliptique ou Hyperbolique quelconque *CEF*; il n'y a qu'à mener le demi-diametre *CA* qui divise par le milieu en *K* la soûtendante *EF* de ce Secteur. Ce qui donne encore les Secteurs *CBE*, *CDF*, égaux entr'eux, en supposant *BD* parallele à *EF*. Car ayant de cette maniére les Secteurs *CAE*, *CAF*, & *CAB*, *CAD*, égaux entr'eux, les Secteurs *CBE*, *CDF*, qui en sont les differences, doivent aussi être égaux entr'eux.

PROPOSITION V.

Theorême.

212. SOIT *un demi-cercle* ADH, *qui ait pour diametre le premier ou grand axe* AH *d'une demie Ellipse* ABH; *soit menée par un point quelconque* P *de l'axe* AH, *une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point* M, *& le cercle au point* N; *par où & par le centre* C *soient tirées les droites* CM, CN. *Je dis que le Secteur Elliptique* FIG. 115.

CAM est au Secteur circulaire CAN, comme la moitié CB du petit axe de l'Ellipse, est à la moitié CA ou CD du grand.

* Art. 42. & 55. Car par la proprieté * de l'Ellipse $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: AP \times PH . AC \times CH$ ou $\overline{CA}^2$, & par la proprieté du cercle $\overline{PN}^2 . \overline{CD}^2 :: AP \times PH . AC \times CH$ ou $\overline{CA}^2$. Donc $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: \overline{PN}^2 . \overline{CD}^2$. ou $\overline{PM}^2 . \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 . \overline{CD}^2$. Et en tirant les racines quarrées, $PM . PN :: CB . CD$ ou CA. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit que tombe la perpendiculaire PMN, il

* Art. 186. s'ensuit * que l'espace Elliptique entier $ABHA$ est au demi cercle $ADHA$, & la portion APM de cet espace à la portion APN du demi cercle, comme CB est à CD ou à CA. Mais le triangle rectangle CPM est au triangle rectangle CPN qui a la même hauteur, comme la base PM est à la base PN, c'est à dire, comme CB est à CD ou à CA; & par conséquent l'espace Elliptique APM plus ou moins le triangle CPM (plus lorsque AP est moindre que AG, & moins lorsqu'elle est plus grande) c'est à dire, le Secteur Elliptique CAM sera à l'espace circulaire APN plus ou moins le triangle CPN, c'est à dire, au Secteur circulaire CAN, comme CB est à CD ou à CA. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

213. COMME le Secteur de cercle CAN est égal au rectangle de l'arc AN par la moitié du rayon CA ou CD; il s'ensuit que le Secteur Elliptique CAM est aussi égal au rectangle de ce même arc AN par la moitié de CB.

COROLLAIRE II.

214. SI l'on mene par un point quelconque G du grand axe AH autre que le point P, une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point E, & le

cercle au point *F*; je dis que les Secteurs Elliptiques *ACE*, *ACM*, sont entr'eux, comme les Secteurs circulaires *ACF*, *ACN*. Car *ACM*. *ACN* :: *CB*. *CD*. Et de même *ACE*. *ACF* :: *CB*. *CD*. Et partant *ACM*. *ACN* :: *ACE*. *ACF*. Et *ACM*. *ACE* :: *ACN*. *ACF*. D'où l'on voit que pour trouver un Secteur Elliptique *ACM*, qui soit au Secteur Elliptique *ACE* en raison donnée; il n'est question que de trouver un Secteur circulaire *ACN* qui soit en raison donnée au Secteur *ACF*, ou ce qui est la même chose, de diviser en raison donnée l'arc *ANF* ou l'angle *ACF*.

PROPOSITION VI.

Theorême.

215. S'IL *y a deux demi-Hyperboles* AM, AN, *ou* BM, DN, *qui ayent pour centres le même point* C, *pour un de leurs demi diametres la même droite* CA, *&* *pour les deux demi-diametres conjugués au demi-diametre* CA, *deux droites quelconques* CB, CD, *situées sur la même ligne; &* *qu'on mene par un point quelconque* P *du demi-diametre* CA *(prolongé s'il est necessaire) une droite parallele à* CD, *laquelle rencontre les Hyperboles aux points* M, N; *par lesquels &* *par le centre* C, *soient tirées les droites* CM, CN: *je dis que les Secteurs Hyperboliques* CAM, CAN, *ou* CBM, CDN, *seront entr'eux comme les demi-diametres conjugués* CB. CD. FIG. 117. 118.

On aura par la proprieté * des deux Hyperboles *AM*, *AN*, ou *BM*, *DN*, ces deux proportions $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 . \overline{CA}^2 :: \overline{PN}^2 . \overline{CD}^2$. Et par conséquent $\overline{PM}^2 . \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 . \overline{CD}^2$. Et en prenant les racines quarrées, *PM*. *PN* :: *CB*. *CD*. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit que tombe la parallele *PMN*, il s'ensuit * que les espaces Hyperboliques *APM*, *APN*, ou *CPMB*, *CPND*, sont entr'eux comme *CB* est à *CD*. Mais les triangles *CPM*, *CPN*, sont en-

* Art. 81. & 118.

* Art. 186.

tr'eux, comme leurs bases PM, PN, (puisqu'ils sont situées entre les mêmes paralleles CD, PN), ou comme les demi diametres conjugués CB, CD. Et par conséquent (*fig.* 117.) $CB. CD :: CPM - APM. CPN - APN :: CAM. CAN$. Ou bien (*fig.* 118.) $CB. CD :: CPMB - CPM. CPND - CPN :: CBM. CDN$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

216. Si les deux demi diametres conjugués CA, CD, sont égaux entr'eux, l'Hyperbole AN ou DN sera équilatere. Et si l'on avoit trouvé le moyen de quarrer les Secteurs Hyperboliques CAN, ou CDN, on auroit aussi la quadrature des Secteurs CAM, ou CBM, qui ont pour bases des portions AM, ou BM d'une autre Hyperbole, dont le demi-diametre conjugué CB peut être pris de telle grandeur qu'on veut; puisque le rapport des Secteurs Hyperboliques CAM, CAN, ou CDN, CBM, étant exprimé par les droites CD, CB, est donné. D'où l'on voit que si l'on avoit la quadrature de l'Hyperbole équilatére, on auroit aussi celle de toutes les autres Hyperboles : de même qu'ayant * la quadrature du Cercle, on auroit celle de toutes les Ellipses.

* Art. 212.

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 119.

217. *Si l'on prend sur une asymptote* CN *d'une Hyperbole* EBDF, *deux parties* CK, CL, *qui soient entr'elles en même raison que deux autres parties quelconques* CG, CH, *de la même asymptote ; & qu'ayant mené les paralleles* GF, HD, KB, LE, *à l'autre asymptote* CP, *lesquelles rencontrent l'Hyperbole aux points* F, D, B, E, *on tire les demi-diametres* CF, CD, CB, CE : *je dis que les deux Secteurs*

Secteurs Hyperboliques CBE, CDF, *seront égaux entr'eux.*

Ayant mené les deux droites *BD*, *EF*, qui rencontrent les asymptotes aux points *M*, *O*, *N*, *P*; les paralleles *KB*, *HD*, donneront cette proportion, *MB*. *MK* :: *DO*. *CH*. Les paralleles *LE*, *GF*, donneront aussi cette autre proportion, *NE*. *NL* :: *FP*. *CG*. Et partant puisque * *MB*=*DO*, & *NE*=*FP*, il s'ensuit que *MK*=*CH*, & *NL*=*CG*. Or par la supposition *CG* ou *LN*. *CH* ou *KM*::*CK*. *CL* ::* *LE*. *KB*. Et partant *LN*. *LE* :: *KM*. *KB*. Donc les lignes *NE*, *MB*, c'est à dire, les deux droites *EF*, *BD*, dont elles sont parties, seront paralleles entr'elles. Donc * les Secteurs Hyperboliques *CBE*, *CDF*, sont égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 95.
* *Art.* 100.
* *Art.* 209.

COROLLAIRE I.

218. Si les parties *CK*, *CL*, de l'asymptote *CN*, sont en même raison que deux parties quelconques *CS*, *CT* de l'autre asymptote *CP*; & qu'on mene les paralleles *KB*, *LE*, à l'asymptote *CP*, & les paralleles *SD*, *TF*, à l'autre asymptote *CN*; il est clair que les Secteurs Hyperboliques *CDF*, *CBE*, seront aussi égaux entr'eux. Car ayant mené les paralleles *FG*, *DH*, à l'asymptote *CP*, on aura * *CG*. *CH* :: *HD* ou *CS*. *GF* ou *CT* * :: *CK*. *CL*. Donc &c.

* *Art.* 100.
* *Hyp.*

COROLLAIRE II.

219. Si l'on prend sur la même asymptote la partie *CK* troisiéme proportionnelle à deux parties quelconques *CG*, *CH*; on prouvera par un raisonnement semblable à celui du Theorême que la ligne *BF* est parallele à la tangente qui passe par le point *D*; & qu'ainsi* les Secteurs Hyperboliques *CFD*, *CDB*, sont égaux entr'eux. D'où il suit que si l'on prend sur une asymptote autant de parties qu'on voudra *CG*, *CH*, *CK*, *CL*, &c. en progression geometrique continuë, d'où partent les paralleles *GF*, *HD*, *KB*, *LE*, &c. à l'au-

* *Art.* 216.

T

tre asymptote, les Secteurs Hyperboliques CFD, CDB, CBE, &c. seront tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

220. DE-LA on voit que si CH est la premiere de deux moyennes geometriquement proportionnelles entre les extrêmes CG, CL; & qu'on tire les droites GF, HD, LE, paralleles à l'autre asymptote; le Secteur CDF, sera au Secteur CFE, comme 1 est à 3. De même, si CH est la premiere de trois moyennes proportionnelles entre CG, CL; le Secteur CDF sera au Secteur CFE, comme 1 est à 4. Et en général, si la lettre m marque un nombre entier quelconque, & que GH soit la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre les extrêmes CG, CL, que le nombre $m-1$ contient d'unités; le Secteur CDF, sera au Secteur CFE, comme 1 est au nombre m.

REMARQUE.

221. ON peut ici donner une idée fort exacte de ce qu'on appelle *Logarithmes* dans l'Arithmetique, & de l'extrême facilité qu'ils apportent au calcul, lorsqu'il s'agit d'operer sur de fort grands nombres. Voici comment:

Si l'on suppose que CG, exprime l'unité, & que CL étant décuple de CG, c'est à dire, 10, le Secteur Hyperbolique CFE, soit divisé en 10000000000 parties égales. Et si l'on compose une table divisée en deux colomnes, dont la premiere renferme de suite tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & l'autre des nombres artificiels, placés vis-à-vis, & qui soient tels que CH, exprimant un nombre quelconque naturel, le nombre artificiel placé vis-à-vis, exprime le nombre des parties que le Secteur Hyperbolique CDF contient par rapport au nombre des parties que contient le Secteur

CFE : les nombres artificiels seront appellés les *Logarithmes* des nombres naturels ausquels ils répondent. Cela posé,

1°. Si l'on propose de multiplier deux nombres naturels quelconques *CH*, *CK*, l'un par l'autre, il n'y aura qu'à prendre dans la table leurs Logarithmes qui expriment les Secteurs *CFD*, *CFB*, & ajoûtant ensemble ces deux Logarithmes, on aura le Logarithme qui exprime le Secteur *CFE*, vis-à-vis duquel sera placé le nombre naturel *CL* produit de la multiplication des deux nombres *CH*, *CK*.

2°. Si l'on propose de diviser le nombre *CL* par le nombre *CK*, il n'y aura qu'à retrancher le Logarithme *CFB* du Diviseur *CK*, du Logarithme *CFE* du nombre à diviser *CL*, pour avoir le Logarithme *CBE* ou *CFD* du quotient *CH*.

3°. Si l'on propose d'extraire une racine quelconque du nombre *CL*, par exemple la cubique, il n'y aura qu'à diviser son Logarithme *CFE* en trois parties égales, pour avoir le Logarithme *CFD* vis-à-vis duquel est placé le nombre *CH*, qui est la racine cubique cherchée.

Tout cela est une suite de ce que les Secteurs Hyperboliques *CFD*, *CBE*, sont égaux entr'eux, lorsque *CG*. *CH* :: *CK*. *CL*. Et que les Secteurs *CFD*, *CDB*, *CBE*, &c. sont aussi égaux entr'eux, lorsque *CG*. *CH* :: *CH*. *CK* :: *CK*. *CL* :: &c. Il est donc évident que par le moyen de cette table, on pourra abreger extrêmement les operations de l'Arithmethique, lorsqu'il s'agit d'operer sur de grands nombres, comme dans les calculs Astronomiques.

Comme l'on n'a pû jusqu'à present trouver en nombres exacts, le rapport des Secteurs Hyperboliques *CFD*, *CFB*, &c. au Secteur *CFE*, on s'est contenté d'exprimer ce rapport en nombres fort approchans ; & par le moyen de ces nombres qu'on appelle *Artificiels*, & des nombres naturels qu'on a pla-

cés vis-à-vis, on a composé la Table des Logarithmes qui a les proprietés qu'on vient d'expliquer. Or dans la supposition que le Secteur *CFE* Logarithme de *CL* (10) contient 1000000000 parties égales, on trouvera que le parallelogramme *CGFT* contient plus de 434294481 8 de ces parties, & moins de 4342944819. D'où l'on voit qu'un Secteur Hyperbolique quelconque *CBF*, est au parallelogramme *CGFT* à peu près comme le Logarithme du nombre *CK* trouvé dans la Table, est au nombre 4342944819, & cela en prenant les Logarithmes de dix caractéres outre le caractéristique.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

Fig. 120. 222. S'il *y a sur chaque asymptote deux parties* CG, CL, *&* CR, CS, *qui soient telles que* $\sqrt[m]{CG} . \sqrt[m]{CL} :: \sqrt[n]{CR} . \sqrt[n]{CS}$; *& qu'on tire les droites* GF, LE, RT, SV, *paralleles aux asymptotes : je dis que le Secteur* CFE, *sera au Secteur* CTV, *comme* m *est à* n. *Les lettres* m *&* n *marquent des nombres entiers quelconques.*

Car si l'on fait $\sqrt[m]{CG} . \sqrt[m]{CL} :: CG . CH$. Et $\sqrt[n]{CR} . \sqrt[n]{CS} :: CR . CQ$. Et qu'on tire les droites *HD*, *QN*, paralleles aux asymptotes ; il est clair que les Secteurs
* Art. 218. Hyperboliques *CFD*, *CTN*, seront égaux * entr'eux,
* Hyp. puisque * *CG. CH :: CR. CQ.* Or selon la nature des Progressions geometriques, la ligne *CH* sera la premiére d'autant de moyennes proportionnelles entre *CG* & *CL* que le nombre $m-1$ contient d'unités, & de même la ligne *CQ* sera la premiére d'autant de moyennes proportionnelles entre *CR* & *CS* que le nombre $n-1$ con-
* Art. 220. tient d'unités. Donc * *CFE. CFD :: m. 1.* Et *CTN* ou *CFD. CTV :: 1. n.* Et par conséquent le Secteur *CFE* est au Secteur *CTV* en raison composée de *m* à *1*, & de *1* à *n*, c'est à dire, comme le nombre *m* est au nombre *n*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

223. DE-LA on voit qu'un Secteur Hyperbolique *CFE* étant donné avec un point quelconque *T* de l'Hyperbole, il ne faut pour trouver un autre point *V* de la même Hyperbole, tel que le Secteur *CFE* soit au Secteur *CTV*, comme *m* est à *n*, que prendre *CS* en sorte que $\sqrt[m]{CG}.\sqrt[m]{CL}::\sqrt[n]{CR}.\sqrt[n]{CS}$, ou (ce qui revient au même) $\sqrt[m-n]{CG}.\sqrt[m-n]{CL}::CR.CS$. C'est à dire, qu'il faut prendre $CR = CR \times \sqrt[m]{\frac{\overline{CL}^n}{\overline{CG}^n}}$.

PROPOSITION IX.

Theorême.

224. SI *l'on mene par les extremités* B, F, *d'un Secteur Hyperbolique quelconque* CBF, *les droites* BK, FG, *paralleles à une asymptote* CS, *& terminées par l'autre* CL; *je dis que le Secteur Hyperbolique* CBF *est égal à l'espace hyperbolique* BKGF *compris entre les paralleles* BK, FG, *à une asymptote* CS, *la partie* GK *de l'autre asymptote* CL, *& la portion* BF *de l'Hyperbole.* FIG. 121.

Car si l'on retranche des triangles égaux * *CKB*, *CGF*, le même triangle *CGA* (le point *A* est le point d'intersection des deux droites *FG*, *CB*) & qu'on ajoûte aux deux restes *BKGA*, *CAF*, le même espace hyperbolique *BAF*, on formera d'une part l'espace *BKGF*, & de l'autre le Secteur *CBF* qui seront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 99.

COROLLAIRE I.

225. SI l'on eut mené les lignes *BQ*, *FO*, paralleles à l'asymptote *CL*, & terminées par l'asymptote *CS*, on auroit prouvé de même que le Secteur Hyperbolique

CBF est égal à l'espace hyperbolique *BQOF*; d'où l'on voit que les espaces ou Trapeses hyperboliques *BKGF*, *BQOF*, sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

226. DE-LA il est évident que tout ce qu'on vient de démontrer dans les articles 217, 218, 219, 220, 221, 222, & 223, des Secteurs Hyperboliques, se doit aussi entendre de ces sortes de Trapeses; puisqu'ils leurs sont égaux.

PROPOSITION X.

Theorême.

FIG. 121. 227. SOIENT *deux differentes Hyperboles* BMF, HND, *qui ayent les mêmes asymptotes* CL, CS, *& soient menées par deux points quelconques* G, K, *d'une asymptote deux paralleles* GDF, KHB, *à l'autre. Je dis que l'espace hyperbolique* HKGD *est à l'espace hyperbolique* BKGF, *comme la puissance de l'Hyperbole* HND, *est à la puissance de l'Hyperbole* BMF.

Car ayant mené par un point quelconque *P* de la partie *GK*, une parallele aux deux droites *GD*, *KH*, laquelle rencontre l'Hyperbole *BMF* au point *M*, & l'Hyperbole *HND* au point *N*; & nommé la puissance de l'Hyperbole *HND*, *aa*; celle de l'Hyperbole *BMF*, *bb*; & l'indéterminée *CP*, *x*; on aura

* Art. 101. * $PN = \frac{aa}{x}$, & $PM = \frac{bb}{x}$; & partant $PN . PM :: aa . bb$.

Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la

* Art. 186. partie *GK* que tombe le point *P*; il s'ensuit * que l'espace hyperbolique *HKGD*. *BKGF* :: *aa*. *bb*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

228. LORSQUE les puissances des Hyperboles *HND*, *BMF*, sont entr'elles comme le nombre *m* est au nom-

bre n; on pourra toûjours trouver dans l'Hyperbole *HND* un Trapese hyperbolique *RSVT* égal à un Trapese hyperbolique *GKBF* de l'autre *BMF*, les droites *CG*, *CK*, *CR*, étant données. Car il est clair * que le Trapese *GKHD* est au Trapese *GKBF*, comme m est à n; & qu'ainsi toute la difficulté se réduit à trouver dans la même Hyperbole *HND*, le Trapese *RSVT*, qui soit au Trapese *GKHD*, comme le nombre n est au nombre m: & c'est ce qui se fera * en prenant *CS*, telle que $\sqrt[m-n]{CG}.\sqrt[m-n]{CK}::CR.CS$.

* Art. 222. & 225.

* Art. 223. & 226.

DÉFINITIONS.

4.

Soit une ligne droite indéfinie *AC*, qui ait pour origine le point fixe *A*; & soit une ligne courbe *AMB* telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques *M* une droite *MP* qui fasse avec *AC* un angle donné *APM*, & ayant nommé les indéterminées *AP*, x; *PM*, y; on ait toûjours $ax=yy$ (la lettre a marque une ligne donnée): il est clair * dans cette supposition que la ligne courbe *AMB* est une Parabole qui a pour diametre la ligne *AC*, pour une ordonnée à ce diametre la droite *PM*, & pour parametre de ce diametre la donnée a. Mais si l'on suppose à present que la nature de la courbe *AMB* soit exprimée par l'équation $y^3=aax$, ou par cette autre $y^3=axx$; cette ligne courbe sera nommée *Parabole cubique* ou *du troisiéme degré*; parce que celle des deux indéterminées x ou y, dont la puissance est la plus élevée, monte au troisiéme degré. De même si l'équation est $y^4=a^3x$, ou $y^4=ax^3$; la ligne courbe *AMB* est appellée *Parabole du quatriéme degré*; parce que l'indéterminée y dont la puissance est la plus haute, monte au quatriéme degré. Il en est ainsi de toutes les autres à l'infini.

FIG. 113.

* Art. 19.

5.

Soit comme dans la définition précédente une ligne droite *AC* qui ait pour origine le point fixe *A*; & soit

FIG. 114.

une ligne courbe BM, telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M la droite MP qui fasse avec AC un angle donné APM, & ayant nommé AP, x; PM, y; on ait toûjours $xy = aa$ (la lettre a marque une ligne donnée) : il est clair * que cette ligne courbe sera une Hyperbole, qui aura pour l'une de ses asymptotes la ligne AC, & pour l'autre, la ligne AD parallele à PM, & dont la puissance sera le quarré aa. Mais si l'équation qui exprime la nature de la courbe BM est $xxy = a^3$; cette ligne courbe sera nommée *Hyperbole cubique* ou *du troisiéme degré*, parce que le produit xxy des deux indéterminées x & y, a trois dimensions. De même, si l'équation étoit $x^3y = a^4$; la ligne courbe BM seroit une *Hyperbole du quatriéme degré*; parce que le produit x^3y à quatre dimensions. Il en est ainsi de toutes les autres à l'infini.

* Art. 101.

COROLLAIRE I.

Fig. 123. & 124.

229. Si l'on suppose que la lettre m marque un nombre entier quelconque qui soit l'exposant de la puissance de l'indéterminée AP (x); & de même que la lettre n marque l'exposant de la puissance de l'autre indéterminée PM (y) : il est clair que l'équation $y^n = x^m \times a^{n-m}$ (ou simplement $y^n = x^m$, en faisant pour abreger la donnée $a = 1$) exprimera la nature des Paraboles de tous les degrés à l'infini. On voit de même que l'équation $x^m y^n = a^{m+n}$ (ou simplement $x^m y^n = 1$, en faisant $a = 1$) exprime en general la nature des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.

COROLLAIRE II.

230. Si l'on mene par l'origine fixe A de la ligne AC une ligne droite indéfinie AD parallele à PM; & qu'ayant tiré MK parallele à AC, qui rencontre AD au point K, on nomme les indéterminées AK, x; KM, y; il

il est clair que l'indéterminée x qui exprimoit auparavant la ligne AP ou MK, devient à present y; & qu'au contraire y qui exprimoit PM ou AK, devient à present x. D'où il suit.

1°. Que si la courbe AMB est une Parabole ordinaire, elle aura pour équation $yy = ax$ ou $xx = ay$, selon qu'on rapportera ses points à ceux de la ligne AC ou AD; & de même que la Parabole cubique qui a pour équation $y^3 = axx$ lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne AC, aura pour équation $x^3 = aay$ lorsqu'on les rapporte à ceux de la ligne AD; & en general que si la ligne courbe AMB a pour équation $y^n = x^m a^{n-m}$ étant rapportée à la ligne droite AC, cette même courbe aura pour équation $x^n = y^m a^{n-m}$ (l'on suppose que n surpasse m) étant rapportée à la ligne AD. Fig. 123.

2°. Que l'Hyperbole ordinaire a toûjours la même équation $xy = aa$, soit qu'on la rapporte à la ligne AC ou à la ligne AD; que l'Hyperbole cubique qui a pour équation $xxy = a^3$ étant rapportée à AC, aura pour équation $xyy = a^3$ étant rapportée à l'autre ligne AD; & en general que l'Hyperbole qui a pour équation $x^m y^n = a^{m+n}$ lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne AC, aura pour équation $x^n y^m = a^{m+n}$ lorsqu'on les rapporte à ceux de la ligne AD. Fig. 124.

Corollaire III.

231. De-là il est évident qu'il y a deux Paraboles cubiques dont l'une a pour équation $y^3 = aax$ ou $x^3 = aay$, & l'autre $y^3 = axx$ ou $x^3 = ayy$; au lieu qu'il n'y a qu'une seule Hyperbole cubique $xxy = a^3$ ou $xyy = a^3$. Car les indéterminées x & y ne peuvent être combinées que des quatre premieres manieres pour exprimer les Paraboles cubiques ou du troisiéme dégré; & des deux secondes pour exprimer les Hyperboles cubiques. Or comme les quatre premieres égalités appartiennent à deux differentes courbes, & les deux secondes à la même; il s'ensuit, &c. On peut trouver par

la même voïe le nombre des Paraboles ou des Hyperboles du quatriéme, cinquiéme degré, &c.

COROLLAIRE IV.

FIG. 124. 232. NON-SEULEMENT l'Hyperbole ordinaire a pour asymptotes les lignes droites indéfinies *AC*, *AD*; mais encore celle de tous les degrés à l'infini. Car soit l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ ou $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$ ($AP = x$, $PM = y$) qui exprime la nature de telle Hyperbole qu'on voudra, lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne *AC*; il est manifeste que plus *AP* (x) augmente, plus au contraire y^n, & par conséquent *PM* (y) diminuë; de sorte que x étant infiniment grande, *PM* (y) devient nulle ou zero : c'est à dire que l'Hyperbole *BM* & la ligne *AC*, étant prolongées l'une & l'autre à l'infini, s'approchent toûjours de plus en plus jusqu'à ce qu'enfin elles se joignent dans l'infini même; ce qui constituë l'essence d'une asymptote. Maintenant si l'on rapporte les points de la même Hyperbole à ceux de la ligne *AD*, on aura $x^n y^m = a^{m+n}$ ou $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$ ($AK = x$, $KM = y$); d'où il suit que plus *AK* (x) devient grande, plus au contraire *KM* (y) devient petite, & cela à l'infini; & qu'ainsi la ligne *AD* est encore une asymptote de la même Hyperbole.

PROPOSITION XI.

Problême.

FIG. 123. 233. SOIT *proposé de mener d'un point donné* M *sur la seconde Parabole cubique* AMB, *dont la nature est exprimée par l'équation* $y^3 = axx$, *la tangente* MT.

Ayant supposé l'arc *MN* infiniment petit, & mené *NQ* parallele à *PM*, & *MR* parallele à *AC*: le petit triangle *MRN* sera semblable au grand *TPM*; puisque le

petit arc MN peut être regardé * comme la prolongation de la tangente TM. Cela posé, on nommera la soûtangente cherchée TP, s; & la petite droite PQ ou MR, e; ce qui donnera $RN = \frac{ey}{s}$, à cause des triangles semblables TPM, MRN. Or si l'on met le cube de QN $(y + \frac{ey}{s})$ à la place de y^3 dans l'équation $y^3 = axx$ qui exprime la nature de la courbe AMB; & à la place de xx, le quarré de AQ $(x + e)$: il est évident qu'on formera une équation $y^3 + \frac{3ey^3}{s} + \frac{3eey^3}{ss} + \frac{e^3y^3}{s^3} = axx + 2eax + eea$ qui exprimera le rapport de AQ à QN. Et si l'on retranche par ordre des deux membres de cette derniere équation ceux de la premiere, & qu'on divise ensuite par e, on trouvera $\frac{3y^3}{s} + \frac{3ey^3}{ss} + \frac{eey^3}{s^3} = 2ax + ea$; dans laquelle effaçant tous les termes où e se rencontre, parce que PQ (e) étant infiniment petite ou nulle, ces termes sont nuls par rapport aux autres; il vient enfin $\frac{3y^3}{s} = 2ax$; & partant PT $(s) = \frac{3y^3}{2ax} = \frac{3}{2}x$ en mettant pour y^3 sa valeur axx. *Ce qu'il falloit trouver.*

* Art. 189.

REMARQUE.

234. Si l'on fait attention sur le calcul précédent, on verra avec évidence qu'en substituant à la place de la puissance de y, une pareille puissance de $y + \frac{ey}{s}$, on n'a besoin que des deux premiers termes de cette puissance. Car tous les autres étant multipliés par les puissances de e, ils renferment chacun e, ou des puissances de e, dans la derniere équation que l'on trouve à la fin de l'operation; & doivent par conséquent être effacés. Il en est de même lorsqu'on substituë à la place de la puissante de x, une pareille puissance de $x + e$. Mais si l'on forme de suite

toutes les puissances du binome $x + e$, on aura pour les deux premiers termes de la seconde puissance $x^2 + 2ex$; de la troisiéme $x^3 + 3exx$; de la quatriéme $x^4 + 4ex^3$; de la cinquiéme $x^5 + 5ex^4$; & ainsi de suite à l'infini. De sorte que les deux premiers termes d'une puissance quelconque m de $x + e$, seront $x^m + mex^{m-1}$. On trouvera de même que les deux premiers termes d'une puissance quelconque n du binome $y + \frac{ey}{s}$, seront $y^n + \frac{ney^n}{s}$.

COROLLAIRE.

235. De-là on voit que pour trouver une expression générale de la soûtangente PT (s) des Paraboles de tous les degrés à l'infini; il n'y aura qu'à se servir de l'équation générale $y^m = x^m a^{n-m}$, ou (prenant a pour l'unité) $y^n = x^m$ qui exprime la nature de toutes ces Paraboles. Voici comment.

On mettra dans l'équation générale $y^n = x^m$ à la place de y^n, les deux premiers termes de la puissance n de $y + \frac{ey}{s}$, c'est à dire, $y^n + \frac{ney^n}{s}$; & de même à la place de x^m, les deux premiers termes de la puissance m de $x + e$, c'est à dire, $x^m + mex^{m-1}$: ce qui donnera $y^n + \frac{ney^n}{s} = x^m + mex^{m-1}$. Et retranchant par ordre les membres de la premiere équation de ceux de celle-ci, & divisant ensuite par e, l'on aura $\frac{ny^n}{s} = mx^{m-1}$; & partant $s = \frac{ny^n}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x$ en mettant pour y^n sa valeur x^m.

PROPOSITION XII.

Problême.

FIG. 124. 236. *Mener les tangentes des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.*

La même préparation étant faite que dans la propo-

sition précédente, on mettra dans l'équation générale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime le rapport de AP (x) à PM (y), à la place de x^m les deux premiers termes de la puissance m de AQ $(x+e)$ c'est à dire, $x^m + mex^{m-1}$; & de même à la place de y^n les deux premiers termes de la puissance n de QN $(y - \frac{ey}{s})$ c'est à dire $y^n - \frac{ney^n}{s}$: ce qui par la multiplication donne cette autre équation $x^m y^n + mey^n x^{m-1} - \frac{ney^n x^m}{s} - \frac{mneey^n x^{m-1}}{s} = a^{m+n}$ qui exprimera le rapport de AQ à QN. Et retranchant par ordre des deux membres de cette derniere équation, ceux de la premiere; & divisant ensuite par ey^n; il vient $mx^{m-1} - \frac{nx^m}{s} - \frac{mnex^{m-1}}{s} = 0$; dans laquelle équation effaçant le terme $-\frac{mnex^{m-1}}{s}$ qui est nul par rapaux deux autres, parce qu'il renferme dans son expression la ligne infiniment petite ou nulle PQ (e), on trouve en transposant à l'ordinaire PT $(s) = \frac{nx^m}{mx^{m-1}}$ $= \frac{n}{m}x$.

COROLLAIRE.

237. Il est donc évident que pour mener la Tangente MT d'un point donné M sur une Parabole ou une Hyperbole de tel degré qu'on voudra; dont l'équation est pour la Parabole $y^n = x^m a^{n-m}$, & pour l'Hyperbole $x^m y^n = a^{m+n}$: il ne faut que prendre la soûtangente $PT = \frac{n}{m} AP$ du même côté du point A par rapport au point P, lorsque c'est une Parabole; & du côté opposé, lorsque c'est une Hyperbole. FIG. 123. & 124.



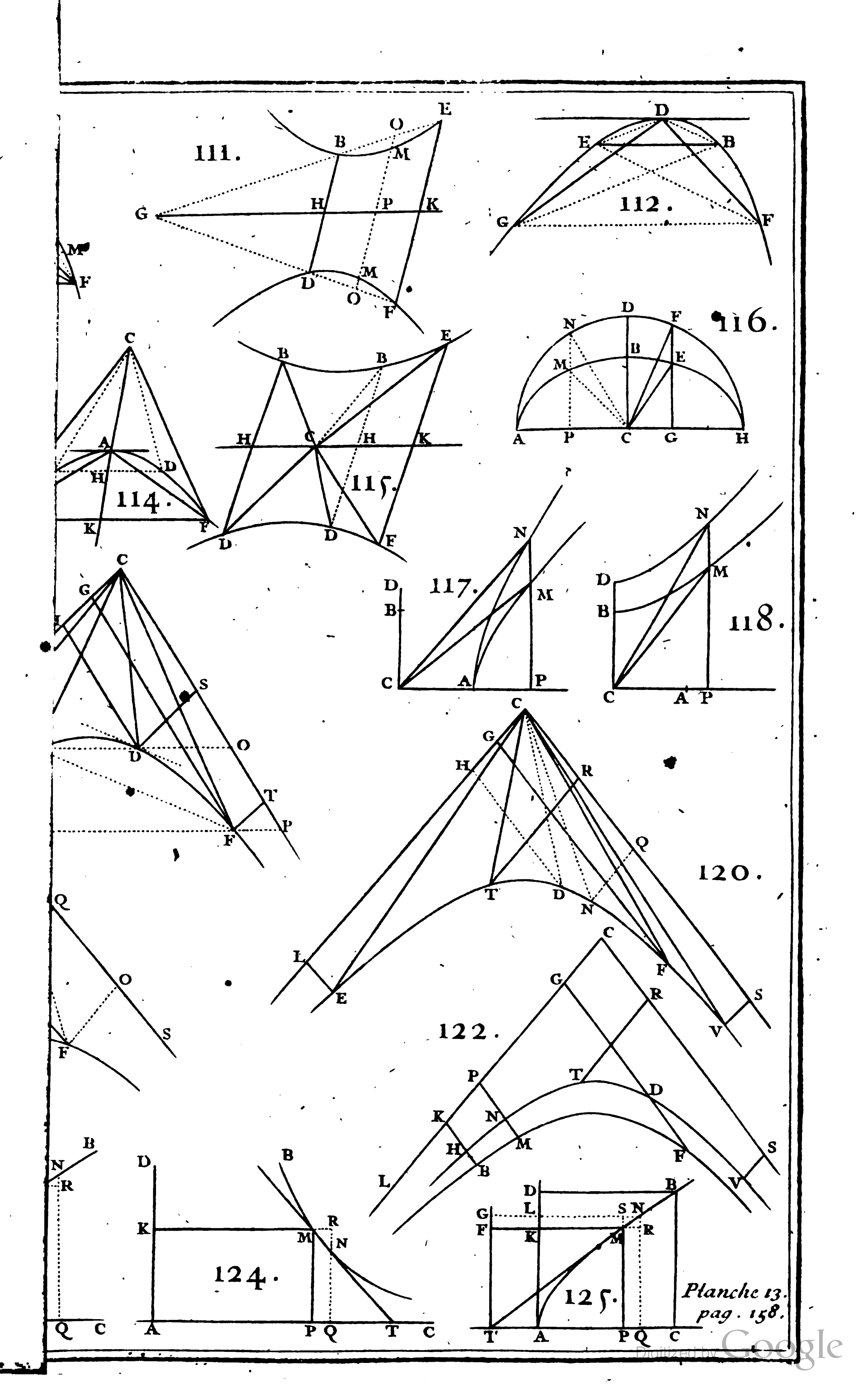
PROPOSITION XIII.

Theorême.

FIG. 125. 238. SOIT *comme dans la definition quatriéme, une Parabole* AMB *de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'équation* $y^n = x^m a^{n-m}$: *soit menée d'un de ses points quelconques* B *la droite* BC *qui fasse avec* AC *l'angle donné* ACB, *& soit achevé le parallelogramme* ACBD. *Je dis que le parallelogramme circonscrit* ACBD *est à l'espace Parabolique* ACBMA *compris par les droites* AC, CB, *& par la portion de Parabole* AMB; *comme* m + n *est à* n.

Il faut prouver que ACBD. ACBMA :: m + n. n.

Ayant supposé sur la portion de Parabole *AMB* l'arc *MN* infiniment petit, où si l'on aime mieux, indéfiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune portion donnée de la Parabole, si petite qu'elle puisse être ; & mené les droites *MP*, *NQ*, paralleles à *BC* ; & *MK*, *NL*, paralleles à *AC* ; lesquelles forment par leurs rencontres le petit parallelogramme *MRNS* : on tirera la tangente *MT* qui rencontre le diametre *AC* au point *T*, par où l'on menera une parallele à *CB*, qui rencontre les lignes *MK*, *NL*, aux points *F*, *G*. Cela fait,
* Art. 189. on regardera * le petit arc *MN* comme l'un des petits côtés du Polygone qui compose la portion de Parabole *AMB*, & la tangente *MT* comme le prolongement de ce petit côté ; de sorte que l'on a deux triangles rectilignes *NRM*, *MPT*, qui sont semblables : c'est pourquoi *NR* ou *MS*. *RM* :: *MP*. *PT* ou *MF*. Et partant le parallelogramme *PMRQ* est égal au parallelogramme *FMSG* ; puisque les angles *PMR*, *FMS*, sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont réciproquement proportionnels.
* Art. 137. Or * *MF* ou $PT = \frac{n}{m} AP$ ou $\frac{n}{m} MK$. Donc aussi le parallelogramme *FMSG* ou son égal $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$. Et comme cela arrive toûjours en quel-


111.
112.
114.
115.
116.
117.
118.
120.
122.
124.
125.
Planche 13.
pag. 158.

que endroit de la portion de Parabole *AMB* que tombe le petit arc *MN*; il s'ensuit que la somme de tous les petits parallelogrammes *PMRQ*, c'est à dire, * le Triligne parabolique $ACBMA = \frac{n}{m} ADBMA$ somme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m} KMSL$. On aura donc *ADBMA*. *ACBMA* :: *m*. *n*. Et par conséquent *ADBMA* + *ACBMA* ou *ACBD*. *ACBMA* :: *m* + *n*. *n*. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 184.

COROLLAIRE.

239. DE-LA il est évident que le Triligne parabolique *APM* est au parallelogramme circonscrit *APMK*, comme *n* est à *m* + *n* : & qu'ainsi le Trapese parabolique $MPCB = \frac{n}{m+n} ABCD - \frac{n}{m+n} APMK$; puisque $ACBMA = \frac{n}{m+n} ACBD$, & $APM = \frac{n}{m+n} APMK$.

PROPOSITION XIV.

Theorême.

240. SOIT *comme l'on a expliqué dans la définition cinquième, une Hyperbole* BMO *de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'équation* $x^m y^n = a^{m+n}$: *soit menée d'un de ses points quelconques* B *la ligne* BC *parallele à l'une des asymptotes* AD, *& terminée par l'autre en* C; *& soit achevé le parallelogramme* ACBD. *Je dis que ce parallelogramme inscrit* ACBD *est à l'espace hyperbolique* ECBMO *renfermé par la droite déterminée* BC, *par la ligne* CE *prolongée à l'infini du côté de* E, *& par la portion d'Hyperbole* BMO, *prolongée aussi à l'infini du côté de* O; *comme* m — n *est à* n. FIG. 126.

Il faut prouver que ACBD. ECBMO :: m — n. n.

La même préparation étant faite que dans la proposition précédente, on prouvera de la même maniere que le petit parallelogramme $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$.

Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la portion d'Hyperbole BMO que tombe le petit arc MN; il s'ensuit que la somme de tous les petits parallelogrammes $PMRQ$, c'est à dire, * l'espace $ECBMO = \frac{n}{m} EADBMO$ somme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m} KMSL$. On aura donc $EADBMO . ECBMO :: m . n$; & partant $EADBMO - ECBMO$, ou $ACBD . ECBMO :: m - n . n$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 184.

COROLLAIRE I.

241. DE-LA il est évident que le Trapese hyperbolique $CPMB = \frac{n}{m-n} ACBD - \frac{n}{m-n} APMK$; puisque $ECBMO = \frac{n}{m-n} ACBD$, & que par la même raison l'espace $EPMO = \frac{n}{m-n} APMK$.

COROLLAIRE II.

242. DE-LA il suit:

1°. Que lorsque m surpasse n; le rapport du parallelogramme inscrit $ACBD$ à l'espace $ECBMO$ indéfiniment étendu du côté de E, sera toûjours exprimé par des nombres positifs; & qu'ainsi on aura toûjours dans ce cas la quadrature absoluë de cet espace.

2°. Que lorsque $m = n$, ce qui arrive dans l'Hyperbole ordinaire; on trouve que le parallelogramme $ACBD$ est à l'espace hyperbolique $ECBMO$, comme zero est à l'unité: c'est à dire que cet espace est infini par rapport au parallelogramme inscrit $ABCD$.

3°. Que lorsque m est moindre que n; le parallelogramme inscrit $ACBD$ sera à l'espace hyperbolique $ECBMO$ comme un nombre negatif à un nombre positif: ce qui fait voir alors que la raison de cet espace au parallelogramme $ACBD$, est pour ainsi dire plus qu'infinie. Mais on doit remarquer dans ce dernier cas,

que

que l'espace hyperbolique renfermé par la droite *DB*, par l'asymptote *AD* prolongé à l'infini du côté de *D*, & par l'Hyperbole *OMB* aussi prolongée à l'infini du côté de *B*, sera au parallelogramme inscrit *ACBD*, comme *m* est à *n*—*m*, c'est à dire, que cet espace sera quarrable ; car prenant les indéterminées (*x*) sur l'asymptote *AD*, au lieu qu'on les avoit prises sur l'asymptote *AC*, l'équation à l'Hyperbole deviendra * $x^n y^m = a^{m+n}$. * *Art.* 230.

PROPOSITION XV.

Theorême.

243. SOIT *dans l'angle droit* CAD *une ligne courbe quelconque* AMB, *dont l'on sçache mener la tangente* MT; *& soit dans l'angle* DAH *qui est à côté de celui-ci, une autre ligne courbe* HFE, *telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques* F *la ligne* FM *parallele à* AC, *qui rencontre en* K *la ligne* AD, *& en* M *la premiere courbe* AMB, *& ayant tiré la tangente* MT, *qui rencontre* AC *au point* T: *on ait toûjours comme* AK *est à* MT *ainsi une ligne constante* a *qui demeure toûjours la même en quelque endroit que tombe le point* F, *est à* KF. *Je dis que si par un point quelconque* D *de la ligne* AD *l'on mene une ligne droite* EB *parallele à* AC *& terminée par les deux courbes; l'espace* ADEFH *sera égal au rectangle de la courbe* AMB *par la constante* a. FIG. 117.

Il faut prouver que ADEFH = AMB × a.

Ayant supposé par tout où l'on voudra sur la courbe *AMB* l'arc *MN* infiniment petit, & mené les droites *MF*, *NG*, paralleles à *AC*; & qui rencontre la droite *AD* aux points *K*, *L*, & la courbe *HFE* aux points *F*, *G*, on tirera les droites *FS*, *MR*, paralleles à *AD*, & on prolongera *RM* jusqu'à ce qu'elle rencontre *AC* en *P*. Cela posé, les deux triangles rectangles semblables *MPT*, *MRN*, donnent *MR*. *MN* :: *MP* ou *AK*. *MT* :: *a*. *KF*. Et partant *KF* × *MR*, c'est à dire,

le petit rectangle $FKLS = MN \times a$. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la Courbe AMB qu'on prenne le petit arc MN, il s'ensuit que la somme de tous les petits rectangles $KLSF$, * c'est à dire, l'espace $ADEFH$ sera égal à la somme de tous les petits rectangles $MN \times a$, c'est à dire, au rectangle de la courbe AMB par la constante a. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 184.

COROLLAIRE I.

244. DE-LA il est évident que le rectangle de la portion AM par la constante a, est égal à l'espace $AKFH$; & de même que le rectangle de la portion MB par la même ligne a, est égal à l'espace $KDEF$.

COROLLAIRE II.

245. SI l'on suppose que la Courbe AMB soit la seconde Parabole cubique, qui ait pour équation $y^3 = axx$ ($AP = x$, $PM = y$); on aura * $PT = \frac{3}{2}x$; & à cause du triangle rectangle MPT, l'hypothenuse $MT = \sqrt{yy + \frac{9}{4}xx}$. Mais par la proprieté de la Courbe HFE, il faut que $MP\ (y).\ MT\ (\sqrt{yy + \frac{9}{4}xx})$ $:: a.KF$. Ce qui donne $\overline{KF}^2 = \frac{4}{4}aa + \frac{9aaxx}{4yy} = aa + \frac{9}{4}ay$, en mettant pour axx sa valeur y^3. D'où l'on voit que la Courbe HFE est dans ce cas une Parabole, qui a pour axe la ligne AD, dont l'origine est au point O, pris de l'autre côté du point D par rapport au point A, en sorte que $AO = \frac{4}{9}a$, & dont le parametre $= \frac{9}{4}a$: car par la proprieté de cette Parabole * le quarre de l'ordonnée KF sera égal au rectangle de KO par le parametre $\frac{9}{4}a$, c'est à dire en termes analytiques, $\overline{KF}^2 = aa + \frac{9}{4}ay$. Or comme les Trapeses paraboliques $ADEH$, $AKFH$, sont * quarrables, il s'ensuit qu'on a la rectification tant de la Courbe AMB, que d'une

* Art. 233.
* Art. 19.
* Art. 239.

de ſes portions quelconques AM.

Si l'on veut exprimer au juſte la valeur de la portion AM, on remarquera que AH eſt $= a$; puiſque $\overline{AH}^2 = AO \times \frac{9}{4}a = aa$. Ainſi ayant nommé la tangente MT, t ; la ligne AK ou MP, y ; on aura $KF = \frac{at}{y}$, & le Trapeſe parabolique $FAKH$ ou * $\frac{2}{3} FK \times KO - \frac{2}{3} HA \times AO$ $= \frac{2}{3}at + \frac{8aat}{27y} - \frac{8}{27}aa = AM \times a$. C'eſt à dire en diviſant par a, que la portion cherchée $AM = \frac{2}{3}t + \frac{8at}{27y}$ $- \frac{8}{27}a$. Ce qui donne cette conſtruction. * Art. 239.

Ayant mené du point donné M ſur la ſeconde Parabole cubique AMB, la tangente MT qui rencontre en Q la ligne AK menée par l'origine A de l'axe AC perpendiculairement à cet axe, on prendra ſur cette ligne la partie $AV = \frac{8}{27}a$; & ayant tiré VC parallele à MT qui rencontre l'axe en C, on décrira du centre V & du rayon VA un arc de cercle qui coupe VC en X. Je dis que la portion AM de la ſeconde Parabole cubique AMB ſera égale à la ſomme des deux droites MQ, CX.

Car à cauſe des triangles ſemblables TPM, TAQ, il eſt clair que $MQ = \frac{2}{3} MT$ (t), puiſque $AP = \frac{2}{3} PT$; & à cauſe des triangles ſemblables MPT, VAC, il vient MP (y). MT (t) :: AV $(\frac{8}{27}a)$. $VC = \frac{8at}{27y}$, & partant $CX = \frac{8at}{27y} - \frac{8}{27}a$. Donc &c.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

246. SOIT *une Hyperbole équilatere* E A F, *qui ait pour centre le point* C, *& pour la moitié de ſon premier axe la* FIG. 128.

droite CA; *avec une Parabole* NCS *qui ait pour axe la ligne* AC *prolongée du côté de* C *qui en sera l'origine, & pour parametre de l'axe une ligne double de* CA. *Si l'on mene par un point quelconque* N *de la Parabole* NCS, *une parallele* NE *à* CA, *qui rencontre l'Hyperbole* EAF *au point* E, *& son second axe* CL *au point* L; *je dis que l'espace hyperbolique* CLEA *renfermé entre les droites* AC, CL, LE, *& la portion* EA *de l'Hyperbole, est égal au rectangle de la portion* CN *de la Parabole par la droite* AC.

Ayant mené par un point quelconque M de la portion CN de la Parabole, une perpendiculaire MG à la tangente MT qui passe par ce point, terminées l'une & l'autre par l'axe aux points G, T, & une parallele MB à CA, qui rencontre l'Hyperbole en B, & son second axe CL en H: les lignes MG, HB, seront egales entr'elles. Car menant l'ordonnée MP à l'axe on
* Art. 24. aura * $PG = CA$; & à cause du triangle rectangle MPG, le quarré $\overline{MG}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PG}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CA}^2$
* Art. 127. $=$* $\overline{HB}^2$, à cause de l'Hyperbole équilatére EAF; & partant $MG = HB$. Or les triangles rectangles semblables TPM, MPG, donnent MP ou CH. MT :: PG
* Art. 143. ou CA. MG ou HB. Donc * &c.

COROLLAIRE I.

247. DE-LA il est évident que le Trapese hyperbolique $HLEB$ est égal au rectangle de la portion de Parabole MN par la moitié CA du parametre de son axe.

COROLLAIRE II.

248. SI l'on mene dans l'Hyperbole équilatére EAF deux paralleles quelconques BD, EF; & qu'on tire par leurs extremités des lignes droites BM, EN, DR, FS, paralleles à AC, lesquelles rencontrent le second axe de l'Hyperbole aux points H, L, K, O; la difference des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera

égale (en tirant les droites BE, DF,) à la difference des Trapeses rectilignes $HLEB$, $KOFD$.

Car le rectangle $AC \times MN$ est égal * au Trapese hyperbolique $HLEB$; & par consequent le rectangle $AC \times MN$ plus le segment hyperbolique BE sera égal au Trapese rectiligne $HLEB$: de même le rectangle $AC \times RS$ plus le segment hyperbolique DF sera égal au Trapese rectiligne $KOFD$. Donc puisque les deux segmens hyperboliques EB, DF, sont * égaux entr'eux, la difference des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera égale à la difference des Trapeses rectilignes $HLEB$, $KOFD$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

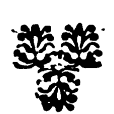
* Art. 247.

* Art. 204.

COROLLAIRE III.

249. Les mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent ; si l'on fait $2AC. LH :: \overline{BH+LE}. m$ il est clair que le rectangle $AC \times m = \frac{1}{2} LH \times \overline{BH+LE}$, c'est à dire, égal au Trapese rectiligne $HLEB$. De même si l'on fait $2AC. KO :: KD+FO. n$. il est clair que $AC \times n$ est égal au Trapese rectiligne $KOFD$. Par conséquent * la difference des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera égale à la difference des rectangles $AC \times m$, $AC \times n$; c'est à dire, en divisant par AC, que la difference des arcs paraboliques MN, RS, sera égale à la difference des droites m, n. D'où l'on voit qu'on peut trouver des lignes droites égales à la difference d'une infinité d'arcs Paraboliques tels que MN, RS.

* Art. 248.



LIVRE SIXIE'ME.

Des Sections Coniques considerées dans le Solide.

CHAPITRE PREMIER.

Des trois Sections Coniques en général.

DÉFINITIONS.

1.

FIG. 129. SI par un point fixe S élevé au dessus du plan d'un cercle VXY, on fait mouvoir une ligne droite SZ indéfiniment prolongée de part & d'autre du point S, autour de la circonference du cercle, en sorte qu'elle fasse un tour entier ; les deux surfaces convexes produites par la ligne droite indéfinie SZ dans ce mouvement, sont appellées chacune separément *Surface Conique*, & toutes deux ensemble *Surfaces Coniques opposées.*

2.

Le point fixe S qui est commun à l'une & à l'autre Surface Conique, est nommé *Sommet.*

3.

Le Cercle VXY, *Base.*

4.

Le Solide compris par la base VXY, & par la portion de la Surface Conique que cette base coupe depuis le Sommet S, est appellé *Cone.*

5.

La ligne SX menée du Sommet S à un point quelconque X de sa base, en est un des *Côtés.*

6.

La ligne SO menée du Sommet S du Cone par le centre O de la base, en est l'*Axe.*

7.

On dit qu'un Cone est *droit*, lorsque son axe est per-

pendiculaire sur le plan de sa base ; & au contraire qu'il est *scalene*, lorsque son axe est oblique sur ce plan.

8.

Si l'on coupe une Surface Conique par un plan *FAG* qui ne passe point par le Sommet *S*, & qui ne soit point parallele au plan de la base *VXY* ; la ligne courbe *FAG* formée par la rencontre de ce plan avec la Surface Conique, est appellée *Section Conique*. FIG. 130. 131. 132.

9.

Si l'on mene par le Sommet *S* d'un Cone, un plan *SDE* parallele au plan d'une Section Conique ; la droite indéfinie *DE* formée par la rencontre de ce plan avec celui de la base du Cone, s'appellera *Directrice*.

10.

Une Section Conique *FAG* est appellée *Parabole*, lorsque la Directrice *DE* touche le cercle qui est la base du Cone : *Ellipse*, lorsquelle tombe toute entiere au dehors : & *Hyperbole*, lorsqu'elle le traverse.

Mais dans ce dernier cas, si l'on prolonge le plan de la Section, il est visible qu'il rencontrera la Surface Conique opposée ; la ligne courbe *KMH* formée par cette rencontre, sera nommée *Hyperbole opposée* à la premiére *FAG* ; & les deux ensemble, *Hyperboles* ou *Sections opposées*. FIG. 132.

11.

Si dans le plan d'une Section Conique il y a une ligne droite qui ne la rencontre qu'en un seul point, & qui étant prolongée indéfiniment de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe toute entiere au dehors ; cette ligne sera nommée *Tangente*, & le point où elle rencontre la Section, point d'*Attouchement*. FIG. 130. 131. 132.

COROLLAIRE I.

250. DANS la Parabole tous les côtés du Cone étant prolongés indéfiniment rencontreront nécessairement son plan, excepté le seul côté *SD* tiré du Sommet *S* FIG. 130.

par le point *D* où la Directrice *DE* touche la base ; puisqu'il n'y a que ce côté qui soit dans le plan *SDE* parallele à celui de la Section, & que tous les autres le coupent dans le point *S*. D'où il est clair que la Parabole s'étend à l'infini, & ne rentre point en elle même.

COROLLAIRE II.

FIG. 131. 251. DANS l'Ellipse tous les côtés du Cone étant prolongés, s'il est nécessaire, rencontrent son plan ; puisque le plan *SDE* qui lui est parallele, est rencontré par tous dans le point *S*. D'où l'on voit qu'elle renferme un espace en rentrant en elle même.

COROLLAIRE III.

FIG. 123. 252. DANS les Hyperboles opposées tous les côtés du Cone excepté les deux *SD*, *SE*, tirés du Sommet *S*, aux points *D*, *E*, où la Directrice coupe la base, étant prolongés indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*, rencontrent nécessairement leur plan ; puisqu'il n'y a que ces deux côtés qui tombent dans le plan *SDE* parallele au plan de ces deux Hyperboles, & que tous les autres le coupent dans le point *S*. Les côtés de la portion *SDVE* forment les points de l'Hyperbole *FAG*, & ceux de la portion *SDYE* étant prolongés de l'autre côté du Sommet *S*, forment les points de son opposée *KMH*. D'où l'on voit que les Hyperboles opposées s'étendent chacun à l'infini, & ne rentrent point en elles mêmes, non plus que la Parabole.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 132. 253. SI *l'on coupe deux surfaces Coniques opposées, par un plan* Sam *qui passant par leur Sommet* S, *entre au dedans ;*

si

je dis qu'il formera par sa rencontre avec ces deux Surfaces, deux lignes droites Sa, Sm, *indéfiniment prolongées de part & d'autre du point* S.

Car soit *am* la commune Section du plan coupant, & du plan de la base : il est clair qu'elle rencontrera cette base en deux points *a*, *m*; puisque par la supposition le plan *Sam* entre au dedans de la surface Conique. Or si l'on mene les côtés *Sa*, *Sm*, indefiniment prolongés de part & d'autre du sommet *S*; il est évident par la génération des Surfaces Coniques opposées que ces côtés seront les deux communes Sections de ces deux Surfaces, avec le plant coupant *Sam*. *C'est ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

254. COMME la partie de la ligne *am* qui joint les deux points *a*, *m*, de la circonférence, tombe au dedans de la base, & que tout le reste de cette ligne tombe au dehors; il s'ensuit que si l'on conçoit que le plan *Sam* soit indéfiniment étendu tout autour du Sommet *S*, la partie de ce plan qui sera renfermé dans l'angle *aSm*, & dans son opposé au Sommet, tombera au dedans des deux Surfaces Coniques opposées, & que tout le reste de ce plan tombera entre ou (ce qui est la même chose) au dehors de ces deux Surfaces.

COROLLAIRE II.

255. DE-LA il suit que si l'on joint deux points quelconques *A*, *M*, d'une Section Conique par une ligne droite, elle sera renfermée au dedans de la Section; & qu'étant prolongée indéfiniment de part & d'autre, elle tombera toute entiere au dehors. Car menant du Sommet *S* par les points *A*, *M*, les côtés *Sa*, *Sm*, & faisant passer un plan par ces côtés; il est clair que la ligne *AM* tombe dans la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle *aSm*, & que tout le reste FIG. 150.

de cette ligne se trouve dans la partie de ce plan qui tombe dans les angles à côté.

COROLLAIRE III.

256. Si l'on mene par le Sommet *S* du cone une ligne parallelle à une ligne *AM* terminée par une Section Conique ; il est clair par le Corollaire précédent que cette ligne *SH*, tombera dans l'un des angles à côté de l'angle *aSm*, c'est à dire au dehors de la surface Conique ; & qu'ainsi elle ira rencontrer le plan de la base en quelque point hors la circonference du cercle, ou bien qu'elle lui sera parallele.

COROLLAIRE IV.

FIG. 132. 257. Il suit encore du Corollaire premier que si l'on joint deux points quelconques *A*, *M*, de deux Hyperboles opposées par une ligne droite, elle sera renfermée entre ces Hyperboles ; & qu'étant indéfiniment prolongée de part & d'autre, elle entrera au dedans. Car menant par le Sommet *S* les côtés *Sa*, *Sm*, qui passent par les points *A*, *M*, & faisant passer par ces côtés un plan indéfiniment étendu tout autour du point *S* ; il est clair que la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle *ASM* où tombe la ligne *AM*, est comprise entre ces deux Surfaces, & que la partie du même plan qui est renfermée entre les deux angles à côté où se trouvent les prolongemens de la ligne *AM*, tombent au dedans de ces deux Surfaces. Or comme la ligne *AM* est la commune Section du plan *Sam* avec celui des deux Hyperboles opposees, il s'ensuit &c.

COROLLAIRE V.

258. Il suit aussi des Corollaires deuxiéme & quatriéme, qu'une ligne droite ne peut rencontrer une

Section Conique, ou les deux Hyperboles opposées, au plus qu'en deux points.

PROPOSITION II.

Theoréme.

259. *Si l'on coupe l'une ou l'autre des deux Surfaces Coniques opposées, par un plan* $oVxy$ *parallele à la base* $OVXY$; *je dis que la Section qu'il forme par sa rencontre avec la Surface Conique, est un cercle qui a pour centre le point* o, *où ce plan rencontre l'axe* SO, *prolongé de l'autre côté du Sommet* S, *lorsqu'il est necessaire.* FIG. 129.

Car si l'on mene par un point quelconque X de la base au centre O le rayon XO, & au Sommet S le côté XS qui rencontre le plan $ovxy$ au point x: les lignes OX, ox, seront paralleles entr'elles; puisqu'elles sont les communes Sections de deux plans paralleles $OVXY$, $ovxy$, par le même plan SOX prolongé, s'il est necessaire de l'autre côté du Sommet S. Les triangles OSX, oSx, seront donc semblables; & par conséquent on aura toûjours $SO. OX :: So. ox$. Or les premiers termes de cette proportion étant par tout les mêmes, le quatriéme ox ne changera point de grandeur en quelque endroit que tombe le point x. D'où l'on voit que la ligne courbe vxy est la circonférence d'un cercle qui a pour centre le point o.

COROLLAIRE.

260. Il suit de-là qu'on peut placer la base d'un cone en tel endroit qu'on veut, selon qu'il est plus commode. C'est pourquoi lorsque la Section est une Parabole ou une Hyperbole, on la place ordinairement en sorte qu'elle coupe la Section; mais lorsque c'est une Ellipse on la place tantôt de maniére qu'elle la coupe, & tantôt de maniére qu'elle tombe audessous.

PROPOSITION III.

Theorême.

FIG. 130. 261. *Si dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de ses points quelconques* A *vers le dedans du cone, une ligne droite indéfinie* AB *parallelle au côté* SD *qui passe par le point où la Directrice* DE *touche la base ; je dis que cette ligne* AB *tombe toute entiere au dedans de la Section, & qu'elle ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini du côté de* B.

Car ayant mené par le Sommet *S* du cone, & par la ligne *AB* un plan *SAB*, il formera par sa rencontre avec la Surface Conique deux côtés, dont l'un sera toûjours la ligne *SD*, puisque *AB* lui est parallele ; & l'autre la ligne *Sa* qui passe par le point *A*. Or le plan *DSa* renfermé entre les côtés *SD*, *Sa*, prolongés à
* Art. 254. l'infini du côté de *D* & *a*, tombe * au dedans de la Surface Conique. Par conséquent la ligne *AB* qui est toûjours dans ce plan, étant parallele au côté *SD*, tombera toute entiere au dedans de la Parabole, & ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini vers *B*.

PROPOSITION IV.

Theorême.

FIG. 130. 262. *Si dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de ses points quelconques* A *vers le dedans du cone, une ligne droite* AM *qui ne soit point parallele au côté* SD, *qui passe par le point* D *où la Directrice* DE *touche la base : je dis que cette ligne étant prolongée autant qu'il sera necessaire, rencontrera la Parabole en quelque autre point* M.

Car si l'on fait passer par le Sommet *S* du cone & par cette ligne un plan *SAM*, il est clair qu'il entre au dedans de la Surface Conique, & qu'il ne passe point par

le côté *SD*; d'où il suit que ce plan forme sur la Surface Conique * deux côtés *Sa*, *Sm*; dont l'un *Sa* passe par le point *A*; & l'autre *Sm* n'est point parallele au plan de la Section, puisqu'il n'y a *(hyp.)* que le seul côté *SD* qui lui soit parallele. Par conséquent le côté *Sm* étant prolongé (s'il est necessaire) rencontrera le plan de la Parabole en un point *M*, par où passe la ligne *AM* qui est formée par la rencontre du plan *aSm* avec celui de la Parabole. Or il est visible que ce point *M* est un des points de la Parabole *FAG*; puisqu'il se trouve en même temps dans le plan de la Section, & sur la Surface Conique. Donc &c.

* Art. 253.

PROPOSITION V.

Problême.

263. MENER *d'un point donné* A *sur une Section Conique*, *une Tangente* AF. FIG. 133. 134. 135.

Ayant mené par le point *A* & par le Sommet *S* du cone, une ligne droite *SA* qui rencontre le plan de la base au point *a*, on tirera à cette base par le point *a*; la Tangente *Eaf*; & la ligne *AF* formée par la rencontre du plan *SEaf* (prolongé, s'il est nécessaire, au delà du Sommet *S*) avec le plan de la Section, sera la Tangente qu'on cherche.

Car puisque la Tangente *Eaf* tombe toute entiere au dehors de la base excepté le seul point *a*, il s'ensuit que le plan *SEaf* prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S* ne rencontre les Surfaces Coniques opposées que dans la ligne *Sa* aussi prolongée indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*, & que tout le reste de ce plan tombe au dehors de ces Surfaces. Par conséquent la ligne *AF* formée par la rencontre de ce plan avec celui de la Section, ne peut avoir de commun avec l'un ou l'autre de ces deux surfaces que le seul point *A* où la ligne *Sa* rencontre le plan de la

Section, & tombe toute entiere au dehors excepté ce point. Donc &c.

COROLLAIRE I.

264. COMME l'on ne peut faire passer par le point *a* de la base du cone, qu'une seule Tangente *E a f*; il s'ensuit aussi que d'un point donné *A* sur une Section Conique, on ne peut mener qu'une seule tangente *A F*.

COROLLAIRE II.

265. DE-LA on tire la maniere de mener une Tangente *A F* parallele à une ligne droite *M N* donnée de position sur le plan d'une Section Conique ou de deux Sections opposees. Car ayant mené par le Sommet *S* du cone, une parallele *S E* à *M N*, elle rencontrera la Directrice *D E* en un point *E*, ou bien elle lui sera parallele; puisque cette ligne *S E* sera parallele au plan de la Section, & tombera par consequent dans le plan *S D E*. Si elle la rencontre en un point *E* qui tombe au dehors du cercle qui est la base du Cone: ayant mené du point *E* à ce cercle, la Tangente *E a f*, il est clair que le plan *S E a f* formera par sa rencontre avec le plan de la Section, une Tangente *A F* qui sera parallele à la ligne *M N*; puisque les deux Sections *A F*, *S E*, des plans * paralleles *M N A S E D*, coupés par le plan touchant *S E a f*, sont
* *Hyp.* paralleles entr'elles aussi bien que * *S E*, *M N*.

COROLLAIRE III.

266. LES mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent.

FIG. 135. 1°. Dans la Parabole le Problême est impossible, lorsque la ligne *M N* donnée de position, devient parallele au côté *S D* qui passe par le point *D* où la Directrice *D E* touche la base; car alors le point *E* tombant en *D*, on ne pourra mener par ce point d'autre

Tangente que la Directrice DE: & comme le plan qui passe par le Sommet & par la Directrice DE est * parallele au plan de la Parabole, il ne pourra former par sa rencontre avec ce plan aucune Tangente. Mais lorsque la ligne donnée de position, n'est point parallele au côté SD, on pourra toûjours mener une Tangente AF parallele à cette ligne, & jamais davantage ; car alors le point E tombant au dehors du cercle qui est la base du cone, on en pourra toûjours mener Eaf, EDL à cette base ; dont l'une EDL se confondant avec la Directrice, ne peut servir à trouver aucune Tangente dans le plan de la Section ; & l'autre Eaf étant differente de la Directrice, servira toûjours à trouver par la rencontre du plan $SEaf$ avec le plan de la Parabole, une Tangente AF qui satisfera. Il en est de même lorsque la ligne SE est parallele à la Directrice ; car la Tangente Eaf deviendra alors parallele à la Directrice ; & comme on n'en peut mener qu'une seule qui lui soit parallele, puisque la Directrice touche elle-même la base en un point D, il s'ensuit &c. * Def. 9.

2°. Dans l'Ellipse on pourra toûjours mener deux Tangentes AF, BG, paralleles à la ligne MN donnée de position ; & par conséquent entr'elles. Car tous les points de la Directrice DE tombant au dehors de la base, on pourra toûjours mener du point E deux Tangentes Eaf, Ebg, à cette base qui ne se confondront point avec la Directrice, & qui serviront à former par la rencontre des plans $SEaf$, $SEbg$, avec le plan de la Section, deux Tangentes AF, BG, qui satisferont. Il en est de même lorsque la ligne SE est parallele à la Directrice ; car au lieu des Tangentes Eaf, Ebg, qui partent d'un point E de cette Directrice, il n'y auroit qu'à lui mener deux Tangentes paralleles ; ce qui est toûjours possible. FIG. 134.

3°. Dans les Hyperboles opposées le Problême est impossible, lorsque le point E tombe au dedans du cercle qui est la base du cone ; puisqu'on ne peut mener FIG. 135.

alors aucune Tangente de ce point à la baſe. Mais lorſqu'il tombe au dehors, on pourra toûjours trouver deux Tangentes *AF*, *BG*, paralleles à la ligne *MN* donnée de poſition; car la Directrice *DE* traverſant la baſe, on pourra toûjours mener du point *E* deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, à cette baſe, leſquelles tombent de part & d'autre de la Directrice, & qui ſerviront à former par la rencontre des plans *SEaf*, *SEbg*, avec le plan de la Section deux Tangentes *AF*, *BG*, qui ſatisferont. Il en eſt de même lorſque la ligne *SE* eſt parallele à la Directrice *DE*; car au lieu des deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, il n'y aura qu'à mener deux Tangentes paralleles à la Directrice; ce qui eſt toûjours poſſible.

Il eſt à remarquer dans ce dernier cas, que les Tangentes paralleles *AF*, *BG*, appartiennent toûjours aux Hyperboles oppoſées, & jamais à la même; ce qui eſt évident, puiſque les deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, de la baſe, tombent néceſſairement de part & d'autre de la Directrice *DE*.

COROLLAIRE IV.

267. IL ſuit du Corollaire précédent:

1°. Que dans une Parabole ou Hyperbole, il ne peut y avoir deux Tangentes qui ſoient paralleles entr'elles; & qu'au contraire dans l'Ellipſe & dans les Hyperboles oppoſées, une Tangente *AF*, étant donnée de poſition, ou en peut toûjours mener une autre *BG* qui lui ſoit parallele.

2°. Que ſi la ligne *MN* donnée de poſition, eſt terminée par une Section Conique, on pourra toûjours mener dans la Parabole, une Tangente *AF* qui lui ſoit parallele, & dans l'Ellipſe ou les Hyperboles oppoſées deux Tangentes *AF*, *BG*; puiſque la ligne *SE* menée par le Sommet *S* parallelement à *MN* rencontrera* le plan de la baſe en un point *E* hors la circonference, ou bien lui ſera parallele.

* Art. 256.

DEF.

DÉFINITIONS.

12.

Dans une Parabole, si l'on mene par un de ses points quelconques *A* vers le dedans une ligne *AB* parallele au côté *SD* qui passe par le point *D* où la Directrice *DE* touche la base : cette ligne *AB* sera nommée *Diametre*, & le point *A* en sera *l'origine*. FIG. 133.

13.

Dans l'Ellipse ou les Hyperboles opposées, toute ligne droite *AB*, qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles *AF*, *BG*, est appellée *Diametre* ; & les points, *A*, *B*, en sont les extrêmités. FIG. 134. 135.

14.

Si par un point quelconque *P* de tel Diametre *AB* qu'on voudra d'une Section Conique, l'on tire une ligne droite *MN* qui rencontre la Section aux points *M*, *N*, & qui soit parallele à la tangente *AF* qui passe par l'origine *A* de ce Diametre dans la Parabole, & par l'une ou l'autre de ses extrêmités dans les autres Sections : on dira que cette ligne *MN* est *Ordonnée* de part & d'autre au Diametre *AB*, & que chacune de ses parties *PM*, ou *PN*, est *Ordonnée* à ce Diametre. FIG. 133. 134. 135.

15.

Lorsqu'un Diametre fait avec ses Ordonnées des angles droits, on l'appelle *Axe*.

COROLLAIRE.

268. IL suit de la Définition douziéme :

1°. Que tous les Diametres d'une Parabole sont paralleles entr'eux, puisqu'ils sont tous paralleles au même côté du cone *SD* qui passe par le point *D* où la Directrice *DE* touche la base.

2°. Que par un point donné sur le plan d'une Parabole, on ne peut mener qu'un seul Diametre, puisqu'on ne peut mener par ce point qu'une seule parallele au côté *SD*.

PROPOSITION VI.

Problême.

Fig. 136. 137. 138. 269. Un *diametre* AB *d'une Section Conique étant donné, avec une de ses ordonnées* PM; *décrire la Section.*

Ayant fait passer par l'ordonnée *PM* un plan quelconque autre que le plan *APM*, on menera dans ce plan par le point *P* une perpendiculaire indéfinie *Pa* à *PM*; & on décrira d'un point quelconque *C* de cette ligne, & du rayon *CM* un cercle. Cela fait,

Fig. 136. 1°. Lorsque la Section doit être une Parabole. On menera de l'un des points *a*, *D*, où le cercle coupe la perpendiculaire *Pa* (par exemple du point *a*) par l'origine *A* du diametre *AB*, la ligne *aA* qui rencontre en *S*, une ligne *DS* tirée de l'autre point *D* parallelement à *AB*. On décrira ensuite une surface Conique qui ait pour sommet le point *S*, & pour base le cercle *DMaN*. Je dis qu'elle formera par sa rencontre avec le plan *APM*, la Parabole cherchée *MAN*. Car ayant mené par les extremités du diametre *Da* les paralleles *DE*, *af*, à *PM*; il est clair qu'elles seront tangentes, puisque * *PM* est perpendiculaire sur *Da*. Or le plan *SDE* qui passe par le sommet *S* du cone & par la tangente *DE*, est parallele au plan *APM*, puisque* *SD* est parallele à *AP*, & *DE* à *PM*, d'où il suit* que la Section *MAN* faite par le plan *APM* dans la surface Conique, sera une Parabole qui aura pour diametre la ligne *AB*. De plus le plan touchant *Saf* forme dans le plan *APM** une tangente *AF*, qui sera paralle à *PM*; puisqu'elle est la commune Section des deux plans *Saf*, *APM*, qui passent par les paralleles *af*, *PM*; & par conséquent * la ligne *PM* sera ordonnée au diametre *AB*.

* *Hyp.*
* *Hyp.*
* *Def.* 10. & 12.
* *Art.* 263.
* *Def.* 14.

Fig. 137. 138. 2°. Lorsque la Section Conique doit être une Ellipse ou une Hyperbole. On menera des points *a*, *b*, où la perpendiculaire indéfinie *Pa* coupe le cercle, par les ex-

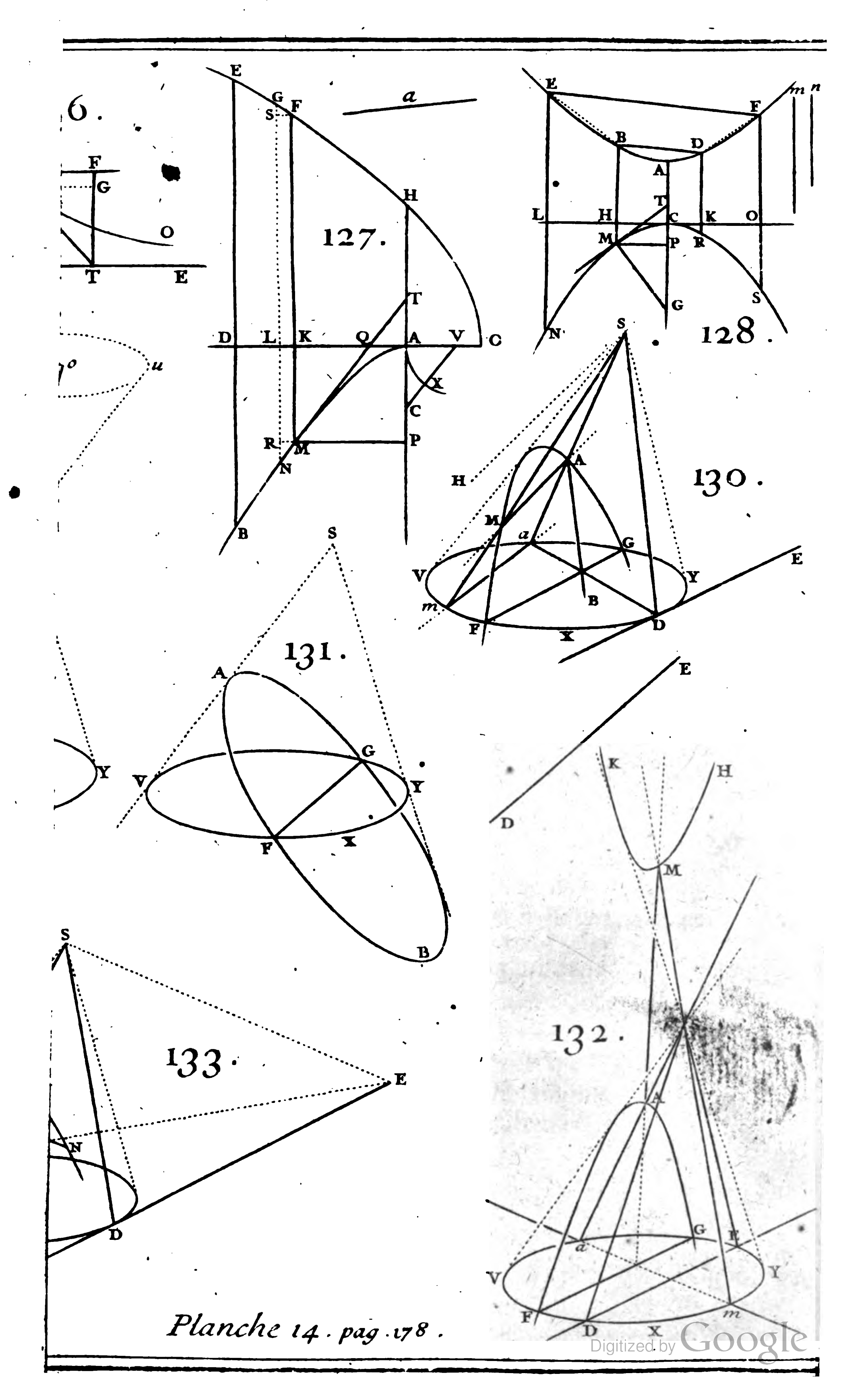


Planche 14. pag. 178.

tremités *A*, *B*, du diametre *AB*, les droites *aA*, *bB*, qui se rencontrent au point *S*. On décrira ensuite un cone qui ait pour sommet le point *S*, & pour base le cercle *aMbN*. Je dis que le plan *APM* formera dans la surface de ce cone la Section *MAN* qu'on demande. Car menant *SD* parallele au diametre *AB* de la Section, & qui rencontre en *D* le diametre *ab* de la base, par où & par les extremités *a*, *b*, soient tirées les paralleles, *DE*, *af*, *bg*, à *PM*; il est clair que le plan *SDE* sera parallele au plan *APM*, & qu'ainsi *DE* * sera la Directrice. Or dans l'Ellipse le point *D* tombe sur le diametre *ab* prolongé hors le cercle; puisque le diametre *AB* de la Section, tombe dans l'angle *aSb* fait par les côtés du cone *Sa*, *Sb*: & au contraire dans l'Hyperbole le point *D* tombe au dedans du cercle; puisqu'alors le diametre *AB* tombe dans l'angle *aSB* qui est à côté de l'angle *aSb*. D'où il suit selon la Définition 10. que la Section *MAN* est une Ellipse dans le premier cas, & une Hyperbole dans le second. De plus la tangente *AF* qui passe par l'extremité *A* du diametre *AB*, étant la commune Section du plan touchant *Saf* & du plan coupant *APM*, qui passent par les paralleles *af*, *PM*, sera parallele à *PM*: & de même la tangente *BG* étant la commune Section du plan touchant *Sbg* & du plant coupant *APM*, lesquels passent par les deux paralleles *bg*, *PM*, sera aussi parallele à *PM*. D'où l'on voit que la ligne *AB* est * un diametre qui a pour ordonnée *PM*.

* *Def.* 9.

* *Def.* 13. & 14.

Il peut arriver dans l'Ellipse que les lignes *Aa*, *Bb*, soient paralleles entr'elles; mais alors il n'y aura qu'à prendre pour le centre *C* du cercle *aMbN*, tel autre point qu'on voudra de la ligne *Ab*.

DÉFINITION.

16.

Si par les deux points *D*, *E*, où la Directrice coupe la base, lorsque la Section est une Hyperbole, on tire FIG. 139.

deux Tangentes *DH*, *EK*; & que par le Sommet *S* & ces Tangentes, on fasse passer deux plans *SDH*, *SEK*: les deux lignes droites indéfinies *CH*, *CK*, que ces deux plans forment par leurs rencontres avec le plan des Hyperboles, sont appellées *Asymptotes.*

COROLLAIRE.

270. SI par un point d'attouchement *D*, l'on mene le côté *DS* prolongé indefiniment de part & d'autre du Sommet *S*: il est visible que le plan *SDH* ne peut avoir de commun avec les deux surfaces Coniques opposées que ce côté; puisque tous les points de la Tangente *DH* tombent hors la circonference de la base, excepté le seul point *D*. Or le plan *SDE* qui passe par le Sommet *S* & par la Directrice *DE*, étant * parallele au plan des Hyperboles opposées, les communes Sections *SD*, *CH*, de ces deux plans avec le même plan *SDH* seront paralleles entr'elles, c'est pourquoi l'Asymptote *CH* tombera toute entiere au dehors & entre les deux surfaces Coniques opposées, & laissera par conséquent les Hyperboles opposées toutes entieres de part & d'autre sans les rencontrer. On prouvera la même chose de l'autre Asymptote *CK*. Or comme les deux Asymptotes *CH*, *CK*, sont formées par les plans *SDH*, *SEK*, qui tombent de part & d'autre de la même surface Conique & de son opposée; il s'ensuit que tous les points de l'Hyperbole *FAG* sont compris dans l'angle *HCK*, & que tous les points de son opposée tombent dans l'angle qui lui est opposé au Sommet.

* *Def.* 9.

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 139.

271. SI *par un point quelconque* B *d'une Asymptote* CK, *l'on mene une parallele* BA *à l'autre Asymptote* CH; *je dis*

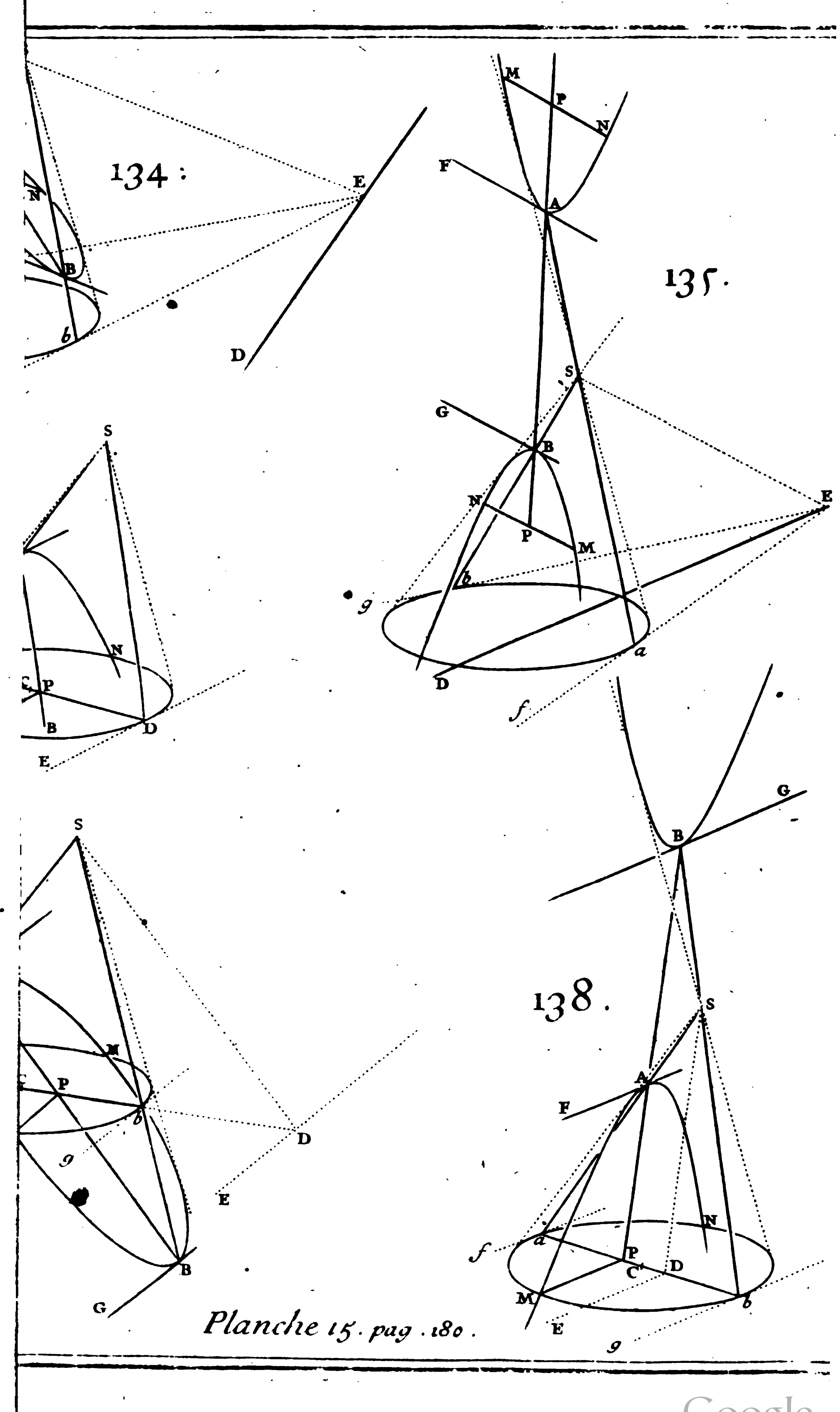


Planche 15. pag. 180.

qu'elle rencontrera l'une des Hyperboles opposées en un seul point A, *& qu'étant prolongée indéfiniment, elle tombera toute entiere au dedans.*

Puisque les deux lignes *BA*, *SD*, sont paralleles à la même ligne *CH*, elles le seront entr'elles ; & ainsi elles se trouveront dans un même plan, lequel entrera au dedans des deux surfaces Coniques opposées, puisqu'il passe par l'un de leurs côtés *SD*, & qu'il fait un angle avec le plan *SDH* qui la touche dans ce côté. Le plan des paralleles *BA*, *SD*, formera donc dans les deux surfaces Coniques, deux côtés, dont l'un est le côté *SD*, & l'autre le côté *Sa*, qui coupera nécessairement la ligne *BA* en quelque point *A*, puisqu'il est situé dans le plan qui passe par les paralleles *SD*, *AB*, & qu'il coupe *SD* en *S*. Donc puisque le point *A* se trouve en même temps dans l'une des surfaces Coniques & dans le plan des Hyperboles, il appartiendra à l'une de ces Hyperboles, De plus puisque la ligne *BA* étant prolongée indéfiniment du côté du point *A*, tombe toute entiere dans le plan *DSa* renfermé entre les côtez *DS*, *Sa*, lorsque le point *A* appartient à l'Hyperbole *FAG*, & dans son opposé au Sommet *ASd* lorsqu'il appartient à l'Hyperbole opposée ; il est visible qu'elle tombera toute entiere au dedans de l'une des deux surfaces Coniques, & par conséquent aussi au dedans de l'Hyperbole qui en est la Section. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

272. DE-LA on voit qu'entre une Hyperbole *FAG* & son Asymptote *CH*, on ne sçauroit faire passer aucune ligne parallele à cette Asymptote. Or comme la ligne *BA* separe l'Hyperbole qu'elle rencontre en deux portions indéfinies, dont l'une tombe nécessairement toute entiere dans l'espace compris entre les paralleles *BA*, *CH* ; il s'ensuit que plus *CB* deviendra petite, plus le point *A* avancera dans cette portion, & cela toûjours de plus en plus jusqu'à ce que *CB* devienne

plus petite qu'aucune grandeur donnée. C'est à dire, qu'une Hyperbole & son Asymptote étant l'une & l'autre continuée indéfiniment, elles s'approcheront toûjours de plus en plus, en sorte que leur distance deviendra enfin moindre qu'aucune donnée, sans pouvoir néanmoins * jamais se rencontrer.

* *Art.* 270.

PROPOSITION VIII.

Problême.

FIG. 140. 273. LES *Asymptotes* CH, CK, *d'une Hyperbole* FAG *étant données avec un de ses points quelconques* F, *décrire l'Hyperbole.*

Ayant mené par le point donné F, une ligne droite quelconque HK terminée par les asymptotes, on fera passer par cette ligne un plan quelconque autre que le plan HCK, dans lequel on tirera par le point de milieu P de HK une perpendiculaire indéfinie MN à cette ligne ; & on décrira d'un de ses points quelconques O comme centre, & du rayon OF, un cercle FMN. On menera des points H, K, deux Tangentes HD, KE, à ce cercle ; & par les points d'attouchemens D, E, deux paralleles DS, ES, aux Asymptotes CH, CK, lesquelles se rencontreront en un point S ; duquel comme Sommet, on décrira une surface Conique qui ait pour base le cercle FMN. Je dis que cette surface Conique formera par sa rencontre avec le plan HCK, l'Hyperbole requise FAG.

Il est clair par la proprieté du cercle FMN ; 1°. Que la corde FG est divisée par le milieu au point P, par le diametre MN qui lui est * perpendiculaire ; & partant, puisque par la construction $PH = PK$, il s'ensuit que $FH = GK$, $GH = FK$; & par conséquent $GH \times HF = FK \times KG$. 2°. Que $GH \times HF = \overline{HD}^2$, & $FK \times KG = \overline{KE}^2$, & qu'ainsi $HD = KE$. 3°. Que si l'on prolonge les Tangentes HD, KE, jusqu'à ce qu'elles se ren-

* *Hyp.*

contrent en un point *Q*, les parties *DQ*, *EQ*, seront égales entr'elles. Ce qui donne *DQ.EQ*::*DH.EK*. D'où l'on voit que la ligne *DE* qui joint les points d'attouchemens des deux Tangentes *HD*, *KE*, sera parallele à la ligne *HK*, & le plan *SDE* au plan *CHK*: c'est pourquoi la ligne *DE* sera * la Directrice ; & comme elle coupe la base en deux points, la Section Conique *FAG* * sera une Hyperbole. De plus il est évident que cette Hyperbole passera par le point donné *F*, puisque ce point est commun tant à la surface Conique, qu'au plan *HCK* qui est celui de l'Hyperbole ; & qu'elle aura pour asymptotes les lignes *CH*, *CK*, puisqu'elles sont * les communes Sections des plans touchans *SDH*, *SEK*, & du plan de l'Hyperbole.

* Def. 9.
* Def. 10.
* Def. 15.

S'il arrivoit que les Tangentes *DH*, *EK*, fussent paralleles entr'elles, on verroit alors tout d'un coup que les lignes *DE*, *HK*, seroient paralleles entr'elles, puisque ces Tangentes sont égales ; & le reste se démontreroit de la même maniére que ci-dessus.

PROPOSITION IX.

Theorême.

274. S'IL *y a deux lignes droites* MN, AB, *terminées par une Section Conique ou par les Sections opposées, lesquelles se rencontrent en un point* P ; *& qui soient paralleles à deux autres lignes*, SE, SD, *données de position : je dis que le rectangle* MP × PN *est au rectangle* AP × PB, *en raison donnée ; c'est à dire que la raison de ces deux rectangles demeure toûjours la même, en quelque endroit que puissent tomber les deux lignes* MN, AB. FIG. 141. 142.

Ayant mené par les paralleles *SE*, *MN*, & *SD*, *AB*, deux plans, ils formeront dans le plan de la base, deux lignes droites *Enm*, *Dba*, & dans la surface Conique les côtés *SMm*, *SNn*, *SAa*, *SBb* ; & leur commune intersection sera la ligne *SPp*, qui rencontre le plan de

la base au point p, où les deux droites Em, Da, s'entrecoupent ; par lequel je mene dans le plan SMN la droite HK parallele à MN, & dans le plan SAB la droite FG parallele à AB. Cela posé.

Les triangles semblables SPM, SpH ; SPN, SpK ; SPA, SpF ; SPB, SpG, donnent $MP \times PN . Hp \times pK :: \overline{SP}^2 . \overline{Sp}^2 :: AP \times PB . Fp \times pG$. Et partant on aura $MP \times PN . AP \times PB :: Hp \times pK . Fp \times pG$. Or la raison de $Hp \times pK$ à $Fp \times pG$, est composée des deux raisons de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, & de $mp \times pn$ ou par la proprieté du cercle $ap \times pb$ à $Fp \times pG$. Mais à cause des triangles semblables Hpm, SEm, & Kpn, SEn, il vient $Hp . mp :: SE . mE$. Et $pK . pn :: SE . En$. Et en multipliant les Antecedens & les Conséquens de ces deux raisons, $Hp \times pK . mp \times pn :: \overline{SE}^2 . mE \times En$: on prouvera de même à cause des triangles semblables Fpa, SDa, & Gpb, SDb, que $ap \times pb . Fp \times pG :: aD \times Db . \overline{SD}^2$. Il est donc évident que la raison de $MP \times PN$ à $AP \times PB$, est composée des deux raisons de $\overline{SE}^2$ à $mE \times En$, & de $aD \times Db$ à $\overline{SD}^2$; lesquelles par la proprieté du cercle qui est la base du cone, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit que tombent les droites MN, AB, parce que les points E, D, ne changent point. Donc le rectangle $MP \times PN$ est au rectangle $AP \times PB$ en raison donnée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

FIG. 143. 144. 275. DE LA on voit que si dans une Section Conique, où entre les Sections opposées, il y a deux lignes droites MN, OR, paralleles entr'elles & qui rencontrent aux points P, Q, une troisiéme ligne droite AB aussi terminée par la Section ; on aura $MP \times PN . OQ \times QR :: AP \times PB . AQ \times QB$.

PROP.

PROPOSITION X.

Theorême.

276. SI *par un point quelconque* A *d'une Parabole ou d'une Hyperbole* MAN, *l'on tire une ligne droite* AB *parallele au côté du cone* SD, *mené dans la Parabole par le point* D *où la Directrice touche la base, & dans l'Hyperbole par l'un des deux points où elle la rencontre; & que par un point quelconque* P *de cette ligne, l'on tire une ligne* MN *parallele à une ligne* SE *donnée de position, & terminée par la Section ou par les Sections opposées, avec une autre ligne* FG *parallele à la ligne* Da *commune Section du plan* SAB *avec celui de la base, & terminée par les côtés* Sa, SD: *je dis que la raison du rectangle* MP × PN *au rectangle* FP × PG *est donnée, c'est à dire qu'elle demeure toûjours la même, en quelque endroit de la ligne* AB *que tombe le point* P. FIG. 145.

Ayant mené par les paralleles, *SE*, *MN*, un plan: il formera dans celui de la base une ligne droite *Enm*; dans la surface Conique les côtés *SMm*, *SNn*; & dans le plan *SDa* la ligne *SPp* qui rencontre la base au point *p*, où les lignes *Em*, *Da*, s'entrecoupent, par lequel je mene dans le plan *SMN* la ligne *HK* parallele à *MN*. Celá posé, les triangles semblables *SPM*, *SpH*; *SPN*, *SpK*; *SPF*, *Spa*; *SPG*, *SpD* donneront $MP \times PN . Hp \times pK :: \overline{SP}^2 . \overline{Sp}^2 :: FP \times PG . ap \times pD$, ou par la proprieté du cercle $mp \times pn$. Et partant on aura $MP \times PN . FP \times PG :: Hp \times pK . mp \times pn$. Mais la raison de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, est composée de deux raisons de *Hp* à *pm*, & de *pK* à *pn*; c'est à dire, à cause des triangles semblables *Hpm*, *SEm*, & *Kpn*, *SEn*, des deux raisons de *SE* à *Em*, & de *SE* à *En*; & par conséquent $Hp \times pK . mp \times pn$, ou $MP \times PN . FP \times PG :: \overline{SE}^2 . mE \times En$. Donc puisque le point *E* ne change point en quelque endroit que l'on prenne le point *P*; & que tous les rectangles $Em \times En$ sont égaux

Aa

par la proprieté du cercle ; il s'ensuit que $MP \times PN$ est à $FP \times PG$ en raison donnée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

FIG. 146. 277. DE-LA il est évident que si par un point quelconque A d'une Parabole ou d'une Hyperbole MAN, l'on mene dans la Parabole un diametre AB, & dans l'Hyperbole une parallele AB à l'une de ses Asymptotes ; & que par deux points quelconques P, Q, de la ligne AB, l'on tire deux paralleles MN, OR, terminées par la Section ou par les Sections opposées, on aura $MP \times PN . OQ \times QR :: AP . AQ$.

Car menant le plan SAB qui forme par sa rencontre avec la surface Conique les côtés SD, Sa, entre lesquels le côté SD passera par le point où la Directrice touche la base lorsque la Section est une Parabole, & par l'un des deux points où la Directrice la rencontre lorsque c'est une Hyperbole ; & tirant dans le plan SDa par les points P, Q, les droites FG, TV, paralleles à Da : il est clair par la Proposition précédente que $MP \times PN . FP \times PG :: OQ \times QR . TQ \times QV$. Et qu'ainsi $MP \times PN . OQ \times QR :: FP \times PG . TQ \times QV$. Or les parties PG, QV, des lignes FG, TV, sont égales entr'elles ; puisque les lignes AB, SD, sont paralleles. Et partant $MP \times PN . OQ \times QR :: FP . TQ :: AP . AQ$. à cause des triangles semblables APF, AQT. Donc &c.

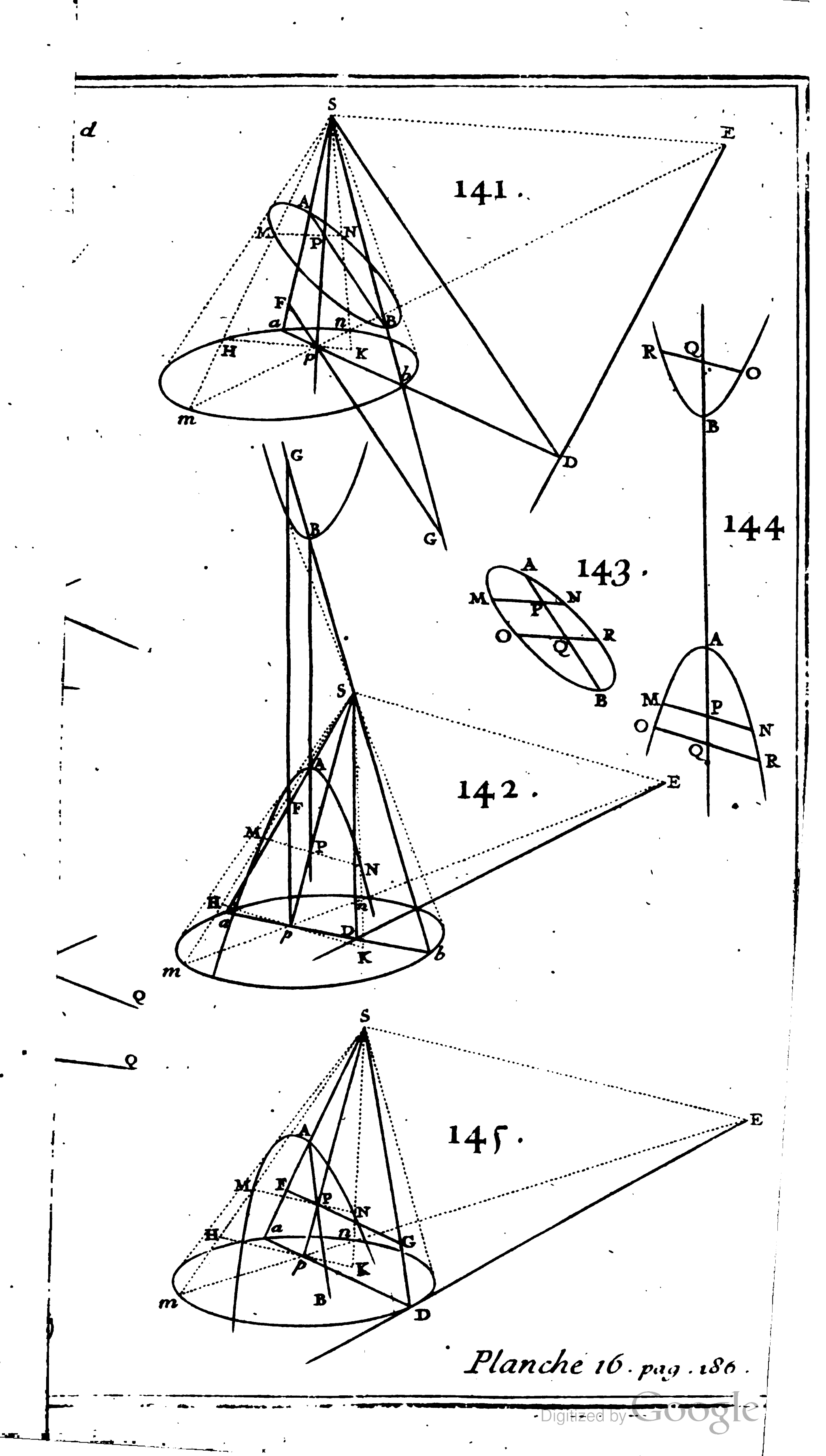
CHAPITRE II.

De l'Ellipse en particulier.

DÉFINITIONS.

17.

FIG. 147. Si une ligne droite indefinie SZ qui est hors le plan d'un cercle VXY, se meut par un de ses points X autour de la circonference de ce cercle toûjours parallele-


141.
142.
143.
144
145.
Planche 16. pag. 186.

lement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle soit revenuë au même point d'où elle étoit partie : la surface convexe décrite par cette ligne *SZ* dans ce mouvement, est appellée *Surface cylindrique*.

18.

Cette ligne *SZ* en chaque differente position, en est toûjours appellée le *Côté*.

19.

Le cercle *VXY*, la *Base*.

20.

La droite indéfinie *CO* menée du centre *C* de la base parallelement aux côtés, en est l'*Axe*.

21.

Le solide indéfini compris par la base *VXY* & par la Surface cylindrique, est appellé *Cylindre*.

22.

Si l'on coupe un Cylindre par un plan qui ne soit point parallele à ses côtés, ni au plan de sa base ; la ligne courbe *AMBN* formée par la rencontre de ce plan avec la Surface cylindrique, est appellé *Section cylindrique*.

PROPOSITION XL.

Problême.

278. S*i l'on coupe un cylindre par un plan* uxy *parallele au plan de la base* VXY ; *la Section* vxy *sera un cercle qui aura pour centre le point* c *où ce plan rencontre l'axe, & pour rayon une ligne* cx *égale au rayon* CX *de la base*. FIG. 147.

Car menant par un point quelconque *x* de la Section *vxy* un côté *xX* de la Surface cylindrique, il sera parallele * à l'axe *Cc* : c'est pourquoi on pourra faire passer un plan par ces deux lignes, qui formera par sa rencontre avec les deux plans paralleles *CVXY*, *cvxy*, deux droites *CX*, *cx*, paralleles entr'elles ; & qui seront de plus égales, puisqu'elles sont renfermées entre * Def. 20.

les paralleles Cc, Xx. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la Section vxy qu'on prenne le point x, il s'ensuit que toutes les lignes cx menées du point c, aux points x de la Section vxy, sont égales aux rayons CX de la base : c'est à dire que la Section vxy sera la circonference d'un cercle, qui aura pour centre le point c, où le plan vxy rencontre l'axe du cylindre, & pour rayon une ligne cx égale au rayon CX de la base. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XII.

Theorême.

FIG. 148. 279. TOUTE *Ellipse peut être regardée comme une Section cylindrique.*

Ayant mené dans la base du cone où est produite une Ellipse quelconque, le diametre ab qui rencontre à angles droits au point D, la Directrice DE, soient tirés sur la surface Conique les côtés Sa, Sb, qui rencontrent le plan de l'Ellipse aux points A, B; & dans les plans paralleles AMB, SDE, les droites AB, SD. Ayant pris DF moyenne proportionnelle entre aD, Db, & mené à SF les paralleles AG, BH, soit décrit sur le plan de la base du cone, un cercle qui ait pour diametre la ligne GH, & une surface cylindrique qui ait pour base ce cercle, & pour côtés les droites AG, BH. Cela posé.

Je dis que si par un point quelconque P de la ligne AB, l'on tire à la Directrice DE, une parallele qui rencontre la surface Conique en M, & la Cylindrique en O; les points M, O, se confondront l'un avec l'autre & n'en feront qu'un seul.

Car ayant fait passer par cette parallele un plan parallele au plan des deux bases tant du cone que du cylindre, il formera sur la surface Conique * un cercle KML dont le centre sera la commune Section de ce

* Art. 259.

plan avec l'axe du cone, & sur la surface Cylindrique * un autre cercle *QMR* dont le centre sera la commune Section de ce même plan avec l'axe du cylindre. Or le plan *Sab* passe * par l'axe du cone, & le plan *AGHB* (qui ne fait qu'un seul plan avec celui du triangle *Sab*) par l'axe * du cylindre ; & par conséquent les lignes *KL*, *QR*, communes Sections de ces deux plans, avec le plan parallele (à la base) qui passe par la ligne *POM*, seront les diametres de ces deux cercles ; & cette ligne *POM* sera perpendiculaire à ces diametres, puisqu'elle est * parallele à *DE* qui est * perpendiculaire à *ab* & à *GH* qui ne font * qu'une même ligne, à laquelle les diametres *KL* & *QR* qui ne font aussi qu'une même ligne, sont paralleles. De plus les lignes *AB*, *SD*, étant formées par les rencontres du même plan *Sba* avec deux plans paralleles entr'eux ; sçavoir, le plan *SDE* & celui de l'Ellipse, seront aussi paralleles entr'elles. Ceci bien entendu.

* Art. 278.
* Def. 9.
* Def. 20.
* Hyp.
* Hyp.
* Hyp.

1°. Dans le cone, à cause du cercle *KML*, on aura $\overline{PM}^2 = KP \times PL$; & à cause des triangles semblables *APK*, *SDa*, & *PBL*, *SDb*, il vient $AP. KP :: SD. aD$. Et $PB. PL :: SD. Db$. D'où il suit que $AP \times PB. KP \times PL$ ou $\overline{PM}^2 :: \overline{SD}^2. aD \times Db$.

2°. Dans le cylindre, à cause du cercle *QOR*, on aura $\overline{PO}^2 = QP \times PR$; & à cause des triangles semblables *APQ*, *SDF*, & *PBR*, *SDF*, on formera ces deux proportions $AP. QP :: SD. DF$. Et $PB. PR :: SD. DF$. D'où il suit que $AP \times PB. QP \times PR$ ou $\overline{PO}^2 :: \overline{SD}^2. \overline{DF}^2$ ou $aD \times Db$. Donc $\overline{PM}^2 = \overline{PO}^2$, & $PM = PO$. Donc les points *M*, *O*, se confondent l'un avec l'autre, & n'en font qu'un seul. Donc, puisque cela arrive toûjours en quelque endroit de la ligne *AB* que l'on prenne le point *P*, il s'ensuit que le plan de l'Ellipse rencontre les surfaces Coniques & Cylindriques dans les mêmes points, & qu'ainsi toute Ellipse peut toûjours être regardée comme une Section cylindrique.

AVERTISSEMENT.

Comme un Cylindre est moins composé qu'un cone, en ce que tous ses côtés sont paralleles entr'eux ; au lieu que dans le cone ils aboutissent tous au même point qui en est le sommet ; on a pris le parti de regarder dans ce Chapitre, l'Ellipse comme la Section d'un cylindre. Ce qui fait qu'on peut démontrer tout à la fois les proprietés de tous ses diametres ; & que se servant ensuite dans le cone (comme l'on verra dans le Chapitre suivant) de plans Elliptiques au lieu de circulaires, on prouvera les mêmes chose dans la Parabole & Hyperbole avec une extrême facilité.

PROPOSITION XIII.

Theorême.

FIG. 149. 280. TOUS *les diametres d'une Ellipse passent par un seul & unique point, qui est celui où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe du cylindre ; & y sont coupés en deux parties égales.*

Et réciproquement toutes les lignes qui passent par ce point, & qui sont terminées de part & d'autre par l'Ellipse ; y sont coupées en deux également, & en sont des diametres.

On nomme ce point le *Centre* de l'Ellipse.

1°. Soit AB un diametre quelconque, & C le point où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe du cylindre. Si l'on mene les lignes Aa, Bb, paralleles à l'axe Cc, il est clair * qu'elles seront des côtés de la surface cylindrique, & que les deux plans FAa, GBb, qui passent par ces deux lignes, & par les deux tangentes AF, BG, qui selon la définition des diametres, doivent être paralleles entr'elles, seront paralleles entr'eux, & toucheront la surface cylindrique dans les côtés Aa, Bb ; d'où il suit que ces deux plans formeront dans le plan de la base deux lignes af, bg, paralleles entr'elles, &

* Déf. 20.

qui toucheront la base aux points a, b, où les côtés Aa, Bb, la rencontrent. Or il est démontré dans les Elemens de Geometrie, que la ligne ab qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles af, bg, d'un cercle, passe par son centre c. Partant le plan $AabB$ passera par l'axe Cc du cylindre; & la ligne AB, qui est la rencontre de ce plan avec celui de l'Ellipse, passera par le point C où cet axe rencontre le plan de l'Ellipse. De plus à cause des paralleles Aa, Bb, Cc; il est évident que le diametre AB de l'Ellipse, est divisé en deux également au point C; puisque le diametre ab du cercle l'est au point c qui en est le centre. *Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.*

2°. Si l'on mene par les extremités A, B, d'une ligne quelconque AB, qui passe par le point C où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe Cc du cylindre, les lignes Aa, Bb, paralleles à cet axe; il est clair selon la définition 17. de la surface cylindrique, qu'elles en seront des côtés, & que le plan $AabB$ passera par l'axe Cc du cylindre. D'où l'on voit que la ligne ab commune Section de ce plan & de celui de la base, passe par le centre c de la base; & qu'ainsi, puisqu'elle y est coupée en deux également, la ligne AB la sera aussi au point C. De plus les tangentes af, bg, qui passent par les extremités du diametre ab étant paralleles entr'elles; les plans touchans faA, gbB, seront paralleles entr'eux, & formeront dans le plan de l'Ellipse deux lignes paralleles AF, BG, qui la toucheront aux extremités A, B, de la ligne AB, qui en sera par conséquent un diametre. *C'est ce qu'il falloit démontrer en second lieu.*

COROLLAIRE.

281. DE-LA il est évident que par un point donné sur le plan d'une Ellipse autre que le centre, on ne peut faire passer qu'un seul diametre.

PROPOSITION XIV.

Theorême.

FIG. 149. 282. TOUTE *ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *est coupée en deux également par ce diametre en un point* P.

Et réciproquement si une ligne quelconque MPN *terminée par une Ellipse & qui ne passe point par le centre* C, *est coupée en deux également en* P, *par un diametre* AB; *elle sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre.*

Ayant mené par les points *A*, *B*, *M*, *N*, les côtés *Aa*, *Bb*, *Mm*, *Nn*, paralleles à l'axe *Cc* du cylindre, & qui rencontrent le plan de la base aux points *a*, *b*, *m*, *n*; la ligne *Pp* commune Section des deux plans *AabB*, *MmnN*, sera parallele aux côtés du cylindre, puisque tous les côtés sont paralleles entr'eux. De plus le plan *AabB* passera par l'axe *Cc* du cylindre, puisque le diametre *AB* passe par le point *C* où cet axe rencontre le plan de l'Ellipse; & il formera par conséquent dans le plan de la base une ligne *ab* qui passera par le centre *c*, c'est à dire, un diametre. Cela posé.

Puisque par la supposition la ligne *MPN* est ordonnée de part & d'autre au diametre *AB*, elle sera parallele aux tangentes *AF*, *BG*, qui passent par les extremités de ce diametre; & par conséquent les plans touchans *FAa*, *GBb*, seront paralleles au plan *MmnN*. Les lignes que ces trois plans forment dans le plan de la base; sçavoir les deux tangentes *af*, *bg*, & la ligne *mn*, seront donc paralleles entr'elles; & ainsi la ligne *mn* sera perpendiculaire au diametre *ab*, qui la divisera par conséquent en deux parties égales au point *p*. D'où il suit à cause des paralleles *Mm*, *Pp*, *Nn*, que la ligne *MN* sera aussi divisée en deux parties égales au point *P*.

Maintenant pour prouver la converse, on menera

dans

dans le plan de l'Ellipse deux tangentes *AF*, *BG*, * paralleles à *MN*; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre *AB*, il est clair selon les définitions 13. & 14. que cette ligne *MN* sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre, & par conséquent (selon ce qu'on vient de démontrer) coupée en deux également en *P* par ce même diametre. Or comme l'on ne peut mener par le point *P* * qu'un seul diametre, il s'ensuit que si une ligne *MN* terminée par une Ellipse, & qui ne passe point par le centre *C*, est coupée en deux également en *P* par un diametre *AB*, elle lui sera ordonnée de part & d'autre.

* *Art.* 267.

* *Art.* 281.

PROPOSITION XV.

Theorême.

283. S'IL *y a dans une Ellipse deux diametres* AB, DE; *dont l'un d'eux* DE *soit parallele aux Tangentes* AF, BG, *qui passent par les extremités de l'autre* AB : *je dis réeciproquement que le diametre* AB *sera parallele aux Tangentes qui passent par les extremités du diametre* DE. FIG. 149.

Les deux diametres *AB*, *DE*, sont appellés *Conjugués* l'un à l'autre.

Ayant mené par les points *A*, *B*, *D*, *E*, les côtés *Aa*, *Bb*, *Dd*, *Ee*, du cylindre, lesquels rencontrent le plan de la base aux points *a*, *b*, *d*, *e*; les plans *AabB*, *DdeE*, passeront par l'axe *Cc* du cylindre, puisque les lignes *AB*, *DE*, sont des diametres de l'Ellipse; & formeront par conséquent dans le plan de la base, deux diametres *ab*, *de*. Or le plan touchant *FAa* étant parallele au plan *DdeE*, formera dans le plan de la base une Tangente *af* parallele au diametre *de*, lequel diametre sera par conséquent perpendiculaire sur le diametre *ab*. Si donc l'on mene par l'une des extremités *d* du diametre *de* une Tangente *dh* au cercle, elle sera parallele au diametre *ab*, & le plan *bdD* parallele au

Bb

plan *AabB* : c'eſt pourquoi les communes Sections de ces deux plans avec le plan de l'Ellipſe, ſçavoir la Tangente *DH* & le diametre *AB*, ſont paralleles entr'elles. On prouvera la même choſe à l'égard de la Tangente qui paſſe par l'autre extremité *E* du diametre *DE*. Donc &c.

COROLLAIRE I.

284. DE-LA il eſt évident que s'il y a deux diametres conjugués *AB*, *DE*, dans une Ellipſe ; les deux plans qui paſſent par ces diametres & par l'axe *Cc* du cylindre, formeront dans le plan de la baſe deux diametres *ab*, *de*, qui ſeront perpendiculaires entr'eux : ce qui eſt réciproque.

COROLLAIRE II.

285. IL ſuit encore de cette Propoſition que ſi par un point quelconque *P* d'un diametre *AB*, on mene une ordonnée *MPN* de part & d'autre, elle ſera parallele au diametre *DE* qui lui eſt conjugué ; & qu'ainſi
* Art. 275. on aura * $MP \times PN$ ou $\overline{PM}^2 . DC \times CE$ ou $\overline{DC}^2$ :: $AP \times PB . AC \times CB$ ou $\overline{AC}^2$. Ce qui donne $\overline{PM}^2 . AP \times PB$ :: $\overline{DC}^2 . \overline{AC}^2$ :: $4\overline{DC}^2$ ou $\overline{DE}^2 . 4\overline{AC}^2$ ou $\overline{AB}^2$. C'eſt à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque *MP* à un diametre *AB*, eſt au rectangle $AP \times PB$ fait des parties de ce diametre, comme le quarré du diametre *DE* qui lui eſt conjugué, eſt au quarré du diametre *AB*.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

FIG. 150. 286. SI *par un point quelconque* M *d'une Ellipſe* AMB, *l'on mene une Tangente* FMG *qui rencontre aux points* F, G, *deux autres Tangentes* AF, BG, *paralleles entr'elles : je dis que* FM. MG :: AF. BG.

Ayant mené par les points d'attouchemens A, B, M, les côtés Aa, Bb, Mm, du cylindre, & fait passer par ces côtés & par les Tangentes AF, BG, FG, les trois plans FAa, GBb, EMm, ou GMm; il est clair que les communes Sections Ff, Gg, des deux premiers plans avec le troisiéme, seront paralleles tant entr'elles, qu'avec les côtés du cylindre; car les deux plans FMm, FAa, passant par les côtés Mm, Aa, qui sont paralleles entr'eux, leur commune Section Ff sera parallele à ces côtés; & par la même raison Gg commune Section des deux plans GBb, GMm, sera parallele aux côtés Bb, Mm. De plus les lignes af, bg, que forment les plans touchans paralleles FAa, GBb, dans le plan de la base, en seront des Tangentes paralleles; les parties fm, mg, de la troisiéme Tangente formée dans le plan de la base par le troisiéme plan touchant FMm, ou GMm, seront égales (par la proprieté du cercle) aux Tangentes af, bg; sçavoir, fm à fa, & mg à gb. Cela posé.

A cause des lignes Aa, Ff, Mm, Gg, Bb; & AF, BG; & af, bg, qui sont paralleles entr'elles, on aura $FM . MG :: fm$ ou $fa . mg$ ou $gb :: FA . GB$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

287. SI l'on mene par les points d'attouchement A, B, des deux Tangentes paralleles entr'elles AF, BG, un diametre AB qui rencontre en T la Tangente FMG, & qu'on tire l'ordonnée MP à ce diametre: il est évident que $AP . PB :: FM . MG :: AF . BG :: AT . BT$. Et qu'ainsi $PB - AP . PB :: BT - AT$ ou $AB . BT$.

COROLLAIRE II.

288. DE-LA on tire la maniére suivante de mener d'un point donné M sur une Ellipse la Tangente MT, un diametre AB etant donné avec la position de ses ordonnees.

De l'une des extremités *B* du diametre *AB*, soit tirée au point donné *M* la droite *BM*. Puis ayant mené l'ordonnée *MP* au diametre *AB*, & pris sur ce diametre du côté de *B* la partie *PH* égale à *PA*, soit tirée *HK* parallele à *PM*, rencontrant la ligne *BM* en *K*, par où & par l'autre extremité *A* soit menée *AK*. Soit enfin tirée *MT* parallele à *AK*, elle sera la Tangente qu'on cherche.

Car à cause des paralleles *MP*, *HK*, & *AK*, *MT*, l'on aura *BP*. *PH*. ou *PA* :: *BM*. *MK* :: *BT*. *TA*.

COROLLAIRE III.

289. S'IL y a dans une Ellipse deux Tangentes *MT*, *NT*, qui se rencontrent en un point *T*; je dis que le diametre *AB* qui passe par le point *P* milieu de la ligne *MN* qui joint les deux points d'attouchement, passera aussi par le point *T*. Car *PN* est ordonnée au diametre
* Art. 287. *AB* de même que *PM*; & par conséquent * les Tangentes *MT*, *NT*, iront chacune rencontrer ce diametre en un point *T*, tel que *PB* — *AP*. *PB* :: *AB*. *BT*; c'est à dire dans le même point.

COROLLAIRE IV.

290. SI l'on joint dans une Ellipse les points d'attouchemens *M*, *N*, de deux Tangentes *MF*, *NL*, par une ligne droite *MN*; & qu'il y ait une troisiéme Tangente *FAL* parallele à *MN*: je dis que les parties *FA*, *AL* de cette dernier Tangente, prises entre son point d'attouchement *A* & les deux premieres, seront égales entr'elles. Car ayant mené par le point d'attouchement *A* le diametre *AB*, il est clair que la ligne *MN* est ordonnée de part & d'autre à ce diametre, puisqu'elle est parallele à la Tangente *FL* qui passe par son extremité *A*; & qu'ainsi il la coupe par le milieu en
* Art. 289. *P*, & passe * par conséquent par le point de rencontre

T des deux Tangentes *MF*, *NL*; ou bien il leur sera parallele, si la ligne *MN* est un diametre. Or il est visible en l'un & l'autre cas, que *FL* sera divisé en deux parties égales au point *A* par le diametre *AB*; puisque *MN* l'est en *P*, par ce même diametre. * *Art.* 283.

CHAPITRE III.

De la Parabole & de l'Hyperbole en particulier.

PROPOSITION XVII.

Theorême.

291. DANS *une Parabole toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *est coupée en deux également par ce diametre au point* P: *ce qui est reciproque.* FIG. 151.

Ayant fait passer par la ligne *MN* un plan Elliptique, il formera dans le plan touchant *SDE* parallele au plan Parabolique, une Tangente *DE* parallele à *MN*. De plus le plan *SAF* mené par le Sommet *S* du cone, & par la Tangente *AF* qui passe par l'origine *A* du diametre *AB*, formera dans le plan Elliptique une Tangente *af*; & la ligne *Da* qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes *DE*, *af*, passera par le point *P*; puisque le diametre *AB* est parallele au côté touchant *SD*. Cela posé.

Puisque par la supposition * les deux lignes *AF*, *MN*, sont paralleles entr'elles; il s'ensuit que la Tangente *af*, qui est la commune Section de deux plans qui passent par ces deux lignes, sera parallele à *MN*; & par conséquent à *DE*. D'où l'on voit * que la ligne *Da*, qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes paralleles *DE*, *af*, est un diametre de l'Ellipse; & qu'ainsi la ligne *MN* qui est parallele à ces Tangentes & terminée par l'Ellipse, sera * divisée en deux également au point *P*. * *Def.* 14. * *Def.* 15. * *Art.* 282.

Maintenant pour prouver la converse, on menera

* Art. 267. dans le plan de la Parabole * une Tangente *AF* parallele à la ligne *MN*; & ayant tiré par le point d'attouchement *A* un diametre *AB*, il aura pour ordonnée de part & d'autre * la ligne *MN*, qu'il divisera par conséquent en deux parties egales au point *P* selon ce qu'on vient de démontrer. Or comme il n'y a qu'un seul diametre * qui puisse passer par le point de milieu *P* de la ligne *MN*, il s'ensuit &c.

* Def. 14.

* Art. 268.

COROLLAIRE.

292. DE-LA il est évident que si l'on mene par deux points quelconques *P*, *Q*, d'un diametre *AB* deux ordonnées de part & d'autre *MPN*, *OQR*; on aura toûjours * $MP \times PN$ ou $\overline{PM}^2 . OQ \times QR$ ou $\overline{QO}^2 :: AP . AQ$. C'est à dire que les quarrés des deux ordonnées quelconques *PM*, *QO*, à un diametre *AB*, seront toûjours entr'eux, comme les parties *AP*, *AQ*, de ce diametre prises depuis son origine *A* jusqu'à ces mêmes ordonnées.

* Art. 277.

PROPOSITION XVIII.

Theorême.

Fig. 151. 293. SI *par un point quelconque* M *d'une Parabole, l'on mene une ordonnée* MP *à tel de ses diametres* AB *qu'on voudra, & une Tangente* MT *qui rencontre en* T *ce diametre prolongé au delà de son origine* A; *je dis que ses parties* AP, AT, *sont égales.*

La même préparation étant faite que dans la Proposition précédente, soit de plus mené par le Sommet *S* du cone & par la Tangente *MT*, le plan touchant *STM* qui formera dans le plan Elliptique la Tangente *MH*, laquelle rencontrera le diametre *Da* de l'Ellipse en un point *H* par où passera la ligne *ST*; & soit enfin tirée la droite *TG* parallele à *SA*. Ceci bien entendu, on aura * $DH . Ha :: DP . Pa$, & (*alternando*)

* Art. 287.

$DH.DP :: Ha.Pa$. Mais à cause des paralleles AB, SD, & S[illegible], TG; il est clair que $DH.DP :: SH.ST :: Ha.Ga$. Donc $Ha.Pa :: Ha.Ga$. Donc aussi $Pa = Ga$; & par conséquent $AP = AT$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XIX.

Theorême.

294. DANS *les Hyperboles opposées tout diametre* AB *passe par le point d'intersection* C *des deux asymptotes, & y est coupé en deux également : ce qui est reciproque.* FIG. 152.

On nommera ce point, *Centre.*

Soit HSh une des deux communes Sections du plan parallele au plan Hyperbolique, & des deux surfaces Coniques opposées; & soit l'Asymptote FG formée par la rencontre du plan Hyperbolique avec celui qui touche ces deux surfaces en cette ligne HSh. Soient menées par les Tangentes paralleles AF, BG, qui passent par les extremités du diametre AB, & qui rencontrent l'Asymptote FG aux points F, G, deux plans Elliptiques paralleles; ils formeront dans le plan touchant qui passe par le côté HSh, les Tangentes paralleles FH, Ghf, & dans le plan touchant SAF les Tangentes paralleles AF, af.

Cela posé, les lignes paralleles FH, Gh, étant renfermées entre les deux autres paralleles FG, Hh, seront égales entr'elles; & les triangles semblables SHF, Shf, & SFA, Sfa, donneront cette proportion, $HF.hf :: SF.sf :: FA.fa$. Et partant $HF.FA :: hf.fa ::$ * $hG.GB$. Donc puisque $HF = hG$, il s'ensuit que $AF = BG$; & à cause des triangles semblables ACF, BCG, que $AC = CB$: c'est à dire que l'Asymptote FG passe par le point de milieu C du diametre AB. On prouvera de même que l'autre Asymptote passera encore par le point de milieu C du diametre AB; d'où l'on voit que le diametre AB passe par le * Art. 286.

point d'interſection *C* des deux Aſymptotes, & y eſt coupé en deux parties égales.

Soit à preſent une ligne *AB* qui paſſant par le point d'interſection *C* des deux Aſymptotes, rencontre les Hyperboles oppoſées aux points *A*, *B*. Si l'on mene par le point *A* la Tangente *AF*, & à l'Hyperbole oppoſée une Tangente *DG* * parallele à *AF*; il eſt clair par ce qu'on vient de prouver que la ligne *AD* qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes étant un diametre, paſſera par le point d'interſection *C* des Aſymptotes. Elle ſe confondra donc avec la ligne *AB* qui paſſe auſſi * par les deux mêmes points *A*, *C*: c'eſt à dire que le point *D* tombera ſur le point *B*. C'eſt pourquoi cette ligne *AB* ſera un diametre, & partant coupée en deux parties égales au point *C*.

* *Art.* 267.

* *Hyp.*

COROLLAIRE.

295. DE-LA on voit que d'un point donné au dedans d'une Hyperbole, on ne peut mener qu'un ſeul diametre; puiſqu'il n'y a qu'une ſeul ligne qui puiſſe paſſer par ce point, & par le centre.

PROPOSITION XX.

Theorême.

FIG. 153.

296. DANS *les Hyperboles oppoſées toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *eſt coupée en deux également par ce diametre au point* P: *ce qui eſt reciproque.*

Ayant fait paſſer par la ligne *MN* un plan Elliptique, il formera dans les deux plans touchans *SAF*, *SBG*, deux Tangentes *af*, *bg*; & la ligne *ab* qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes, étant la commune Section du plan Elliptique & du plan *SAB*, paſſera par le point *P*. Or puiſque par la ſuppoſition

les

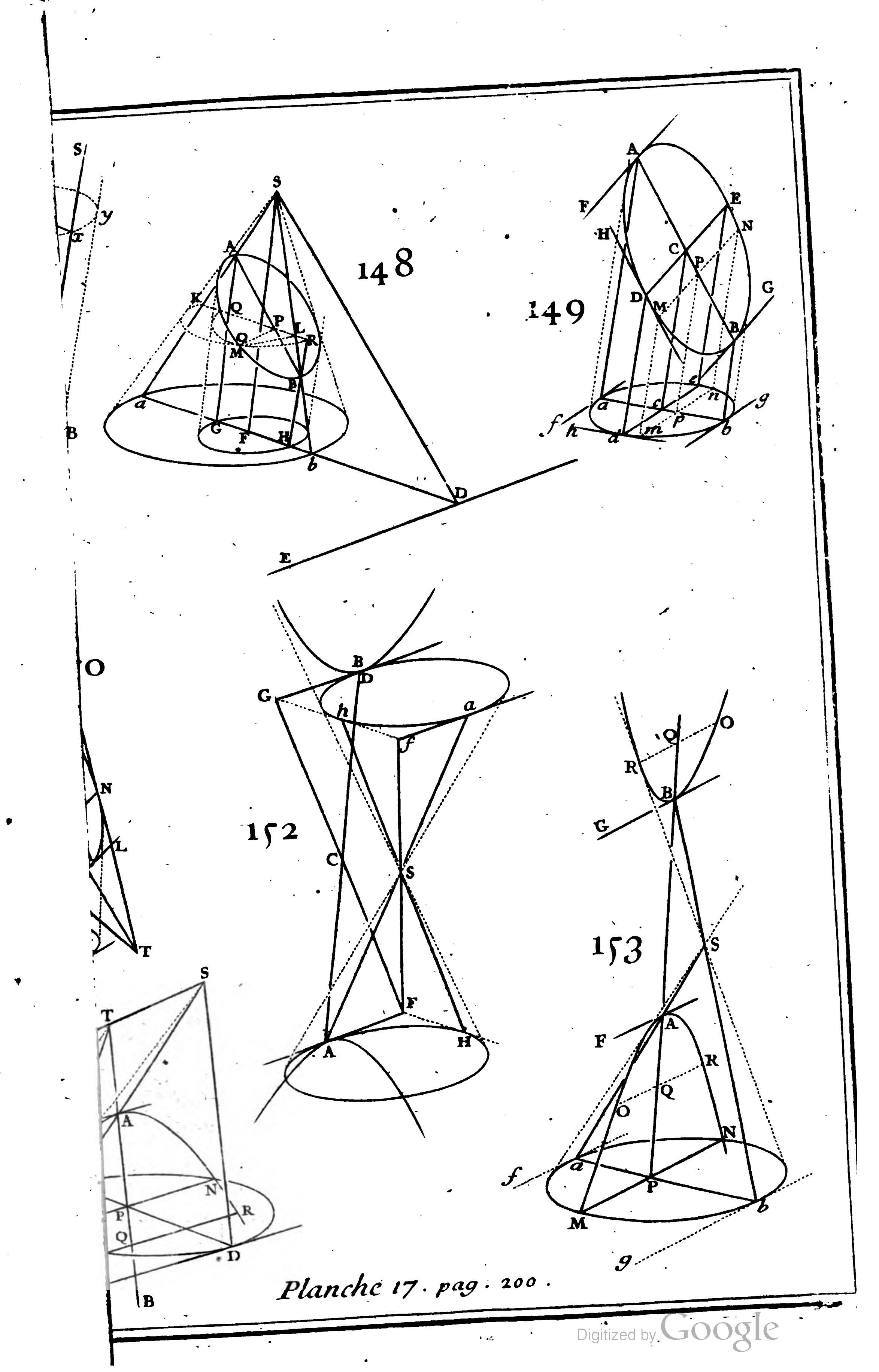


Planche 17. pag. 200.

les deux lignes AF, MN, sont paralleles, il s'ensuit que la ligne af qui est la commune Section de deux plans, qui passent par ces deux lignes, sera parallele à MN. Par la même raison la Tangente bg commune Section du plan Elliptique & du plan touchant SBG, lesquels passent par les deux paralleles MN, BG, sera parallele à MN. Les deux Tangentes af, bg, seront donc paralleles entr'elles : d'où il suit que la ligne ab * est un diametre * *Def.* 13.
de l'Ellipse ; & qu'ainsi la ligne MN * est divisée en deux * *Art.* 282.
parties égales au point P.

Maintenant pour prouver la converse, on menera dans le plan des Hyperboles * deux Tangentes AF, BG, paral- * *Art.* 267.
leles à la ligne MN terminée par l'Hyperbole ; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre AB, il est clair selon la Définition quatorziéme, que ce diametre aura pour ordonnée de part & d'autre la ligne MN ; & qu'ainsi il la coupera selon ce qu'on le vient de démontrer, en deux parties égales au point P. Or comme il n'y a qu'un seul diametre * qui puisse passer par ce point, il s'ensuit que * *Art.* 295.
si une ligne MN terminée par une Hyperbole, est coupée en deux également en P par un diametre AB, elle sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre.

COROLLAIRE.

297. DE LA il est évident que si l'on mene deux ordonnées de part & d'autre MPN, OQR, à un diametre AB, on aura toûjours * $MP \times PN$. ou $\overline{PM}^2$. * *Art.* 275.
$OQ \times QR$ ou $\overline{QO}^2$ :: $AP \times PB$. $AQ \times QB$. C'est à dire &c.

PROPOSITION XXI.

Theorême.

298. *Si par un point quelconque* M *d'une Hyperbole l'on* FIG. 154.
mene une Tangente MFG *qui rencontre deux autres Tangentes paralleles* AF, BG, *aux point* F, G : *je dis que* MF. MG :: AF. BG.

Ayant mené deux plans Elliptiques paralleles qui passent par les Tangentes *AF*, *BG*; ils formeront dans le plan touchant *SMG* deux Tangentes *HF*, *hG*, paralleles entr'elles; & le plan Elliptique qui passe par *BG*, formera dans le plan touchant *SAF*, une Tangente *af* qui rencontrera la Tangente *hG* au point *f*, où la ligne *FS* rencontre ce plan Elliptique. Cela posé, les Tangentes *af*, *BG*, seront paralleles entr'elles; puisqu'elles le

* Art. 268. sont chacune à la Tangente *AF*: & partant * on aura *BG*. *Gh* :: *af*. *fh* (à cause des triangles semblables *Shf*, *SHF*, & *Saf*, *SAF*,) :: *AF*. *FH*. Donc *BG*. *AF* :: *Gh*. *FH* (à cause des triangles semblables *MGh*, *MFH*,) :: *MG*. *MF*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Il est visible qu'on peut tirer de cette Proposition les mêmes Corollaires, que dans l'Ellipse art. 287. 288. 289. & 290. c'est pourquoi je ne m'amuserai point à les repeter.

PROPOSITION XXII.

Theorême.

FIG. 155. 299. S*i une ligne droite* FG *terminée par les Asymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point* A; *je dis que cette ligne droite y sera coupée en deux parties égales.*

Soient menés par le Sommet *S* du cone, & par les deux Asymptotes *CF*, *CG*, deux plans, lesquels toucheront

* Def. 16. * la surface Conique dans les côtés *SM*, *SN*, où le plan *MSN* parallele au plan Hyperbolique la rencontre. Soit mené un plan Elliptique qui passe par la droite *FG*: il formera dans les deux plans touchans deux Tangentes *MF*, *NG*, & dans le plan *MSN* une ligne droite *MN* parallele à *FG*, & qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes. Cela posé, il est vi-

* Art. 290. sible que la ligne *FG* * est coupée en deux parties égales au point *A*, puisqu'elle touche dans ce point l'Ellipse, aussi bien que l'Hyperbole.

COROLLAIRE I.

300. COMME il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne *FG* qui paſſant par un point donné *A* au dedans d'un angle *FCG*, & étant terminée par ſes côtés, ſoit coupée en deux également par ce point *A*; il s'enſuit que ſi une ligne droite *FG* terminée par les Aſymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point *A* qui diviſe cette droite *FG* en deux parties égales, elle touchera l'Hyperbole en ce point.

COROLLAIRE II.

301. DE-LA on voit que pour mener d'un point donné *A* ſur une Hyperbole dont les Aſymptotes *CF*, *CG*, ſont données, une Tangente *FAG*; il n'y a qu'à tirer la ligne *AD* parallele à l'une des Aſymptotes *CG*, & terminée par l'autre, & ayant pris la partie *DF* égale à *CD*, tirer la ligne *FAG*: elle ſera la Tangente cherchée. Car à cauſe des triangles ſemblables *FCG*, *FDA*, la ligne *FG* ſera coupée par le milieu en *A*; puiſque * *CF* l'eſt en *D*. * *Hyp.*

COROLLAIRE III.

302. SI l'on joint deux points quelconques *M*, *N*, d'une Hyperbole *MAN* par une ligne droite qui rencontre les Aſymptotes aux points *H*, *K*; les deux parties *MH*, *NK*, de cette droite renfermées entre l'Hyperbole & les Aſymptotes, ſeront égales entr'elles. Car ayant mené par le point *P* milieu de *MN*, le diametre *CP*; & par le point *A* où ce diametre rencontre l'Hyperbole, la ligne *FG* parallele à *MN*, & terminée par les Aſymptotes: il eſt clair * que cette ligne *FG* ſera Tangente en *A*; & par conſéquent * diviſée en deux parties égales en ce point. D'où il eſt clair, à cauſe des triangles ſemblables *CAF*, *CPH*, & *CAG*, *CPK*, que *PH* = *PK*; & par conſéquent *MH* = *NK*. FIG. 156. * *Art.* 298. * *Art.* 299.

COROLLAIRE IV.

FIG. 157. 303. Si d'un point donné A sur une Hyperbole, l'on tire deux droites AF, AG, terminées par les Asymptotes; & que d'un autre point quelconque M de la même Hyperbole, ou de son opposée, on tire deux autres droites MH, MK, terminées aussi par ses Asymptotes, & paralleles aux deux premieres AF, AG : je dis que $FA \times AG = HM \times MK$.

Car 1°. Lorsque les deux points A, M, tombent sur la même Hyperbole; ayant joint ces deux points A, M, par une ligne droite qui rencontre les Asymptotes en P & Q, les triangles semblables PAF, PMH, & QMK, QAG, donneront ces deux proportions, $AF . MH :: AP . MP$ * $:: MQ . AQ :: MK . AG$. ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, $FA \times AG = HM \times MK$.

* Art. 302.

2°. Lorsque les points A, M, tombent sur les deux Hyperboles opposées; ayant mené par le point donné A & par le centre C, le diametre AB, & tiré les droites BD, BE, paralleles à AF, AG, & terminées par les mêmes Asymptotes; il est clair que les triangles CAF, CBD, & CAG, CBE, seront semblables & de plus égaux entr'eux, puisque * $CA = CB$. C'est pourquoi $BD = AF$, & $BE = AG$; & partant $DB \times BE = FA \times AG$. Or selon le cas précédent $KM \times MH = DB \times BE$. Donc aussi $FA \times AG = KM \times MH$.

* Art. 294.

AVERTISSEMENT.

Je laisse les autres proprietés des Asymptotes, & des Diametres conjugués, parce qu'elles se tirent de celles-ci sur le plan, comme l'on a fait dans le troisiéme Livre; mon dessein n'étant ici que de faire voir de quelle utilité peut être la consideration du Solide, pour démontrer tout à la fois & sans aucun calcul, les pro-

prietés de tous les Diametres, des Tangentes, & des Asymptotes; d'où dépendent toutes les autres. C'est ce que je crois avoir executé d'une maniére fort aisée, & entierement nouvelle; puisque je ne me suis point servi de lignes coupées harmoniquement, comme ont fait les Geometres Modernes après M^rs. *Paschal* & *Descartes*; ce qui les a obligés d'avoir recours à un grand nombre de Lemmes, dont les démonstrations seules me paroissent aussi longues que celles de tout ce Livre.



LIVRE SEPTIE'ME.

Des Lieux Geometriques.

DE'FINITION I.

FIG. 158. & 159. SOIENT deux droites inconnuës & indéterminées AP, PM, qui faſſent entr'elles un angle APM donné ou pris à volonté ; & dont l'une AP que j'appellerai toûjours x, ait un commencement fixe au point A, & s'étende indéfiniment le long d'une ligne droite donnée de poſition ; & l'autre PM que je nommerai y, en change continuellement, & ſoit toûjours parallele à elle-même : c'eſt à dire que toutes les droites PM doivent être paralleles entr'elles. Soit de plus une équation qui ne renferme que ces deux inconnuës x & y mêlées avec des connuës, & qui exprime la relation de chaque indéterminée AP (x) à ſa correſpondante PM (y). La ligne droite ou courbe qui paſſe par les extremités de toutes les valeurs de y, c'eſt à dire, par tous les points M, eſt appellée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation.

FIG. 158. Suppoſons, par exemple, que l'équation $y = \frac{bx}{a}$ doive exprimer toûjours la relation de AP (x) à PM (y) qui font entr'elles un angle donné ou pris à volonté APM. Ayant pris ſur la ligne AP la partie $AB = a$, & de B mené $BE = b$ parallele à PM & du même côté ; la droite indéfinie AE ſera nommée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la droite MP parallele à BE, les triangles ſemblables ABE, APM, donneront toûjours cette proportion, AB (a). BE (b) : : AP (x). PM $(y) = \frac{bx}{a}$. Et partant la droite AE eſt le lieu de tous les points M.

De même si $yy = aa - xx$ exprime la relation de *AP* à *PM*, & que l'angle *APM* soit droit ; la circonference d'un cercle qui a pour rayon la droite $AB = a$ prise sur la ligne *AP*, sera appellée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ses points quelconques *M*, la perpendiculaire *MP* (y), on aura toûjours par la proprieté du cercle, $\overline{PM}^2$ (yy) $= DP \times PB$ ($aa - xx$) en prenant *BD* pour le diametre de ce cercle. D'où l'on voit que sa circonference est le lieu de tous les points *M*. FIG. 159.

REMARQUE.

304. Si après avoir supposé que les *PM* tendent vers un certain côté de la ligne *AB*, comme vers *Q*, on suppose ensuite qu'elles tendent vers le côté opposé, comme vers *G* ; il faut remarquer que leurs valeurs deviennent négatives de positives qu'elles étoient, & qu'ainsi on a pour lors $PM = -y$. De même si après avoir supposé que les points *P* tombent d'un certain côté par rapport au point *A*, comme du côté de *B*, on suppose ensuite qu'ils tombent du côté opposé, comme vers *D* ; les *AP* deviendront négatives de positives qu'elles étoient, & on aura par conséquent $AP = -x$. Les positives de ces valeurs s'appellent aussi Valeurs *vraies* ; & les négatives, Valeurs *fausses*. Or un lieu Geometrique doit passer par les extremités de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y, qui répondent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x. Si donc l'on mene la droite *QAG* parallele à *PM*, un lieu Geometrique pourra se trouver dans les quatre angles *BAQ*, *BAG*, *GAD*, *DAQ*, comme dans le second exemple (*fig.* 159.), ou seulement dans quelques-uns de ces angles comme dans le premier (*fig.* 158). Car supposé dans le second exemple, qu'on fasse d'abord $AP = x$, & $PM = y$, en prenant le point *M* sur le quart *QB* de la circonference ; si ensuite le point *M* FIG. 158. 159.

eſt pris ſur le quart GB, on aura $AP = x$, & $PM = -y$; s'il eſt pris ſur DG, on aura $AP = -x$, & $PM = -y$; & enfin s'il eſt pris ſur DQ, on aura $AP = -x$, & $PM = y$; & il viendra toûjours dans tous ces cas par la proprieté du cercle, la même équation $yy = aa - xx$; parce que les quarrés de $\pm y$ & de $\pm x$ ſont les mêmes dans tous ces cas, ſçavoir yy & xx. De même dans le premier exemple, ſi en prenant d'abord le point M du côté de E ſur AE, dans l'angle QAP, on fait $AP = x$, & $PM = y$; Ce point M pris enſuite ſur EA prolongée du côté de A dans l'angle GAD, donnera $AP = -x$, & $PM = -y$; & à cauſe des triangles ſemblables ABE, APM, on formera cette proportion $AB\,(a) . BE\,(b) :: AP\,(-x) . PM\,(-y) = -\frac{bx}{a}$; & partant $y = \frac{bx}{a}$, qui eſt la même équation que l'on trouve en ſuppoſant que le point M tombe dans l'angle BAQ.

AVERTISSEMENT.

Lorſqu'il s'agira dans la ſuite de conſtruire le lieu d'une équation donnée, on ſuppoſera toûjours que $AP\,(x)$ & $PM\,(y)$ ſoient poſitives, c'eſt à dire que tous les points M tombent dans le même angle BAQ. Et on prendra pour le lieu de l'équation donnée la portion du lieu qui ſera renfermée dans cet angle.

DE'FINITION II.

Les anciens Geometres ont appellé *Lieux plans*, ceux qui ſont des lignes droites, ou des cercles; *Solides*, ceux qui ſont des Paraboles, des Ellipſes, ou des Hyperboles. Mais les Modernes diſtribuënt les lieux Geometriques en differens degrés : ils comprennent ſous le premier tous ceux où les inconnuës x & y n'ont qu'une dimenſion dans leurs équations; ſous le ſecond, tous ceux où elles n'en ont que deux; ſous le troiſiéme, tous ceux où elles n'en ont que trois; & ainſi de ſuite. Où l'on doit

doit observer que les inconnuës x & y ne se doivent point multiplier l'une l'autre dans le premier degré ; qu'elles ne doivent faire au plus ensemble qu'un produit de deux dimensions xy dans le second, un de trois xxy ou xyy dans le troisiéme, &c.

DÉFINITION III.

Les termes de l'équation d'un lieu, sont regardés comme differens entr'eux lorsque l'une ou l'autre des inconnuës x & y, ou toutes les deux jointes ensemble s'y trouvent avec differentes dimensions. Ainsi dans le premier degré si l'on propose l'équation $y - \frac{bx}{a} + c = a$, les termes y, $-\frac{bx}{a}$, c, seront differens ; & de même dans le second, si l'on proposoit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy - \frac{fxx}{a} + gx + hx - hh + ll = 0$, les termes yy, $\frac{2bxy}{a}$, $-2cy$, $-\frac{fxx}{a}$, $gx + hx$, $-hh + ll$, seroient chacun differens.

AVERTISSEMENT.

Je n'expliquerai ici en détail que les lieux du premier & du second degré ; ce que j'en dirai donnera beaucoup d'ouverture pour construire des lieux plus composés dans les cas particuliers qui se peuvent rencontrer : on en trouvera même quelques exemples dans la suite. Mon dessein est donc de donner dans ce Livre une méthode générale pour construire les lieux du premier & du second degré, leurs équations étant données ; & de faire voir que le premier ne renferme que la ligne droite ; & que le second ne renferme de même que la Parabole, l'Ellipse & le Cercle, l'Hyperbole & les Hyperboles opposées.

DEMANDE.

c. 305. ON demande qu'on puisse réduire sous une fraction simple & abregée, toute quantité litterale donnée, si composee qu'elle puisse être.

On demande par exemple, 1°. Qu'on puisse prendre une fraction simple $\frac{b}{a} = \frac{cc+ff}{af+fc} + \frac{aa}{gg}$, où les lettres a, c, f, g, marquent des lignes données. 2°. Qu'on puisse trouver une seule ligne droite $s = \frac{age - bce}{bb+af}$, où les lignes droites a, b, c, e, f, g, sont données. 3°. Qu'on puisse trouver un quarré $tt = ss - \frac{ccee - eebb}{bb+af}$, où les lignes a, b, c, e, f, h, s, sont données; de sorte qu'on ait son côté $t = \sqrt{ss - \frac{ccee - eebb}{bb+af}}$. On enseignera au commencement du ~~huitiéme~~ neuvieme Livre comment cela se fait.

PROPOSITION I.

Problême.

c. 306. CONSTRUIRE *tout lieu du premier degré, son équation étant donnée.*

Lorsque les inconnuës x & y n'ont qu'une dimension dans l'équation proposée, & que leur produit xy ne s'y rencontre point; le lieu de cette équation sera toûjours une ligne droite, & on la reduira à l'une des quatre formules suivantes.

$1°. y = \frac{bx}{a}$, $2°. y = \frac{bx}{a} + c$, $3°. y = \frac{bx}{a} - c$, $4°. y = c - \frac{bx}{a}$,

dans lesquelles on suppose que l'inconnuë y soit delivrée de fractions, & que la fraction qui multiplie l'autre inconnuë x soit réduite * sous cette expression $\frac{b}{a}$, & tous les termes connus sous cette autre c.

* *Art.* 305.

Les mêmes choses étant posées que dans la définition premiere, on construira les lieux des trois dernie-

ces formules de la maniere qui suit ; car pour le lieu de la premiere, on l'a déja construit dans cette définition.

Pour construire le lieu de la seconde formule $y = \frac{bx}{a} + c$, on prendra sur la ligne *AP* la partie $AB = a$; & ayant mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à *PM* & du même côté, on tirera la ligne *AE* indéfinie du côté de *E*, & la droite indéfinie *DM* parallele à *AE*. Je dis que cette ligne *DM* renfermée dans l'angle *PAQ* fait par la ligne *AP* & par la droite *AQ* menée parallelement à *PM* & du même côté, sera la ligne de cette équation ou formule. Car ayant mené d'un de ses points quelconques *M* la ligne *MP* parallele à *AQ* & qui rencontre *AE* en *F* ; les triangles semblables *ABE*, *APF*, donneront $AB(a). BE(b) :: AP(x). PF = \frac{bx}{a}$. Et partant $PM(y) = PF\left(\frac{bx}{a}\right) + FM(c)$. FIG. 160.

Le lieu de la troisiéme formule $y = \frac{bx}{a} - c$ se construit en cette sorte. Ayant pris $AB = a$, & mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à *PM* ; sçavoir, *BE* du même côté que *AQ*, & *AD* du côté opposé ; on tirera par les points *A*, *E*, la droite *AE* indefinie du côté de *E*, & par le point *D* la ligne *DM* parallele à *AE*, & qui rencontre *AP* en *G*. Je dis que la droite indéfinie *GM* renfermée dans l'angle *PAQ*, sera le lieu qu'on cherche. Car on aura toûjours $PM(y) = PF\left(\frac{bx}{a}\right) - FM(c)$. FIG. 161.

Enfin pour avoir le lieu de la quatriéme formule $y = c - \frac{bx}{a}$. Ayant pris sur *AP* la partie $AB = a$, & mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à *PM* ; sçavoir *BE* du côté opposé, & *AD* du même côté que *AQ* ; on tirera par les points *A*, *E*, la ligne *AE* indéfinie du côté de *E* ; & par le point *D* la ligne *DM* parallele à *AE*, & qui rencontre en *G* la ligne *AP*. Je dis que la droite *DG* renfermée dans l'angle *PAQ*, sera le lieu cherché. Car ayant mené d'un de ses points quelconques *M* la ligne FIG. 162.

MP parallele à AQ, & qui rencontre AE en F, on aura toûjours PM $(y) = FM(c) - PF\left(\frac{bx}{a}\right)$.

Si l'inconnuë x n'est multipliée par aucune fraction, les quatre formules précédentes se changeront en celles ci.

1°. $y = x$, 2°. $y = x + c$, 3°. $y = x - c$, 4°. $y = c - x$, lesquelles se construisent de la même maniere, en observant de prendre la droite BE égale à AB que l'on prend de telle grandeur qu'on veut.

REMARQUE.

c. 307. Il peut arriver que l'équation soit un lieu à la ligne droite, quoiqu'elle ne renferme qu'une des inconnuës x ou y; ce qui donne encore ces deux nouvelles formules, $y = c$, & $x = c$.

FIG. 163. Pour construire la premiere formule $y = c$. Les mêmes choses étant toûjours posées que dans la définition premiere; on menera par le point fixe A, la droite $AD = c$ parallele à PM & du même côté, on tirera ensuite la droite indéfinie DM parallele à AP: je dis que cette ligne DM sera le lieu de l'équation proposee. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la droite MP parallele à AD, il est clair qu'on aura toûjours PM $(y) = AD$ (c).

FIG. 164. Pour construire la seconde formule $x = c$. Ayant pris $AP = c$, on tirera la droite indefinie PM qui fasse avec AP l'angle APM donné ou pris à volonté: je dis qu'elle sera le lieu de tous les points M. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la droite MQ parallele à AP, & qui rencontre au point Q l'indéfinie AQ parallele à PM; il est clair qu'on aura toûjours MQ ou AP $(x) = c$, de quelque grandeur que l'on puisse prendre PM (y).

AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il est à propos pour éclairer l'esprit des Lecteurs, de leur donner une idée de la méthode dont

je vais me servir pour la construction des lieux du second degré. Elle consiste à construire d'abord une Parabole en sorte que l'équation qui en exprime la nature soit la plus composée qu'il se puisse, de faire ensuite la même chose dans l'Ellipse, & dans l'Hyperbole rapportée à ses diametres & considerée entre les asymptotes ; ce qui fournit des équations ou formules generales. J'examine ce qu'elles ont chacune de particulier, afin qu'une équation étant proposée, je puisse connoître à laquelle de ces formules elle doit être rapportée ; & comparant ensuite tous ses termes avec ceux de la formule, j'en tire la construction du lieu de cette équation, en observant certaines remarques qui servent pour toutes les formules. Tout ceci s'éclaircira parfaitement dans les Lemmes & Propositions qui suivent.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à la Parabole.

308. SOIENT comme dans la premiere définition deux lignes droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y) ; & soient de plus des lignes droites données e, m, n, p, r, s. Cela posé. FIG. 165. & 166.

1°. On prendra sur la ligne AP, la partie $AB = m$; ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à PM & du même côté, on tirera par le point A la droite AE que j'appelle e, & par le point D la droite indéfinie DG parallele à AE ; sur laquelle DG ayant pris la partie $DC = s$ du côté de PM, on décrira * du diametre CG qui ait pour parametre $CH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM ; une Parabole CM qui s'étende du même côté que AP. Je dis que sa portion renfermée dans l'angle PAD, fait par la ligne AP, & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, est le lieu de l'équation ou formule suivante. FIG. 165. * Art. 161.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0.$$
$$- \frac{ep}{m}x + ps.$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M de cette portion de Parabole, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF, donneront ces deux proportions, AB (m). AE (e) :: AP (x). AF ou $DG = \frac{ex}{m}$. Et AB (m). BE (n) :: AP (x). $PF = \frac{nx}{m}$. Et par conséquent GM ou $PM - PF - FG = y - \frac{nx}{m} - r$, & CG ou $DG - DC$

* Art. 19. $= \frac{ex}{m} - s$. Or la Parabole donne * $\overline{GM}^2 = CG \times CH$, laquelle équation se change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc. &c.

FIG. 166. 2°. On menera par le point fixe A, une ligne droite indéfinie AQ parallele à PM & du même côté; & ayant pris sur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallele à AP & du même côté que PM, & par les points déterminés A, E, la ligne AE que j'appelle e; & ayant pris sur AP la partie $AD = r$ du même côté que PM, on tirera la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle on prendra la partie $DC = s$ aussi

* Art. 161. du même côté de PM. On décrira ensuite du diametre CG qui ait pour parametre $CH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à AP, une Parabole CM qui s'étende du même côté que AQ. Je dis que sa portion renfermée dans l'angle BAP, sera le lieu de cette seconde équation ou formule.

$$xx - \frac{2n}{m}yx + \frac{nn}{mm}yy - 2rx + \frac{2nr}{m}y + rr = 0.$$
$$- \frac{ep}{m}y + ps.$$

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paral-

lèles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, AQF, donneront ces deux proportions, $AB(m).AE(e)::AQ$ ou $PM(y).AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$. Et $AB(m).BE(n)::AQ(y).QF = \frac{ny}{m}$. Et par conséquent GM ou $QM - QF - FG = x - \frac{ny}{m} - r$; & CG ou $DG - DC = \frac{ey}{m} - s$. Et la Parabole donne $\overline{GM}^2 = CG \times CH$, laquelle équation se change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c. * art. 19.

COROLLAIRE.

309. IL est clair 1°. Que dans la premiere de ces équations ou formules, le quarré yy se trouve sans fraction, & que dans la seconde c'est le quarré xx. 2°. Que dans ces deux formules les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec les mêmes lignes, en sorte que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie le plan xy, multiplie l'un des quarrés xx ou yy; d'où il suit que si le plan xy ne se rencontroit point dans l'une ou l'autre de ces deux formules, le quarré $\frac{nnxx}{mm}$ ou $\frac{nnyy}{mm}$ ne s'y rencontreroit point non plus, puisqu'alors la fraction donnée $\frac{2n}{m}$ seroit nulle.

PROPOSITION II.

Problême.

310. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle le plan* xy *ne se rencontrant point, il n'y a qu'un des deux quarrés* xx *&* yy; *ou bien le plan* xy *s'y rencontrant, les deux quarrés* xx *&* yy *s'y rencontrent aussi avec les mêmes signes, en sorte que le quarré de la moitié de la*

fraction qui multiplie xy, *soit égal à celle qui multiplie le quarré de l'une des inconnuës. On suppose toujours qu'il y ait un des quarrés* xx *ou* yy *qui soit délivré de fractions.*

On comparera chaque terme de l'équation donnée, avec celui qui lui répond dans la premiere formule du Lemme précédent, si le quarré yy s'y rencontre sans fraction ; ou avec celui qui lui répond dans la seconde formule, lorsque c'est le quarré xx. On tirera ensuite de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités e, m, n, p, r, s, par le moyen desquelles on décrira comme l'on a enseigné dans le Lemme (en se servant des deux Remarques suivantes) une Parabole qui sera le lieu cherché.

REMARQUE I.

311. 1°. On prendra pour AB (m) telle grandeur positive que l'on voudra. 2°. Les lignes AB (m), BE (n) étant données, la ligne AE (e) l'est aussi puisque l'angle ABE est donné. 3°. Lorsque $n=o$, la ligne AE tombe sur AB, c'est à dire, sur AP dans la construction de la premiere formule, & sur AQ dans celle de la seconde : alors on aura AB (m) $= AE$ (e), puisque les points B, E, se confondront alors ensemble. 4°. Lorsque la valeur de l'une des quantités n, r, s, est négative, il faut prendre ou mener la ligne qu'elle exprime du côté opposé à celui de PM ; au lieu qu'il la faut mener du même côté, comme l'on a fait dans le Lemme, lorsqu'elle est positive.

REMARQUE II.

312. S'il arrive que la valeur du parametre CH (p) soit négative, il faudra que la Parabole s'étende du côté opposé à celui du Lemme : c'est à dire, du côté opposé à celui vers lequel s'étend l'indéterminée AP dans la construction de la premiere formule, & l'indé-

terminée AQ dans celle de la ſeconde. Tout ceci s'éclaircira parfaitement par les Exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

313. SOIT $yy - 2ay - bx + cc = o$ l'équation donnée, dont il faut conſtruire le lieu.

Comme le quarré yy ſe trouve ici ſans fraction, je choiſis la premiere formule * du Lemme, de laquelle comparant chaque terme avec celui qui lui répond dans la propoſée, j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que le plan xy ne ſe rencontrant point dans la propoſée, on doit regarder ce plan comme étant multiplié par zero; d'où je tire $n = o$, & par conſéquent * $m = e$: c'eſt pourquoi effaçant dans la formule tous les termes où $\frac{n}{m}$ ſe rencontre, & mettant au lieu de e ſa valeur m, je trouve $yy - 2ry - px + rr + ps = o$. 2°. La comparaiſon des termes correſpondans $-2ry$ & $-2ay$ donne $r = a$. 3°. Celle de $-px$ & $-bx$ fournit $p = b$. 4°. Celle des termes où les inconnuës x & y ne ſe trouvent point, donne enfin $rr + ps = cc$, d'où en mettant pour r & p leurs valeurs a & b, je tire $s = \frac{cc - aa}{b}$ qui eſt une valeur négative lorſque a ſurpaſſe c, comme on le ſuppoſe ici. Je n'ai point comparé les premiers termes yy & yy entr'eux; parce qu'étant préciſément les mêmes, cela ne feroit rien connoître. Or les valeurs de n, r, p, s, étant ainſi déterminées, je conſtruits le lieu en me ſervant de la conſtruction * de la formule, & obſervant ce qu'il y a dans la premiere * Remarque en cette ſorte.

Puiſque BE $(n) = o$, les points B, E, ſe confondent, & la ligne AE tombe * ſur AP; c'eſt pourquoi je mene d'abord par le point fixe A la ligne AD $(r) = a$ parallele à PM, & du même côté, parce que ſa valeur eſt poſitive. Je tire enſuite DG parallele à AP, ſur laquelle je prends $DC = \frac{aa - cc}{b} = -s$ du côté oppoſé à

* Art. 308. n. 1.
* Art. 311.
* Art. 308. n. 11.
* Art. 311.
* Art. 311.
FIG. 167.

PM; parce que $s = \frac{cc-aa}{b}$, qui est une valeur négative.

* *Art.* 161. Je décris enfin * du diametre *CG* (qui ait pour parametre la ligne *CH* (p) $= b$, & pour ordonnées des droites paralleles à *PM*) une Parabole; & je dis que ses deux portions *OMM*, *RMS*, renfermées dans l'angle *PAO* fait par *AP* & par la ligne *AO* menée parallelement à *PM* & du même côté, sera le lieu de l'équation donnée.

Car menant d'un de leurs points quelconques *M*, la ligne *MP* qui fasse avec *AP* l'angle donné ou pris à volonté *APM*, & qui rencontre *DG* au point *G*; on aura $GM = y - a$, ou $GM = a - y$, selon que le point *M* tombera audessus ou audessous du diametre *CG*; & *CG* ou

* *Art.* 19. $DG + CD = x + \frac{aa-cc}{b}$; & partant * par la proprieté de la Parabole, $\overline{GM}^2$ ($yy - 2ay + aa$) $= CG \times CH$ ($bx + aa - cc$), c'est à dire $yy - 2ay - bx + cc = 0$, qui est l'équation donnée. Donc &c.

REMARQUE.

314. Si l'on prolonge *AO* de l'autre côté de *A* vers *X*, il faut remarquer,

1°. Que la portion indéfinie *SM* de la Parabole, renfermée dans l'angle *SAX*, sera le lieu de toutes les valeurs fausses & de l'inconnuë y, qui répondent aux valeurs vraies de l'autre inconnuë x dans l'équation donnée. En effet si l'on prend *AP* plus grande que *AS*, & qu'on mene *PM* parallele à *AX*, & du même côté, laquelle rencon-

* *Art.* 304. tre la portion *SM* en *M*; l'on aura * $PM = -y$, & partant la droite *GM* ou $GP + PM = a - y$, & on retrouvera par la proprieté de la Parabole, comme cidessus, l'équation donnée.

2°. Que la portion *RCO* de cette Parabole, qui tombe dans l'angle *TAO* opposé au sommet à l'angle *SAX*, sera le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnuë y

dans l'équation donnée, qui répondent aux valeurs fausses de l'autre inconnuë x; car faisant * $AP = -x$, on retrouvera encore l'équation donnée. * *Art. 304.*

3°. Que s'il tomboit une portion de cette Parabole dans l'angle TAX opposé au sommet à l'angle PAO elle seroit le lieu des valeurs fausses de l'inconnuë y, qui répondroient aux valeurs fausses de l'autre inconnuë x. De sorte que cette Parabole est le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y, qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x dans l'équation donnée $yy - 2ay - bx + cc = 0$.

D'où l'on voit que dans cet Exemple il y a deux valeurs vraies PM, PM, de l'inconnuë y, qui répondent à la même valeur vraie AP de l'autre inconnuë x, lorsque cette ligne AP est moindre que AS; qu'il y a une valeur vraie PM, & une fausse $-PM$, lorsque AP surpasse AS; qu'il n'y a qu'une valeur vraie SV de y; l'autre étant nulle ou zero, lorsque $AP = AS$; qu'il y a deux valeurs vraies PM, PM, de l'inconnuë y, qui répondent à la même valeur fausse $-AP$ de l'inconnuë x, lorsque AP est moindre que AT; que ces deux valeurs deviennent égales chacune à la Tangente TC, lorsque $AP = AT$; & qu'enfin si l'on prenoit AP $(-x)$ plus grande que AT, comme l'appliquée PM ne rencontreroit alors la Parabole en aucun point, il s'ensuivroit qu'il n'y auroit aucune valeur vraie ou fausse de l'inconnuë y, qui pût répondre à cette valeur fausse $-AP$ de l'autre inconnuë x: c'est à dire que les valeurs de l'inconnuë y deviendroient en ce cas imaginaires.

Tout ceci se doit entendre de la même maniere dans tous les autres exemples qui suivent, tant dans la Parabole que dans les autres Sections Coniques: de sorte que la Section Conique qu'on trouvera, sera non-seulement le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnuë y par rapport aux valeurs vraies de l'autre inconnuë x;

mais aussi celui de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y par rapport aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x.

EXEMPLE II.

315. SOIT l'équation donnée $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = o$, dont il faille construire le lieu.

Comme le quarré yy est ici sans fraction, je choisis de même que dans l'Exemple précédent, la premiere
* Art. 308. n. 1. formule * du Lemme ; & j'ai par la comparaison de ses termes avec ceux qui leur répondent dans la proposée,
* Art. 311. 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; d'où en faisant * $m = a$, je tire $n = -b$.
2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; d'où il vient, comme ci-dessus, $n = -b$.
3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr - ep}{m} = -b$; & partant $p = \frac{ab + 2bc}{e}$, en mettant pour m, n, r, leurs valeurs a, $-b$, $-c$.
5°. $rr + ps = cc$, ce qui donne $s = o$, en mettant pour rr sa valeur cc. Or ces valeurs de m, n, r, p, s, étant ainsi déterminées, je construis le lieu de cette équation
* Art. 308. n. 1. en me servant de la construction * de la premiere formule en cette sorte.

FIG. 168. Ayant pris sur la ligne AP la partie AB $(m) = a$, je mene les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$ paralleles à PM, & du côté opposé, parce que $n = -b$ & $r = -c$ qui sont des valeurs négatives. Je tire ensuite par les points déterminées A, E, la ligne AE (e) qui est donnée, & par le point D la ligne DG parallele à AE. Cela fait comme DC (s) est nulle ou zero, le point C
* Art. 161. tombe sur D ; c'est pourquoi je décris * du diametre DG (qui ait pour parametre DH $(p) = \frac{ab + 2bc}{e}$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM) une Parabole ; & je dis que sa portion OM renfermée dans l'angle PAH, où l'on suppose que doivent tomber tous les points M, sera le lieu de l'équation donnée.

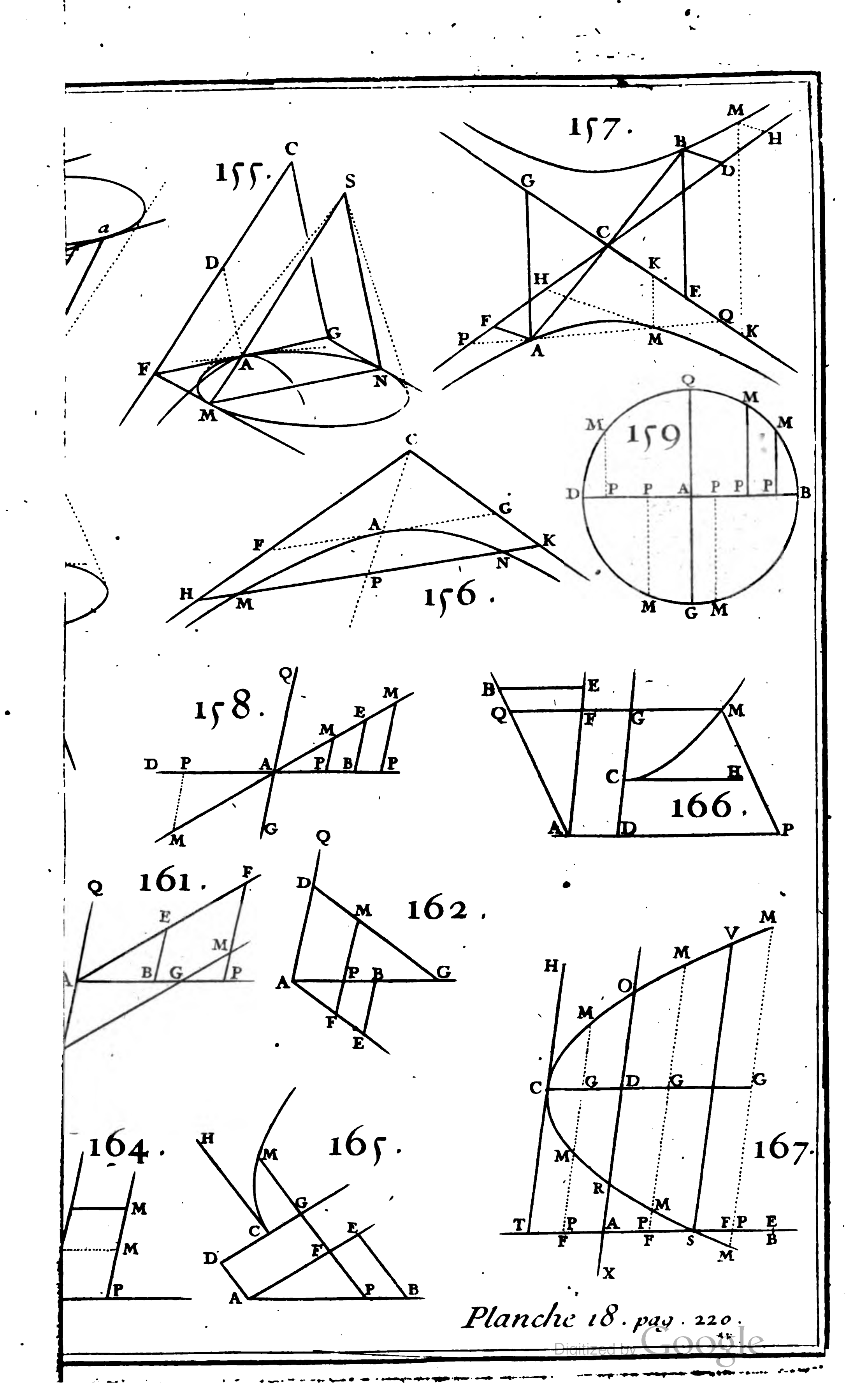


Planche 18. pag. 220.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF, donneront ces deux proportions, $AB\ (a)$. $AE\ (e) :: AP\ (x)$. AF ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et $AB\ (a)$. $BE\ (b) :: AP\ (x)$. $PF = \frac{bx}{a}$. Et par conséquent GM ou $PM + PF + FG = y + \frac{bx}{a} + c$. Or par la proprieté * de la Parabole, $\overline{GM}^2 = GD \times DH$, c'est à dire, en mettant les valeurs analytiques, $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = 0$. Donc &c. * Art. 19.

REMARQUE I.

316. Si la ligne AP ne coupoit point la Parabole, mais qu'elle la touchât ou qu'elle tombât toute entiere au dehors, il s'ensuivroit qu'aucun des points cherchés M ne pourroit tomber dans l'angle PAH, comme l'on avoit supposé en faisant la construction; & qu'ainsi il n'y auroit aucune valeur vraie de l'inconnuë y qui répondît à une valeur vraie de l'autre inconnuë x, de quelque grandeur qu'elle pût être. FIG. 168.

Cette Remarque est générale pour tous les Exemples pareils à celui-ci, non-seulement dans la Parabole, mais aussi dans les autres Sections.

REMARQUE II.

317. Il est à propos de remarquer que si l'on avoit pris pour $AB\ (m)$ une autre grandeur que a, telle qu'elle pût être, les valeurs de $BE\ (n)$ & de $AE\ (e)$ changeroient à la verité : mais les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, demeureroient toûjours les mêmes; parce que dans le triangle ABE l'angle ABE est donné, comme aussi la raison

du côté AB au côté BE, sçavoir dans cet Exemple $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$. Or comme il n'y a que ces raisons de $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, qui se puissent trouver dans les valeurs de p, r, s; il s'ensuit que ces valeurs demeurent toûjours les mêmes, telle grandeur positive que l'on puisse prendre pour la ligne AB (m): de sorte qu'on n'a pris $m = a$ que pour rendre la construction plus simple. Ce que l'on doit toûjours observer dans la suite.

EXEMPLE III.

318. On demande le lieu de l'équation donnée $xx + \frac{2b}{a}yx + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = 0$.

Comme c'est ici le quarré xx qui est délivré de fractions, je choisis la seconde formule * du Lemme; & j'ai par la comparaison des termes correspondans,

* Art. 308. n. 1.

1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; d'où en faisant $m = a$, je tire $n = -b$.

2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; & partant, puisque $m = a$, on trouve comme ci-dessus $n = -b$. 3°. $r = c$. 4°. $\frac{2nr - ep}{m} = b - \frac{2bc}{a}$; ce qui donne $p = -\frac{ab}{e}$, en mettant à la place de m, n, r, leurs valeurs a, $-b$, c. 5°. $rr + ps = 0$; parce que dans l'équation donnée il ne se trouve point de termes entierement connus, que l'on puisse comparer au terme $rr + ps$ de la formule; ce qui donne $s = -\frac{rr}{p} = \frac{ecc}{ab}$, en mettant pour r & p leurs valeurs c & $-\frac{ab}{e}$. Or ces valeurs étant ainsi déterminées, je construis le lieu requis en me servant de la construction de la seconde formule * du Lemme, & observant exactement les articles 311. & 312. de la maniere qui suit.

* Art. 308. n. 2.

FIG. 169. Ayant mené par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM, je prens sur cette ligne la partie AB (m) $= a$; & du point B je tire $BE = b = -n$ parallele à AP, & du côté opposé à PM, parce que la

valeur de n est négative ; & par les points déterminés A, E, la ligne AE (e) qui est donnée. Ayant pris sur AP la partie AD (r) $= c$ du côté de PM, je tire la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle je prends la partie DC (s) $= \frac{ecc}{ab}$ du côté de PM. Je décris ensuite* du diametre CG (qui ait pour ordonnées des droites paralleles à AP, & pour parametre la ligne $CH = \frac{ab}{e} = -p$) une Parabole qui s'étende* du côté opposé à celui où s'étend AQ, parce que $p = -\frac{ab}{e}$ qui est une valeur négative. Je dis que la portion OMR de cette Parabole, renfermée dans l'angle PAB, sera le lieu qu'on cherche. * Art. 161. * Art. 312.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G ; les triangles semblables ABE, AQF, donneront ces deux proportions, AB (a). AE (e) :: AQ ou PM (y). AF ou $DG = \frac{ey}{a}$. Et AB (a). BE (b) :: AQ (y). $QF = \frac{by}{a}$. Et par conséquent GM ($QM + FQ - FG$) $= x + \frac{by}{a} - c$, ou GM ($FG - FQ - QM$) $= c - \frac{by}{a} - x$, selon que le point M tombe de part ou d'autre du diametre CD ; & la coupée CG ou $CD - DG = \frac{ecc}{ab} - \frac{ey}{a}$. Or* par la proprieté de la Parabole, $\overline{GM}^2 = CG \times CH$: c'est à dire, en mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques $xx + \frac{2b}{a}yx + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = 0$, qui est l'équation donnée. Donc &c. * Art. 19.

REMARQUE.

319. S'IL arrivoit qu'en comparant les termes de l'équation donnée avec ceux de la formule, on trouvât que $p = 0$; il est visible que la construction de la Parabole qui en devroit être le lieu, seroit impossible. Mais il faut bien remarquer que l'équation donnée se

peut toûjours alors abaisser en sorte que son lieu devienne
* Art. 308. une ligne droite ; ce qui se voit par les formules * du Lemme. Car effaçant, par exemple, dans la premiere les termes où p se rencontre, il vient $yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = o$, de laquelle extrayant la racine quarré, on trouve $y - \frac{nx}{m} - r = o$, ou $y = \frac{nx}{m} + r$, dont le lieu est une ligne droite que l'on construira selon l'article 306. La même chose arrivera de la seconde formule de l'article 308.

EXEMPLE IV.

320. SOIT proposée l'équation $xx - ay = o$, de laquelle il faut trouver le lieu.

Comme c'est ici le quarré xx qui se trouve délivré de
* Art. 308. n. 1. fractions, je choisis la seconde formule * du Lemme ; & j'ai par la comparaison des termes qui se repondent, 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que xy ne se trouve point dans la
* Art. 311. proposée ; d'où je tire $n = o$, & par conséquent * $m = e$. 2°. $\frac{nn}{mm} = o$, parce que le quarré yy ne s'y trouve pas non plus ; d'où je tire encore $n = o$. 3°. $r = o$, parce que l'inconnuë x ne se trouve point au premier degré dans la proposée : c'est pourquoi effaçant dans la formule tous les termes où $\frac{n}{m}$ & r se rencontrent, & mettant pour e sa valeur m ; il vient $xx - py + ps = o$, dont il reste à comparer les termes avec ceux qui leur répondent dans la proposée. 4°. La comparaison des termes $-py$ & $-ay$ donnent $p = a$. 5°. Puisque dans la proposée il ne se trouve aucun terme entierement connu que l'on puisse comparer au terme ps ; il s'ensuit que $ps = o$, & qu'ainsi $s = o$. Or ces valeurs de n, r ; p, s, ainsi déterminées me servent à construire le lieu qu'on demande, ayant égard à la construction de la seconde formule de
* Art. 311. l'article 308. & à l'article 311. en cette sorte.

FIG. 170. Puisque BE (n) $= o$, la ligne AE tombe * sur AQ menée parallelement à PM & du même côté ; comme aussi

aussi DG, parce que $AD\,(r) = o$. Or puisque $CD\,(s) = o$, le point C tombe sur le point D lequel tombe en A comme l'on vient de voir. Je décris donc * une Parabole du diametre AQ, qui ait pour parametre $AH\,(p) = a$, & pour ordonnées des droites MQ paralleles à AP : je dis que sa portion indéfinie AM renfermée dans l'angle PAQ, est le lieu cherché. * Art. 161.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M les droites MP, MQ, paralleles à AQ & à AP, on aura par la proprieté * de la Parabole $\overline{QM}^2\,(xx) = AQ \times AH\,(ay)$, & partant $xx - ay = o$, qui étoit l'équation proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 19.

DÉMONSTRATION DU PROBLÊME.

321. Si l'on met dans la formule générale * à la place de m, n, r, s, p, les valeurs que l'on aura trouvées par la comparaison de ces termes avec ceux de l'équation proposée, telle qu'elle puisse être, pourvû qu'elle ait les conditions marquées dans le Problême ; il est clair que cette formule générale se changera en la proposée : & partant que si l'on prend aussi ces valeurs dans la construction * du Lemme, le lieu de la formule générale se changera en celui de l'équation proposée. Or c'est ce qu'on a enseigné dans le Problême accompagné de ses deux Remarques, comme les Exemples précédens le font assés voir. Donc &c. * Art. 308. * Art. 308.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à l'Ellipse ou au Cercle.

322. Soient encore comme dans la définition premiere deux lignes droites inconnuës & indéterminées $AP\,(x)$, $PM\,(y)$; & soient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s, t. Cela posé, Fig. 171.

On prendra sur la ligne AP, la partie $AB = m$; & ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à PM, & du même côté, on tirera par le point A la droite AE qui est donnée, & que j'appelle e; & par le point D, la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle on prendra la partie $DC = s$ du côté de PM; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales chacune à t. On décrira ensuite une Ellipse * du diametre LK ($2t$), qui ait pour parametre $KH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM. Je dis que sa portion OMR renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menee par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de l'équation ou formule générale que voici.

* Art. 161.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0.$$
$$+ \frac{eep}{2mmt}xx \qquad - \frac{2eps}{2mt}x - \frac{ptt}{2t} + \frac{pss}{2t}$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M, de cette portion d'Ellipse, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF, donneront AF ou $DG = \frac{ex}{m}$, & $PF = \frac{nx}{m}$. On aura donc $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, & $CG = \frac{ex}{m} - s$. Or par la proprieté de l'Ellipse * $KL(2t) . KH(p) :: LG \times GK$ ou $\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2 \left(tt - ss + \frac{2esx}{m} - \frac{eexx}{mm}\right) . \overline{GM}^2 \left(yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr\right) = \frac{ptt - pss}{2t} + \frac{2epsx}{2mt} - \frac{eepxx}{2mmt}$. Donc &c.

* Art. 55. & 41.

S'il arrive que le diametre KL ($2t$) & son parametre KH (p) soient égaux entr'eux, on aura toûjours $\overline{GM}^2 = LG \times GK$; d'où il est évident selon les Elemens de Geometrie, que si l'angle CGM est droit, l'Ellipse se changera alors en un cercle qui aura pour diametre la ligne KL.

COROLLAIRE.

323. Il est clair que les deux quarrés yy & xx se trouvent toujours avec les mêmes signes dans cette formule ; & que lorsque le plan xy s'y rencontre, le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie ce plan, doit être moindre que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx.

PROPOSITION III.

Problême.

324. Construire *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle les deux quarrés* y y *&* x x *se rencontrent avec les mêmes signes sans le plan* x y, *ou avec ce plan, en sorte que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie, soit moindre que la fraction qui multiplie le quarré* x x. *On suppose toujours ici que le quarré* y y *soit délivré de fractions.*

On comparera les termes de l'équation donnée, avec ceux qui leur répondent dans la formule générale * du Lemme précédent ; & on tirera de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, t, par le moyen desquelles valeurs on décrira comme l'on a enseigné dans ce Lemme (en observant exactement l'art. 311.) une Ellipse qui sera le lieu cherché.

* *Art.* 322.

EXEMPLE I.

325. Soit proposé de trouver le lieu de cette équation $yy + xy + \frac{1}{2}xx - 2ay + bx + cc = 0$, dans laquelle le quarré de $\frac{1}{2}$ moitié de la fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 qui multiplie xy, est moindre que la fraction $\frac{1}{2}$ qui multiplie xx.

La comparaison de chaque terme de la formule générale

* *Art.* 322. du Lemme* avec celui qui lui répond dans cette équation ; donne 1°. $\frac{2n}{m} = -1$; car n'y ayant ici aucune fraction litterale qui multiplie le plan xy, on le doit considerer comme etant multiplié par l'unité numerique 1 : & partant si l'on fait $m = a$, l'on aura $n = -\frac{1}{2}a$. 2° $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = \frac{1}{2}$; d'où l'on tire $\frac{p}{t} = \frac{mm - 2nn}{ee} = \frac{aa}{2ee}$ en mettant pour $m, n,$ leurs valeurs $a, -\frac{1}{2}a$: & par conséquent $p = \frac{aat}{2ee}$. 3°. $r = a$. 4°. $\frac{2nr}{m} - \frac{2eps}{2mt} = b$; d'où en mettant pour $m, n, r, \frac{p}{t}$, leurs valeurs $a, -\frac{1}{2}a, a, \frac{aa}{2ee}$, il vient $s = \frac{-2ae - 2eb}{a}$. 5°. $rr - \frac{ptt}{2t} + \frac{pss}{2t} = cc$: & partant $tt = ss + \frac{2trr}{p} - \frac{2tcc}{p} = ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}$, en mettant pour $\frac{p}{t}, r,$ les valeurs $\frac{aa}{2ee}, a$, qu'on leur vient de trouver. Or les valeurs de m, n, r, s, t, p, étant ainsi déterminées, je décris l'Ellipse cherchée en me servant de la construction du Lem-
* *Art.* 322. me* & de l'article 311 en cette sorte.

FIG. 172. Je prens sur la ligne AP la partie AB $(m) = a$; & ayant mené parallelement à PM & du même côté la ligne AD $(r) = a$, & du côté opposé la droite $BE = \frac{1}{2}a = -n$, parce que $n = -\frac{1}{2}a$ qui est une valeur négative, je tire par le point A la droite AE (e) qui est donnee ; & par le point D, la droite DG parallele à AE, sur laquelle je prends la partie $DC = \frac{2ae + 2be}{a} = -s$ du côté opposé à PM ; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales
* *Art.* 161. chacune à $t = \sqrt{ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}}$. Je décris ensuite* une Ellipse du diametre LK, qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne KH $(p) = \frac{aat}{2ee}$. Je dis que sa portion OMR renfermée dans l'angle PAD, est le lieu de l'équation donnée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M,

la ligne MP qui fasse avec AP, l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF donneront $AB\,(a).\,AE\,(e) :: AP\,(x).\,AF$ ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et $AB\,(a).\,BE\,(\frac{1}{2}a) :: AP\,(x).\,PF = \frac{1}{2}x$. On aura donc $GM = y + \frac{1}{2}x - a$; & CG ou $DG + DC = \frac{ex}{a} - s$, puisque $DC = -s$. Or par la proprieté * de l'Ellipse $KL\,(2t).\,KH\,(\frac{aat}{2ee}) :: LG \times GK$ ou $\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2$ $(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa}).\,\overline{GM}^2\,(yy + xy - 2ay + \frac{1}{4}xx - ax + aa)$. D'où en mettant à la place de $tt - ss$ & de s, leurs valeurs $4ee - \frac{4eeee}{aa}$ & $-\frac{2ae - 2be}{a}$, multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant de part & d'autre par $2t$, l'on retrouve l'equation même proposée. Donc &c. * Art. 55. & 41.

REMARQUE.

326. S'IL arrive que $ss + 4ee$ soit égale ou moindre que $\frac{4eeee}{aa}$, il est évident que la valeur de t deviendra nulle ou imaginaire; & qu'ainsi il sera pour lors impossible de construire l'Ellipse qui devroit être le lieu de l'équation donnée. Et comme cette équation renfermeroit nécessairement des contradictions, il s'ensuit qu'il ne pourroit y avoir aucune ligne qui en pût être le lieu; c'est à dire que toutes les valeurs de l'inconnuë y qui devroient répondre à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x, seroient toutes imaginaires.

Ceci se voit clairement dans la formule générale * du Lemme qui, en transposant quelques termes, devient $yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr = \frac{ptt - pss}{2t} + \frac{2pesx}{2mt} - \frac{eepxx}{2mmt}$, dans laquelle équation le premier membre est le quarré de $y - \frac{n}{m}x - r$; & le second, le quarré de t * Art. 322.

moins le quarré de $s - \frac{ex}{m}$, multiplié par la fraction $\frac{p}{2t}$. Or il est visible que si la valeur du quarré tt est nulle ou négative, la valeur de ce second membre sera négative; & qu'ainsi l'on aura dans ces deux cas un quarré, sçavoir le premier membre, égal à une valeur négative; ce qui est une contradiction manifeste.

EXEMPLE II.

327. On demande le lieu de l'équation $yy + \frac{b}{a}xy + xx + cy + fx - ag = o$, dans laquelle on suppose suivant l'art. 323. que $\frac{bb}{4aa}$ est moindre que la fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 qui multiplie le quarré xx; c'est à dire que b est moindre que $2a$.

* Art. 322. La comparaison des termes de la formule * générale avec ceux qui leur répondent dans l'équation proposée, donne 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{b}{a}$; d'où en faisant $m = a$, on tire $n = -\frac{1}{2}b$ 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = 1$; d'où en mettant pour m, n, leurs valeurs a, $-\frac{1}{2}b$, l'on tire $\frac{p}{t} = \frac{4aa - bb}{2ee}$: & partant $p = \frac{4aat - bbt}{2ee}$. 3°. $r = -\frac{1}{2}c$. 4°. $s = \frac{bce - 2afe}{4aa - bb}$. 5°. $t = \sqrt{ss + \frac{ccee + 4agee}{4aa - bb}}$. Ce qui fournit cette construction.

FIG. 173. Ayant pris sur la ligne droite indéfinie AP la partie $AB(m) = a$, & mené parallelement à PM & du côté opposé les droites $BE = \frac{1}{2}b = -n$, $AD = \frac{1}{2}c = -r$, on tirera par le point A la droite $AE(e)$ qui est donnée, & par le point D la droite DG parallele à AE, sur laquelle on prendra la partie $DC(s) = \frac{bce - 2afe}{4aa - bb}$ du côté de PM, si bc surpasse $2af$, comme on le suppose ici; & du côté opposé, s'il est moindre; ensuite on prendra de part & d'autre du point C, les parties CK & CL égales chacune à $t = \sqrt{ss + \frac{ccee + 4agee}{4aa - bb}}$. Cela fait, on décrira * une

* Art. 161.

Ellipse du diametre LK ($2t$) qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre une ligne KH (p) $= \frac{4aat - bbt}{2ee}$. Je dis que sa portion OR sera le lieu de l'équation proposée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la droite MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, LK; aux points F, G; on aura $PF = \frac{bx}{2a}$, & AF ou $DG = \frac{ex}{a}$; ce qui donnera MG ou $MP + PF + FG = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$, & $CG = \frac{ex}{a} - s$ ou $s - \frac{ex}{a}$. Or par la proprieté * de l'Ellipse $LK(2t).KH(\frac{4aat - bbt}{2ee})::LG \times GK(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa}).\overline{GM}^2(yy + \frac{b}{a}xy + cy + \frac{bbxx}{4aa} + \frac{2n}{bc}x + \frac{1}{4}cc)$. *Art. 55. & 41.

Ce qui (en mettant pour $tt - ss$ & pour s leurs valeurs $\frac{ccee + 4agee}{4aa - bb}$ & $\frac{bce - 2afe}{4aa - bb}$, multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant par $2t$) donne l'équation même proposée.

Il est à propos de remarquer que si l'angle AEB étoit droit, l'angle CGM le seroit aussi; & le diametre LK ($2t$) seroit égal au parametre KH ($\frac{4aat - bbt}{2ee}$), puisque $ee = aa - \frac{1}{4}bb$ à cause du triangle rectangle AEB. D'où l'on voit que l'Ellipse deviendroit alors un cercle qui auroit pour rayon la droite CK ou CL (t) $= \sqrt{ss + \frac{1}{4}cc + ag}$, & que DC (s) $= \frac{bc - 2af}{4e}$; ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

EXEMPLE III.

328. SOIT proposé de trouver le lieu de l'équation $yy + xx - ax = 0$.

Je compare les termes de la formule * générale, avec ceux qui leur répondent dans l'équation donnée; & j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = 0$, parce que le terme xy manquant, on le doit *Art. 322.

considerer comme étant multiplié par zero ; d'où je tire $n = o$: & partant $m = e$. 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = 1$; c'est à dire, $\frac{p}{2t} = 1$ en mettant pour n & m leurs valeurs o & e : & partant $p = 2t$. 3°. $r = o$; parce que l'inconnuë y ne se trouvant point au premier degré dans l'équation donnée, on la doit aussi considerer comme étant multipliée par zero : c'est pourquoi éffaçant dans la formule

* Art. 322. generale * tous les termes où $\frac{n}{m}$ & r se rencontrent, & mettant pour e & $\frac{p}{2t}$ leurs valeurs m & 1, elle se changera en celle-ci $yy + xx - 2sx - tt + ss = o$, dont il reste à comparer les termes avec ceux de la proposée. 4°. $2s = a$; & partant $s = \frac{1}{2}a$. 5°. $ss - tt = o$; puisqu'il n'y a point de termes entierement connus dans l'équation donnée : & partant $tt = ss = \frac{1}{4}aa$; & en extrayant de part & d'autre la racine quarrée, $t = \frac{1}{2}a$. Or ces valeurs étant ainsi déterminées, je donstruis le lieu en cette sorte.

FIG. 174. Puisque $BE\ (n) = o$, il s'ensuit que AE tombe sur AP, laquelle tombe aussi sur DG, puisqu'on a encore $AD\ (r) = o$; de sorte que le point D tombe en A. C'est pourquoi prenant sur AP, la partie $AC\ (s) = \frac{1}{2}a$ du côté de PM ; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL ; égales chacune à $t = \frac{1}{2}a$ (le point L

* Art. 161. tombe ici sur le point A) ; on décrira * du diametre AK qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne $KH\ (p) = 2t = a$, une Ellipse qui sera le lieu cherché.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la droite MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à

* Art. 55. & 41. volonté APM, on aura * $AK\ (a).\ KH\ (a) :: AP \times PK\ (ax - xx).\ \overline{PM}^2\ (yy)$. Ce qui donne $yy + xx - ax = o$.

Il est évident que si l'angle APM est droit, l'Ellipse devient alors un cercle qui a pour diametre la ligne $AK = a$.

REMARQ.

REMARQUE.

329. Il peut arriver deux differens cas, où le lieu de l'équation donnée est un cercle.

Premier cas. Lorsque les quarrés yy & xx se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation, où le plan xy se trouve aussi ; & que de plus l'angle AEB est droit (ce qui arrive lorsqu'ayant mené AF perpendiculaire sur PM la raison de PF à AP, qui est la même que celle de BE à AB est exprimée par la moitié de la fraction qui multiplie le plan xy) le lieu de cette équation sera toûjours un cercle comme l'on a déja vû dans l'article 324., & la raison en est évidente par la formule generale. Car l'on aura pour la comparaison des termes correspondans où se trouve le quarré xx, cette égalité $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = 1$; d'où l'on tire $\frac{p}{2t} = \frac{mm - nn}{ee} = 1$, puisque à cause du triangle rectangle AEB le quarré $mm = nn + ee$. Or l'angle AEB étant droit, l'angle CGM que fait le diametre LK avec ses ordonnées sera aussi droit ; & par conséquent puisque le diametre LK est égal à son parametre KH, il s'ensuit que l'Ellipse devient alors un cercle.

Second cas. Lorsque les quarrés yy & xx se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation, où le plan xy ne se rencontre pas, & que de plus l'angle APM est droit : son lieu sera toûjours un cercle, comme l'on vient de voir dans l'article 328 ; & cela se prouve par le moyen de la formule generale. Car puisque le plan xy ne se trouve point dans l'équation donnée, la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule sera nulle ou zero ; & partant $BE\ (n) = o$, & $m = e$. D'où l'on voit. 1°. Que le diametre LK est parallele à la ligne AP, & qu'ainsi l'angle CGM qu'il fait avec ses ordonnées étant égal à l'angle APM sera

droit. 2°. Que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx dans la formule devient $\frac{p}{2t}$, & qu'ainsi on aura $\frac{p}{2t} = 1$: c'eſt à dire que le diametre LK ſera égal à ſon parametre KH. L'Ellipſe qui eſt le lieu de l'équation donnée ſera donc alors un cercle. Or comme alors la formule generale ſe change en celle-ci

$$yy + xx - 2ry - 2sx + \begin{array}{l} rr \\ -tt \\ +ss \end{array} = 0,$$

on pourra, ſi l'on veut abreger le calcul, en ſe ſervant d'abord de cette formule, pour trouver par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, les valeurs de r, s, t, qui ſervent à décrire le cercle qui en eſt le lieu.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des lieux à l'Hyperbole par rapport à ſes diametres.

FIG. 175. 176. 330. LES mêmes choſes étant poſées que dans le Lemme précédent pour l'Ellipſe, on décrira * du diametre LK $(2t)$ qui ait pour parametre KH (p), & pour ordonnées des droites paralleles à PM, une Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées. Je dis que ſa portion OM, ou leurs portions renfermées dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, ſera le lieu de cette équation ou formule.

* Art. 161.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \begin{array}{l} \frac{nn}{mm} \\ -\frac{eep}{2mmt} \end{array} xx - 2ry + \begin{array}{l} \frac{2nr}{m} \\ +\frac{2eps}{2mmt} \end{array} x + \begin{array}{l} rr \\ \pm\frac{ptt}{2t} \\ -\frac{pss}{2t} \end{array} = 0.$$

dans laquelle on doit obſerver qu'il y a $+\frac{ptt}{2t}$ lorſque

le diametre LK est un premier diametre, & $-\frac{ptt}{2t}$ lorsque c'est un second.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la ligne MP, qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G, on aura par la proprieté de l'Hyperbole* $KL\ (2t).\ KH\ (p) :: \overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2 \left(\frac{eexx}{mm} - \frac{2esx}{m}\right.$ * Art. 81. & 118.

$\left. + ss \pm tt\right).\ \overline{GM}^2 = \frac{peexx}{2mmt} - \frac{2epsx}{2mt} + \frac{pss}{2t} \pm \frac{ptt}{2t} = yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$. Donc &c.

S'il arrive que le diametre $KL\ (2t)$ & son parametre $KH\ (p)$ soient égaux entr'eux ; l'Hyperbole sera équilatere.

COROLLAIRE.

331. Il est clair, 1°. Que les deux quarrés yy & xx se trouvent toûjours avec differens signes dans cette formule, lorsque le plan xy ne s'y rencontre point ; ou bien lorsqu'il s'y trouve, & que $\frac{eep}{2mmt}$ surpasse $\frac{nn}{mm}$. 2°. Qu'ils s'y peuvent trouver avec les mêmes signes, mais avec ces conditions que le plan xy s'y rencontre, & que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction qui le multiplie, soit plus grand que la fraction $\frac{nn}{mm} - \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx.

PROPOSITION IV.

Problême.

332. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle, ou les deux quarrés* yy *&* xx *se rencontrent avec differens signes, ou bien avec les mêmes signes, mais avec ces deux conditions que le plan* xy *s'y trouve, & que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie soit plus grand*

que la fraction qui multiplie le quarré xx. *On suppose encore ici que le quarré* yy *soit délivré de fractions.*

On construit l'Hyperbole qui en est le lieu, comme l'on vient de faire l'Ellipse dans le Problême précédent. Les Exemples qui suivent le feront voir.

EXEMPLE I.

333. SOIT $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{f}{a}xx + 2cy - 2gx - bb = o$, l'équation dont il faut construire le lieu, & dans laquelle on suppose que le quarré $\frac{bb}{aa}$ surpasse $\frac{f}{a}$.

Je compare les termes de cette équation avec ceux qui leur répondent dans la formule du Lemme; & j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$, & partant si l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$. 2°. $\frac{eep}{2mmt} - \frac{nn}{mm} = -\frac{f}{a}$, donc $\frac{p}{2t} = \frac{bb - af}{ee}$, & $p = \frac{2bbt - 2aft}{ee}$. 3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr}{m} + \frac{2eps}{2mt} = -2g$, d'où en mettant pour m, n, r, $\frac{p}{2t}$ les valeurs que l'on vient de trouver, on tire $s = \frac{-bce - age}{bb - af}$. 5°. $\mp tt = ss - \frac{2rrt - 2bbt}{p} = ss - \frac{eecc - eebb}{bb - af}$, sçavoir $+ tt$ lorsque le quarré ss surpasse $\frac{eecc + eebb}{bb - af}$, & $- tt$ lorsqu'il est moindre, parce que le quarré tt doit être positif; ce qui fait deux differens cas. Or les valeurs de m, n, r, s, t, p, étant ainsi determinées, je construis le lieu en me reglant sur la construction du Lemme, de la maniere qui suit.

FIG. 177. 178. Ayant pris sur AP, la partie $AB = a$, & mené parallelement à PM & du côté opposé les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$, je tire par les points A, E, la droite AE (e) qui est donnée, & par le point D la droite indefinie DG parallele à AE sur laquelle je prends la partie $DC = \frac{eag + ebc}{bb - af} = -s$ du côté opposé à PM, & de part & d'autre du point C les parties

CL, CK, égales chacune à $t = \sqrt{ss - \frac{eecc + eebb}{bb - af}}$ ou $\sqrt{\frac{eecc + eebb}{bb - af} - ss}$, selon que ss est plus grand ou moindre que $\frac{eecc + eebb}{bb - af}$. Cela fait, du diametre LK (qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne KH $(p) = \frac{2bbt - 2aft}{ee}$) je décris une Hyperbole, en observant que LK (*fig.* 177.) doit être un premier diametre dans le premier cas, & un second (*fig.* 178.) dans le dernier. Je dis que sa portion QM sera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M une parallele MP à AD, laquelle rencontre les lignes AB, AE, DG, aux points P, F, G; on aura $PF = \frac{bx}{a}$, & AF ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et par conséquent $MG = y + \frac{bx}{a} + c$, CG ou $DG + CD = \frac{ex}{a} - s$, puisque $CD = -s$. Or par la proprieté de l'Hyperbole, LK $(2t)$. KH $(\frac{2bbt - 2aft}{ee})$ :: $\overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2$ $(\frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt)$. $\overline{GM}^2$ $(yy + \frac{2b}{a}xy + 2cy + \frac{bb}{aa}xx + \frac{2bc}{a}x + cc)$; ce qui, en mettant pour $ss \pm tt$ & s leurs valeurs $\frac{ccee + eebb}{bb - af}$ & $\frac{-bce - age}{bb - af}$, multipliant les extrêmes & les moyens, & divisant par $2t$, donne l'équation proposée. Donc &c.

REMARQUE.

334. S'il arrive que $ss = \frac{ccee + eebb}{bb - af}$; il est clair que la valeur de tt devient nulle ou zero, & qu'ainsi la construction de l'Hyperbole devient impossible. Mais il faut bien remarquer alors que l'équation proposée s'abaisse toûjours, en sorte que son lieu, qui devroit être une ou deux Hyperboles opposées, devient une ou deux lignes droites. En effet dans nôtre exemple on a réduit l'équation donnée à cette proportion ee. $bb - af$ ::

$\frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt.\ yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy + \frac{2bc}{a}x + cc$; d'où, en effaçant tt qui est nul, multipliant les extrêmes & les moyens, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, l'on tire $ey + \frac{ebx}{a} + ec = \overline{\frac{ex}{a} - s}\sqrt{bb - af}$, c'est à dire en mettant pour $-s$ sa valeur $\frac{bce + age}{bb - af}$, & divisant de part & d'autre par e, cette équation $y + \frac{bx}{a} + c = \frac{x\sqrt{bb-af}}{a} + \frac{ag+bc}{\sqrt{bb-af}}$ ou $y = \frac{-b+\sqrt{bb-af}}{a}x + \frac{ag+bc}{\sqrt{bb-af}} - c$, qui en faisant $\frac{n}{m} = \frac{b-\sqrt{bb-af}}{a}$, & $p = \frac{ag+bc}{\sqrt{bb-af}} - c$, se change en cette autre $y = p - \frac{n}{m}x$ dont le lieu est une ligne droite que l'on construit selon l'article 306.

La raison de ceci est évidente par la formule generale du Lemme; car effaçant dans cette formule le terme $\mp\frac{ptt}{2t}$ qui renferme le quarré tt que l'on suppose égal à zero ou nul, elle se change en transposant certains termes, & extrayant les racines quarrées en cette autre $y - \frac{n}{m}x - r = \overline{\frac{ex}{m} - s}\sqrt{\frac{p}{2t}}$ ou $\overline{s - \frac{ex}{m}}\sqrt{\frac{p}{2t}}$ où les inconnuës x & y ne sont plus qu'au premier degré, & dont le lieu par conséquent devient des lignes droites.

EXEMPLE II.

335. ON demande le lieu de l'équation donnée $yy - xx + 2ay + ax = 0$.

La comparaison des termes correspondans donne 1°. $\frac{2n}{m} = 0$, parce que le terme xy ne se trouve point dans la proposée; d'où l'on tire $n = 0$, & par conséquent $m = e$. 2°. $\frac{p}{2t} = 1$, & partant $p = 2t$. 3°. $r = -a$.

$4°. \frac{2ps}{2t} = a$, d'où l'on tire $s = \frac{1}{2}a$. $5°. rr \mp \frac{ptt}{2t} - \frac{pss}{2t} = e$, & ainsi $\mp tt = ss - \frac{2rrt}{p} = -\frac{1}{4}aa$ en mettant pour $r, \frac{2t}{p}, s$ leurs valeurs $-a, 1, \frac{1}{2}a$; d'où je connois qu'il faut prendre dans le dernier terme de la formule $-tt$ & non pas $+tt$, afin que la valeur de tt soit positive. Je construis ensuite le lieu en cette sorte.

Puisque $AD\ (r) = -a$, je mene par le point A parallelement à PM & du côté opposé la ligne $AD = a$; & puisque $BE\ (n) = o$, je tire par le point D la droite DG parallele à AP, sur laquelle je prends la partie $DC\ (s) = \frac{1}{2}a$ du côté de PM, & de part & d'autre du point C les parties CL, CK, égales chacune à $t = \sqrt{\frac{1}{4}aa}$. Ensuite du second diametre LK (parce qu'on a pris $-tt$ dans le dernier terme de la formule) qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la droite $KH\ (p) = 2t = LK$, je décris une Hyperbole. Je dis que sa portion OM sera le lieu qu'on cherche. FIG. 179.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M une parallele MP à AD, qui rencontre les droites AP, DG, aux points P, G; on aura $MG = y + a$, CG ou $DG - DC = x - \frac{1}{2}a$, & par la proprieté de l'Hyperbole $LK\ (2t) . KH\ (2t) :: \overline{CG}^2 + \overline{CK}^2\ (xx - ax + \frac{1}{4}aa + tt) . \overline{GM}^2\ (yy + 2ay + aa)$; ce qui donne en mettant pour tt sa valeur $\frac{1}{4}aa$, l'équation même proposée $yy + 2ay - xx + ax = o$.

Il est évident que l'Hyperbole est équilatere.

REMARQUE.

336. LORSQUE les deux quarrés yy & xx se trouvent avec differens signes & sans fraction dans une équation, où le plan xy ne se rencontre point; son lieu sera toûjours une Hyperbole équilatere. Car la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule sera nule ou zero; & partant

$BE\ (n) = o$, & $m = e$. D'où il suit que la fraction $\frac{nn}{mm}$ $- \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx dans la formule devient $- \frac{p}{2t}$; & qu'ainsi on aura $- \frac{p}{2t} = 1$, c'est à dire, que le diametre LK sera égal à son parametre KH, ou, ce qui est la même chose, que l'Hyperbole sera équilatere. Or comme la formule generale se change alors en celle-ci

$$yy - xx - 2ry + 2sx + rr = o,$$
$$+ tt$$
$$- ss$$

il s'ensuit qu'on peut s'en servir d'abord pour trouver les valeurs de r, s, t, qui servent à construire l'Hyperbole équilatere qui est le lieu de l'équation donnée; ce qui abrege le calcul.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à l'Hyperbole entre ses Asymptotes.

337. SOIENT comme dans la définition premiere, deux lignes inconnuës & indéterminées $AP\ (x)$, $PM\ (y)$ qui fassent entr'elles un angle donné ou pris à volonté APM; & soient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s. Cela posé.

FIG. 180. 1°. On prendra sur la ligne AP, la partie $AB = m$; & ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à PM, & du même côté, on tirera par le point A la droite AE qui est donnée, & que j'appelle e, & par le point D la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle ayant pris les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend AP, on menera parallelement à PM & du même côté la droite indéfinie CL, & la ligne $KH = p$,

* Art. 130. 131. On décrira ensuite * entre les Asymptotes CL, CK, une

une Hyperbole qui passe par le point H. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation ou formule.

$$xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x + \frac{mrs}{e} = 0.$$
$$\qquad - rx \qquad - mp$$

Car $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, $CG = \frac{ex}{m} - s$, & par la proprieté de l'Hyperbole* $CG \times GM \left(\frac{exy}{m} - sy - \frac{enxx}{mm} + \frac{nsx}{m} - \frac{erx}{m} + rs\right) = CK \times KH\ (ep)$; ce qui donne en délivrant le terme xy de fractions, & mettant par ordre tous les termes, la même équation $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y$ &c. que cy dessus. * *Art.* 101.

2°. On menera par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM & du même côté; & ayant pris sur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallele à AP & du même côté, & par les points déterminés A, E, la ligne AE que j'appelle e; & ayant pris sur AP la partie $AD = r$ du côté de PM, on tirera la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle on prendra les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend PM, & on menera parallelement à AP & du même côté, la droite indéfinie CL & la ligne $KH = p$. On décrira ensuite* entre les asymptotes CL, CK, une Hyperbole qui passe par le point H. Je dis qu'elle sera le lieu de cette seconde équation ou formule. FIG. 181. * *Art.* 130. 131.

$$xy - \frac{n}{m}yy - \frac{ms}{e}x + \frac{ns}{e}y + \frac{mrs}{e} = 0.$$
$$\qquad - ry \qquad - mp$$

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, AQF, donneront $AB\ (m) . AE\ (e) :: AQ$ ou $PM\ (y) . AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$, & $AB\ (m) . BE\ (n) :: AQ\ (y) . QF = \frac{ny}{m}$. Et par conséquent $GM = x$

$-\frac{ny}{m}-r$, $CG=\frac{ey}{m}-s$. Or par la proprieté de l'Hyperbole $CG\times GM=CK\times KH$, ce qui donne, en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques, & délivrant le terme xy de fractions, la même seconde formule que cy-dessus. Donc &c.

COROLLAIRE.

338. Il est clair 1°. Que le terme xy se rencontre toûjours dans ces deux formules, puisque n'étant multiplié par aucune fraction, on ne peut point la supposer nulle pour le faire évanoüir. 2°. Qu'il ne s'y peut rencontrer que l'un des quarrés xx ou yy, lequel s'évanoüit si la fraction $\frac{n}{m}$ qui le multiplie est nulle.

PROPOSITION V.

Problême.

339. Trouver *le lieu d'une équation donnée dans laquelle le plan* xy *se rencontre, sans aucun des quarrés* xx *&* yy, *ou seulement avec l'un des deux.*

On délivrera le plan xy de fractions, & on comparera les termes de l'équation donnée avec ceux qui luy répondent dans la premiere formule lorsque le quarré xx s'y rencontre, & avec ceux de la seconde lorsque c'est le quarré yy, & enfin avec celle des deux qu'on voudra lorsque pas un des quarrés xx & yy ne s'y trouve. On tirera ensuite de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, par le moyen desquelles on décrira une Hyperbole entre ses asymptotes comme l'on a enseigné dans le Lemme précédent, en observant toûjours de mener ou de prendre du côté opposé à AP & à PM les lignes dont les valeurs sont négatives. Les Exemples qui suivent éclairciront ces regles.

EXEMPLE I.

340. On demande le lieu de $xy - \frac{b}{a}xx - cy = o$.

Comme c'eſt le quarré xx qui ſe rencontre dans l'équation donnée, je choiſis la premiere formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$, d'où en faiſant $m = a$, je tire $n = b$. 2°. $\frac{ms}{e} = c$, & partant $s = \frac{ec}{a}$. 3°. $\frac{ns}{e} - r = o$, parce que l'inconnuë x ne ſe trouve point au premier degré dans l'équation donnée, & partant $r = \frac{bc}{a}$. 4°. $\frac{mrs}{e} - mp = o$, parce qu'il ne ſe trouve point de termes entierement connus ; & partant $p = \frac{rs}{e} = \frac{bcc}{aa}$. Or comme les valeurs de AP (m), BE (n), CD (s), AD (r), KH (p) ſont toutes poſitives, je conſtruis le lieu préciſément comme dans le Lemme (*fig.* 180.) en obſervant de prendre pour les lignes les valeurs que l'on vient de trouver.

Car $GM = y - \frac{bx}{a} - \frac{bc}{a}$, CG ou $DG - DC = \frac{ex - ec}{a}$, FIG. 180.
& par la proprieté de l'Hyperbole $CG \times GM = CK \times KH$ c'eſt à dire, en mettant les valeurs analytiques, l'équation même donnée. Donc &c.

EXEMPLE II.

341. Soit $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = o$, l'équation dont il faut conſtruire le lieu.

Comme c'eſt le quarré yy qui ſe trouve dans l'équation donnée, je choiſis la ſeconde formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = -\frac{b}{a}$, & ſi l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$. 2°. $\frac{ms}{e} = o$, & partant $s = o$. 3°. $r = c$. 4°. $mp = ff$, &

partant $p = \frac{ff}{a}$. Ce qui donne la construction suivante.

FIG. 182. Ayant mené par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM & du même côté, & ayant pris sur cette ligne, la partie AB $(m) = a$, je tire $BE = b = -n$ parallele à AP & du côté opposé, & par les points déterminés A, E, la ligne AE (e). Je prends sur AP, la partie AD $(r) = c$ du côté de PM, & je tire la droite indefinie DG parallele à AE, & comme les points D, C, tombent l'un sur l'autre, parce que DC $(s) = o$, je prends sur cette ligne la partie $DK = e$ du côté que s'étend PM, & ayant mené parallelement à AP & du même côté la ligne KH $(p) = \frac{ff}{a}$, & la droite indéfinie DL qui tombe ici sur AP, je décris entre les Asymptotes DL, DK, une Hyperbole qui passe par le point H. Je dis qu'elle sera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la droite MQ parallele à AP & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G, on aura GM ou $MQ + QF - FG = x + \frac{by}{a} - c$, DG ou $AF = \frac{ey}{a}$, & partant $DG \times GM = \frac{exy}{a} + \frac{ebyy}{aa} - \frac{ecy}{a} = CK \times KH$ $(\frac{eff}{a})$. Ce qui donne, en délivrant le terme xy de fractions, l'équation proposée $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = o$.

REMARQUE.

342. Si l'on prend pour l'arbitraire AB (m) une autre valeur que a, celles de CK (e) & de KH (p) changeront, mais les valeurs du rectangle $CK \times KH$ (ep), & des droites AD (r), CD (s) demeureront toûjours les mêmes; car elles ne renferment dans leurs expressions que les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{n}{e}$, $\frac{m}{e}$, qui ne chan-

gent point, puisque dans le triangle ABE l'angle ABE est donné, & la raison $\frac{n}{m}$ (qui dans cet exemple est $\frac{b}{a}$) du côté AB (m) au côté BE (n). Or comme l'Hyperbole qui doit passer par le point H, sera toûjours la même*, telle grandeur que l'on puisse donner à CK (e) & à KH (p), pourvû que le rectangle $CK \times KH$ demeure le même ; il s'ensuit que l'on construira toûjours la même Hyperbole, telle grandeur que l'on puisse prendre pour l'arbitraire AB (m). * Art. 101.

EXEMPLE III.

343. Il faut construire le lieu de l'équation donnée $xy - ay + bx + cc = 0$.

Comme pas un des quarrés xx & yy ne se trouve dans l'équation proposée, je puis prendre indifferemment l'une ou l'autre des deux formules, par exemple, la premiere, de laquelle comparant les termes avec ceux de la proposée, j'ai 1°. $\frac{n}{m} = 0$, & partant $n = 0$, & $m = e$; je fais $m = a$. 2°. $\frac{ms}{e}$ ou $s = a$. 3°. $r = -b$, puisque $\frac{ns}{e} = 0$. 4°. $rs - mp = cc$, & partant $p = -b - \frac{cc}{a}$. Or ces valeurs de m, n, r, s, p, étant ainsi déterminées, je construis le lieu de la maniere qui suit.

Puisque AD (r) $= -b$, je mene parallelement à PM & du côté opposé la ligne $AD = b$; & puisque BE (n) $= 0$, je tire la droite indéfinie DG parallele à AP sur laquelle ayant pris les parties DC (s) $= a$, CK (e) $= m = a$ du côté que s'étend AP, je tire la droite indéfinie CL, & la ligne $KH = b + \frac{cc}{a} = -p$ parallele à PM & du côté opposé. Je décris ensuite l'Hyperbole opposée à celle qui ayant pour Asymptotes les droites CL, CK, passe par le point H. Je dis FIG. 185.

que sa portion indéfinie OM renfermée dans l'angle PAS, faite par la droite indéfinie AP & par la ligne AS menée parallelement à PM & du même côté, sera le lieu cherché.

Car GM ou $PG + PM = y + b$ & CG ou $CD - DG = a - x$; & par consequent $CG \times GM = ay - xy + ab - bx = CK \times KH$ $(ab + cc)$; ce qui, en effaçant de part & d'autre le rectangle ab, & transposant à l'ordinaire, donne $xy - ay + bx + cc = o$ qui est l'équation proposée.

Il auroit été inutile dans cet Exemple de décrire l'Hyperbole qui passe par le point H; car aucun de ses points ne pourroit tomber dans l'angle PAS, où l'on suppose que doivent tomber les points M.

REMARQUE.

344. S'IL arrive qu'en comparant les termes de la formule avec ceux de l'équation donnée, on trouvât que $p = o$; on voit qu'il seroit alors impossible de décrire l'Hyperbole qui en devroit être le lieu, puisque sa puissance qui est égale au rectangle pe seroit nulle. Mais alors l'équation se pourroit toûjours abaisser, en sorte que son lieu deviendroit une ligne droite; car effaçant par exemple dans la premiere formule du Lemme le terme mp, elle devient $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x - rx + \frac{mrs}{e} = o$, qui étant divisée par $\frac{ex}{m} - s$ donne $y - \frac{nx}{m} - r = o$, dont le lieu * est une ligne droite.

* Art. 306.

PROPOSITION VI.

Problême.

345. CONSTRUIRE *tout lieu du second degré, son équation étant donnée.*

Tous les termes de l'équation étant mis d'un même côté ; en ſorte que l'un des membres ſoit zero, je diſtingue deux differens cas.

Premier cas. Lorſque le plan xy ne ſe trouve point dans l'équation donnée. 1°. S'il n'y a que l'un des quarrés yy ou xx, le lieu ſera une * Parabole. 2°. Si les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec les mêmes ſignes, le lieu ſera une * Ellipſe ou un cercle. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec differens ſignes, le lieu ſera une * Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées rapportées à ſes diametres.

* *Art.* 310. * *Art.* 324. * *Art.* 332.

Second cas. Lorſque le plan xy ſe trouve dans l'équation donnée. 1°. Si pas un des quarrés yy & xx ne s'y rencontre ou ſeulement l'un des deux, le lieu ſera * une Hyperbole entre ſes Aſymptotes. 2°. Si les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec differens ſignes, le lieu ſera * une Hyperbole rapportée à ſes diametres. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec les mêmes ſignes, on délivrera le quarré yy de fractions, & le lieu ſera * une Parabole lorſque le quarré de la moitié de la fraction qui multiplie xy eſt égal à la fraction qui multiplie le quarré xx ; une * Ellipſe ou un cercle lorſqu'il eſt moindre ; & enfin une * Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées rapportées à ſes diametres lorſqu'il eſt plus grand.

* *Art.* 339. * *Art.* 332. * *Art.* 310. * *Art.* 324. * *Art.* 332.

On décrira le lieu ſelon l'article 310. s'il eſt une Parabole ; ſelon l'article 314. s'il eſt une Ellipſe ou un cercle ; ſelon l'article 332. s'il eſt une Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées rapportées à ſes diametres ; & enfin ſelon l'article 339. ſi c'eſt une Hyperbole entre ſes Aſymptotes. Tout ceci n'eſt qu'une ſuite de ces quatre articles.

COROLLAIRE.

346. UNE équation du ſecond degré étant donnée, comme la Section Conique que l'on trouve par

les regles prescrites est le lieu * de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y, qui répondent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x; il s'ensuit qu'il ne peut y avoir que cette seule Section qui soit le lieu de l'équation donnée.

* Art. 314.



LIVRE HUIT.

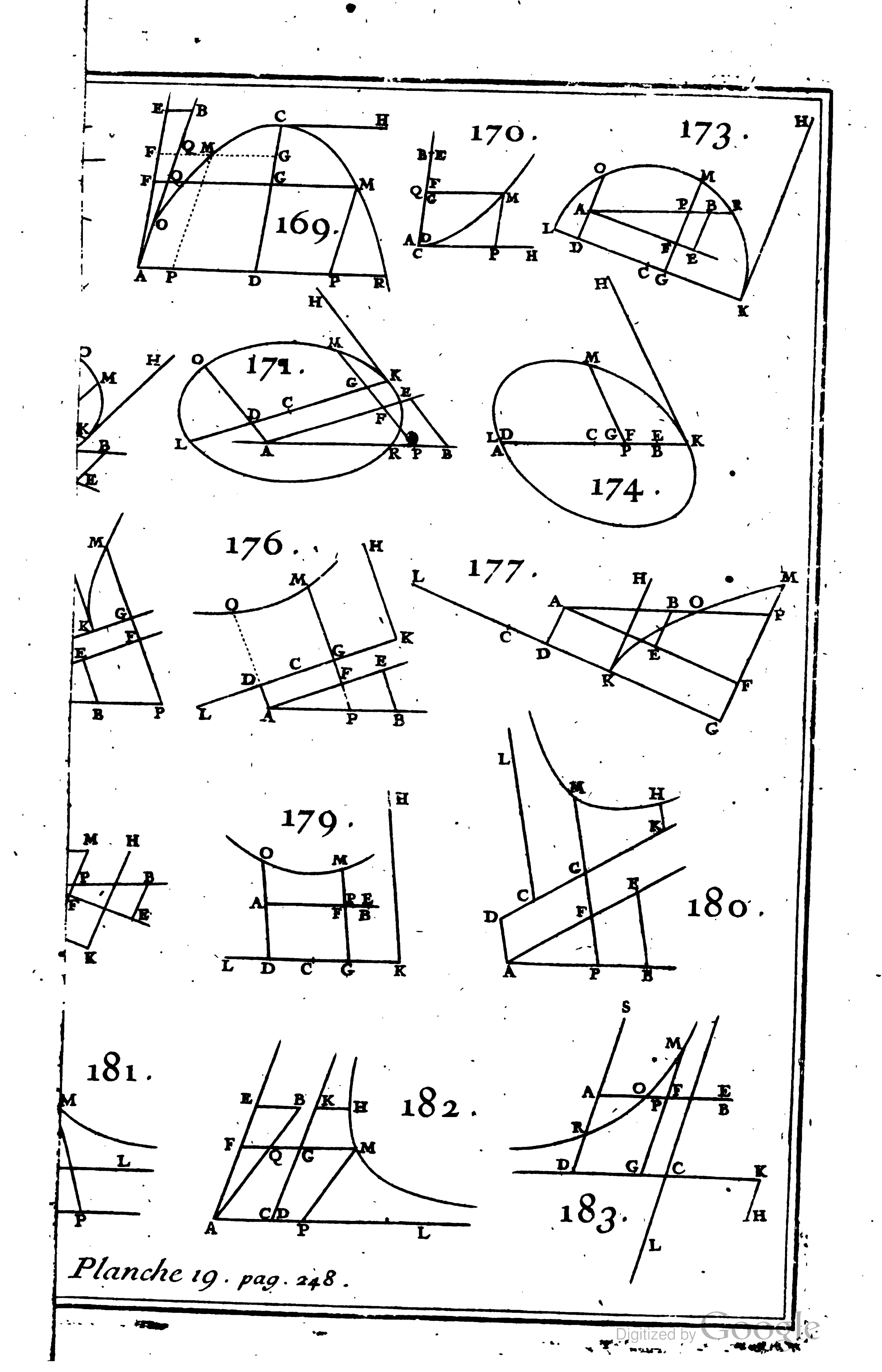


Planche 19. pag. 248.

LIVRE HUITIEME.

Des Problêmes indéterminés.

PROPOSITION GENERALE.

347. Trouver *le lieu d'une infinité de points qui ayent tous certaines conditions marquées ; lorſque ce lieu ne paſſe point le ſecond degré.* Fig. 184.

1°. On ſuppoſera comme connuës & déterminées deux lignes droites inconnuës & indéterminées *AP* (*x*) ; *PM* (*y*), qui faſſent entr'elles un angle *APM* donné ou pris à diſcretion ; & dont l'une *AP* ait une origine fixe & invariable en un point *A*, & s'étende le long d'une ligne donnée de poſition ; l'autre *PM* qui détermine toûjours par ſon extremité *M*, l'un des points cherchés, change continuellement d'origine, & ſoit toûjours parallele à la même ligne. 2°. On tirera les autres lignes que l'on jugera utiles à la ſolution du Problême, & on les exprimera par des lettres ; ſçavoir, les connuës par les premieres lettres de l'Alphabet, & les inconnuës par les dernieres. 3°. On regardera la queſtion comme reſoluë, & après en avoir parcouru toutes les conditions, on arrivera enfin à une équation qui ne renfermera que les deux inconnuës *x* & *y* mêlées avec des connuës. 4°. Cette équation dans laquelle on ſuppoſe que les inconnuës *x* & *y* ayent au plus deux dimenſions, étant formée, on en conſtruira le lieu ſelon les regles preſcrites dans le Livre précédent ; & le lieu ainſi conſtruit reſoudra la queſtion. Tout ceci s'éclaircira par les Exemples qui ſuivent.

Exemple I.

348. Trouver dans l'angle donné *BAC* le point *M*, tel qu'ayant mené de ce point les deux droites *MF*, *MG*, qui faſſent ſur les côtés *AB*, *AC*, toûjours vers la même part, des angles donnés *MFB*, *MGC* ; la Fig. 184.

droite MF soit toûjours à la droite MG en la raison donnée de a à b. Et comme il y a une infinité de ces points, on demande la ligne qui les renferme tous, & qui en est par conséquent le lieu.

Par le point M, que l'on suppose être un des points cherchés, ayant mené la ligne MP parallele à AC; on considerera les deux droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y), comme connuës & déterminées. On prendra sur le côté AB la partie $AB = a$, on tirera les droites BC, BD, paralleles à MF, MG, & qui rencontrent aux points C, D, l'autre côté AC prolongé, s'il est necessaire; & on nommera les connuës AC, c; BC, f; BD, g. Presentement menant MQ parallele à AB, les triangles semblables ACB, PMF, & ABD, QMG, donneront ces deux proportions : AC (c). CB (f) :: MP (y). $MF = \frac{fy}{c}$, & AB (a). BD (g) :: MQ ou AP (x). $MG = \frac{gx}{a}$; ce qui satisfait à la premiere condition du Problême, puisque les lignes MF, MG, sont toûjours supposées paralleles aux deux mêmes droites BC, BD, qui font sur les côtés AB, AC, les angles donnés. Or par la seconde condition qui reste à accomplir, il faut que $MF\left(\frac{fy}{c}\right)$. $MG\left(\frac{gx}{a}\right)$ :: a, b; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{cgx}{bf}$ qui renferme toutes les conditions du Problême, & dont le lieu sera par conséquent celui que l'on cherche. Il se construit * ainsi.

* Art. 306.

Ayant pris sur la ligne AP, la partie $AH = b$, soit menée $HE = \frac{cg}{f}$ parallele à PM & du même côté, & soit tirée la droite indéfinie AE. Je dis qu'elle sera le lieu de tous les points cherchés M.

Car ayant mené par un de ses points quelconques M les droites MP, MQ, paralleles aux deux côtés AC, AB, & les droites MF, MG, paralleles à BC, BD, & qui font par conséquent sur les deux côtés AB, AC, les angles donnés; on aura à cause des triangles sembla-

bles *AHE*, *APM*, cette proportion ; *AH* (b). *HE* $(\frac{cg}{f})$ :: *AP* (x). *PM* $(y) = \frac{cgx}{bf}$, & à cause des triangles semblables *ACB*, *PMF*, & *ABD*, *QMG*, ces deux autres : *AC* (c). *CB* (f) :: *MP* $(\frac{cgx}{bf})$. *MF* $= \frac{gx}{b}$; & *AB* (a). *BD* (g) :: *MQ* ou *AP* (x). *MG* $= \frac{gx}{a}$. Et par conséquent *MF* $(\frac{gx}{b})$. *MG* $(\frac{gx}{a})$ :: a. b. Ce qui étoit proposé.

Je n'ai resolu cette question par le calcul, que pour la rapporter à la Proposition generale, & commencer par des Exemples simples & aisés à en faire voir l'application ; car on peut resoudre ce Problême sans aucun calcul, & d'une maniere plus facile en cette sorte. FIG. 185.

Soient tirées les droites *AK*, *AL*, qui fassent sur *AB*, *AC*, les angles donnés *KAB*, *LAC*, & qui soient entr'elles en la raison donnée de a à b. Soient menées les droites *KM*, *LM*, paralleles aux côtés *AB*, *AC*, & qui se rencontrent au point *M* ; par où, & par le sommet *A* de l'angle donné *BAC*, soit tirée la ligne *AM* : Je dis qu'elle sera le lieu cherché.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques *E* les droites *ER*, *ES*, paralleles à *AK*, *AL* ; on aura à cause des triangles semblables *AER*, *MAK*, & *AES*, *MAL*, ces proportions *ER*. *AK* :: *AE*. *AM* :: *ES*. *AL*. Et partant *ER*. *ES* :: *AK*. *AL* :: a. b.

EXEMPLE II.

349. LES paralleles *AB*, *CD*, étant données de position ; trouver le lieu de tous les points *M* tellement placés entre ces lignes, qu'ayant tiré les droites *MP*, *MG* ; qui fassent avec elles toûjours vers la même part des angles donnés *MPB*, *MGD* ; elles soient toûjours entr'elles en la raison donnée de a à b. FIG. 186.

Ayant pris pour l'origine fixe des indéterminées *AP* (x), un point quelconque *A* de la ligne *AB*, & les deux

droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y) étant supposées connuës & déterminées, on menera les lignes AC, AE, paralleles aux deux droites, MP, MG; & on nommera les connuës AC, c; AE, f; Cela fait, on prolongera PM jusqu'à ce qu'elle rencontre CD en F; & les triangles semblables CAE, FMG, donneront $AC\ (c).\ AE\ (f) :: MF\ (c-y).\ MG = \frac{cf-fy}{c}$. Or selon la condition du Problême qui reste à accomplir, il faut que $MP\ (y).\ MG\ (\frac{cf-fy}{c}) :: a.b$; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{acf}{bc+af}$ qui renferme toutes les conditions du Pro-

* *Art.* 307. blême, & dont le lieu qui est * une ligne droite indéfinie HM menée parallelement à AB en sorte que $AH = \frac{acf}{bc+af}$, est par conséquent le lieu cherché.

EXEMPLE III.

FIG. 187. 350. DEUX points A, B, étant donnez, en trouver un troisiéme M, tel qu'ayant mené les droites MA, MB; elles soient toûjours entr'elles en raison donnée de a à b. Et comme il y a une infinité de ces points M, il est question de décrire le lieu qui les renferme tous.

Il peut arriver trois differens cas selon que a est moindre, plus grand, ou égal à b.

Premier cas. Par le point M, que je suppose être un de ceux qu'on cherche, ayant mené la ligne MP perpendiculaire sur AB (car n'y ayant point d'angle donné dans le Problême, on choisit l'angle droit comme le plus simple), & les deux droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y) étant supposées connuës & déterminées; on nommera la donnée AB, c; & à cause des triangles rectangles APM, BPM, on aura les quarrés $\overline{AM}^2 = xx+yy$, $\overline{BM}^2 = cc-2cx+xx+yy$. Or par la condition du Problême, $\overline{AM}^2\ (xx+yy).\ \overline{BM}^2\ (cc-2cx+xx+yy) :: aa.\ bb$. D'où (en multipliant les extrêmes & les moyens & divisant ensuite

par $bb - aa$) on forme cette équation $yy + xx + \frac{2aacx}{bb-aa} - \frac{aacc}{bb-aa} = o$, qui renferme la condition du Problême, & dont le lieu qui est par conséquent celui qu'on demande, se construit par le moyen de l'article 322. (Liv. preced.) en cette sorte.

Soit prise sur la ligne AP, la partie $AC = \frac{aac}{bb-aa}$ du côté opposé à PM; & soit décrite du centre C, & du rayon CD ou $CE = \frac{abc}{bb-aa}$ la circonference d'un cercle. Je dis que sa portion DMO renfermée dans l'angle PAO, fait par la ligne AP & par la droite AO menée parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver. FIG. 187.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la perpendiculaire MP sur AB, on aura par la proprieté du cercle $\overline{CD}^2 - \overline{CP}^2$ ou $EP \times PD = PM$; c'est à dire en mettant pour ces quarrés leurs valeurs analytiques, l'équation precedente.

Si l'on suppose à present que les points M tombent dans l'angle EAR opposé au sommet à l'angle BAO dans lequel on a supposé en faisant le calcul qu'ils étoient situés, on trouvera en faisant* $AP = -x$, & $PM = -y$, la même équation que ci-dessus, tant par la condition du Problême, que par la proprieté de la portion RME de la même circonference que l'on vient de décrire; d'où il suit que cette portion est le lieu de tous les points cherchés M, lorsqu'ils tombent dans l'angle RAE. Et si l'on suppose enfin que les points M tombent dans l'angle BAR & ensuite dans l'angle EAO, on trouvera de même (en observant de faire $PM = -y$, lorsqu'il tombe de l'autre côté de la ligne AB; & $AP = -x$, lorsque le point P tombe de l'autre côté du point fixe A) que les portions DR, EO; de la même circonference seront les lieux de ces points; & qu'ainsi la circonferen- * Art. 304.

ce entiere qui a pour diametre la ligne DE, est le lieu complet de tous les points requis M.

Second cas. On trouvera par un raisonnement semblable à celui du premier cas, cette équation $yy + xx - \frac{2aacx}{aa-bb} + \frac{aacc}{aa-bb} = 0$. dont le lieu se construit ainsi.

FIG. 188. Soit prise sur AP, la partie $AC = \frac{aac}{aa-bb}$ du côté de PM; & soit décrite du centre C, & du rayon CD ou $CE = \frac{abc}{aa-bb}$ un cercle. Je dis que sa circonference sera le lieu de tous les points requis M. Cela se prouve de même que dans le premier cas.

Si l'on considere dans ces deux cas que la circonference qui a pour diametre DE, & qui est le lieu de tous les points cherchés M, doit couper la ligne AB en deux points D, E, tels que $AD.DB :: a.b$, & $AE.EB :: a.b$; puisque le point M tombant en D la droite AM devient AD; & BM, BD; & de même que le point M tombant en E, la droite AM devient AE, & BM, BE : on abregera de beaucoup les constructions precedentes. Car il est visible qu'ayant divisé la ligne AB prolongée du côté qu'il sera necessaire, en deux points D, E, tels que $AD.DB :: a.b$, & $AE.EB :: a.b$; la ligne DE sera en l'un & l'autre cas le diametre de la circonference qui est lieu cherché.

Troisiéme cas. Puisque dans ce cas $a = b$, l'équation

* Art. 307. precedente se change en celle-ci $x = \frac{1}{2}c$; d'où l'on voit*

FIG. 189. que si l'on prend AP égale à la moitié de AB & qu'on tire la droite PM perpendiculaire sur AB, cette ligne PM indéfiniment prolongée de part & d'autre, sera le lieu de tous les points requis M. Ce qui est d'ailleurs évident par les Elemens de Geometrie.

EXEMPLE IV.

FIG. 190. 351. DEUX lignes droites DE, DN, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point D, étant données

de position sur un plan, avec un point C hors de ces lignes; soit imaginé un angle donné CEM se mouvoir par son sommet E le long de DE, en sorte que son côté EC qui rencontre DN en N, passe toûjours par le même point C, & que son autre côté EM soit toûjours troisiéme proportionnel à NC, CE. On demande le lieu de tous les points M dans ce mouvement.

Soient menées CA parallele à DN; & CB qui fasse sur DE au point B un angle égal à l'angle donné CEM, du côté qu'il sera necessaire, afin que CE tombant sur CB la droite EM tombe sur DE. Cela posé je distingue la question en trois differens cas : car ou le sommet E de l'angle donné CEM se meut sur la droite DE de l'autre côté du point B par rapport au point A; ou entre les points B, A; ou enfin de l'autre côté du point A par rapport au point B.

Premier cas. Lorsque le sommet E se meut sur la ligne DE de l'autre côté du point B par rapport au point A. Ayant mené du côté du point C la ligne AQ qui fasse sur DE au point A l'angle BAQ égal à l'angle ABC, on tirera par l'un des points cherchés M, que l'on regarde comme donné, la ligne MP parallele à AQ, & qui rencontre DE en P; & on aura deux triangles semblables CBE, EPM; car les deux angles CBE, EPM, sont égaux chacun à l'angle donné CEM, & de plus les angles BCE, PEM, sont aussi égaux entr'eux; puisque dans le triangle CBE l'angle externe CEP ou $CEM + PEM$ est égal aux deux internes opposés BCE & CBE ou CEM. Si donc l'on nomme les données AD, a; AB, b; BC, c; & les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y; AE, z; on aura, tant à cause des paralleles DN, AC, que de la condition du Problême, ces proportions $AD\ (a).\ AE\ (z) :: CN.CE :: CE.EM :: CB\ (c).\ EP\ (x-z) :: BE\ (z-b).\ PM\ (y)$; d'où l'on forme (en multipliant les extrêmes & les moyens) ces deux équations $ax-az = cz$ & $ay = zz-bz$, qui, en prenant, pour abreger,

$f = a + c$, & faisant évanoüir z, se reduisent à celle ci $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = o$ qui ne renferme plus que les inconnuës x & y, & dont le lieu, qui est celui que l'on cherche, se construit * ainsi.

* *Art.* 310.

Soit prise sur la ligne AP, la droite $AF = \frac{bf}{2a}$ du côté de PM; & ayant mené FL parallele à PM, soit prise sur cette ligne du côté opposé à PM, la partie $FG = \frac{bb}{4a}$. Soit décrite du diametre GL qui ait pour origine le point G, pour parametre $GH = \frac{ff}{a}$, & pour ordonnées des droites LM paralleles à AP, une Parabole qui s'étende du côté de PM. Je dis que sa portion indéfinie OM renfermée dans l'angle PAQ, sera le lieu de tous les points cherchés M.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP & qui rencontre le diametre CL en L, on aura ML ou $PF = x - \frac{bf}{2a}$ & $GL = y + \frac{bb}{4a}$, & par la proprieté de la Parabole, $\overline{ML}^2$ $(xx - \frac{bf}{a}x + \frac{bbff}{4aa}) = LG \times GH$ $(\frac{ff}{a}y + \frac{bbff}{4aa})$; ce qui en transposant à l'ordinaire donne l'équation $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = o$, qu'il falloit construire.

Second cas. Lorsque le sommet E parcourt la partie BA. Il est clair dans ce cas que les points M tomberont de l'autre côté de DE, puisque l'angle donné CEM sera toûjours plus grand que l'angle CEP qui diminuë continuellement. C'est pourquoi j'ai $PM = -y$, & comme je trouve par un raisonnement semblable au precedent, la même équation; il s'ensuit que la portion AGO de la Parabole que l'on vient de décrire, sera le lieu de tous les points M; puisqu'elle donne aussi par sa proprieté cette même équation.

Troisiéme cas. Lorsque le sommet se meut de l'autre côté

côté du point A par rapport au point B. Il est clair encore dans ce cas que tous les points cherchés M doivent tomber au dessous de la ligne DE; & on trouvera comme dans le premier cas $AD . AE :: CN . CE :: CE . EM :: CB . EP$. Et partant $AD . CB :: AE . EP$. D'où l'on voit que EP est plus grande, moindre, ou égale à EA selon que CB est plus grande, moindre, ou égale à AD; & qu'ainsi prolongeant AQ au dessous de DE vers K, tous les points cherchés M tombent dans l'angle BAK dans le premier de ces trois cas, dans son complement à deux droits DAK dans le second cas, & enfin sur la droite AK dans le troisiéme cas. Je suppose ici que CB soit plus grande que AD; & comme faisant $PM = -y$, parce qu'il tombe de l'autre côté de AP, je ne trouve plus la même équation que dans le premier cas, je ne fais plus d'attention à la construction de ce cas. C'est pourquoi nommant à l'ordinaire AP, x; PM, y; j'arrive à cette équation $xx + \frac{bg}{a}x - \frac{gg}{a}y = 0$, dans laquelle $g = c - a$, dont le lieu qui est celui que l'on cherche est une portion indéfinie AM d'une autre Parabole que la precedente laquelle s'étend vers le côté opposé, & qui se construit * en cette sorte.

* Art. 310.

Soit prise sur AP de l'autre côté de PM la partie $AS = \frac{bg}{2a}$; soit menée $ST = \frac{bb}{4a}$ parallele à AQ, & du côté opposé à PM; soit décrite du diametre TS qui ait pour origine le point T, pour parametre une ligne $= \frac{gg}{a}$, & pour ordonnées des droites paralleles à AP, une Parabole qui s'étende du côté de PM. Sa portion indéfinie AM renfermée dans l'angle PAK sera le lieu de tous les points cherchés M dans ce dernier cas, où l'on suppose que CB surpasse AD.

Il est donc évident que le lieu cherché de tous les points M est composé de deux portions indéfinies de differentes Paraboles, dont l'une $AGOM$ s'étend du côté de C; & l'autre AM du côté opposé, & partant

Kk

toutes deux du point A; car le côté CE de l'angle donné CEM tombant sur CA parallele à DN, il est clair que CN devient infinie, & qu'ainsi EM est nulle ou zero, puisqu'on a toûjours $NC. CE :: CE. EM$: c'est à dire que le point M se confond avec le point E qui tombe sur le point D. D'où l'on voit que AF est une ordonnée au diametre FG, & AS au diametre ST; ce qui donne lieu à la construction suivante qui est generale.

Ayant pris sur la ligne indéfinie AP de part & d'autre du point B les parties BO, BR, égales chacune à la quatriéme proportionnelle aux trois lignes DA, AB, BC; on menera par les points de milieu F, S, l'un de AO, l'autre de AR, les droites FG, ST, paralleles à AQ, & égales chacune à la troisiéme proportionnelle à $4AD$, & à AB; sçavoir, FG du côté opposé au point C, & ST du même côté. Cela fait, on décrira deux differentes Paraboles dont l'une aura pour diametre GF & pour ordonnée FA, & l'autre pour diametre TS & pour ordonnée SA; je dis que leurs portions indéfinies $MAGOM$ seront le lieu complet de tous les points cherchés M.

Car BO ou $BR = \frac{bc}{a}$, & partant AF ou $\frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}b + \frac{bc}{2a} = \frac{bf}{2a}$; & de même AS ou $\frac{1}{2}AR = \frac{bc}{2a} - \frac{1}{2}b = \frac{bg}{2a}$. Donc &c.

On peut remarquer en passant que si l'angle donné, qui se meut par son sommet le long de la ligne DE, étoit égal au complement à deux droits de l'angle CEM, sans rien changer au reste; c'est à dire que les points M tombassent sur la ligne EM prolongée de l'autre côté du point E: le lieu de tous les points M seroit alors les portions restantes des deux Paraboles que l'on vient de décrire.

Si les points A, B, C, étoient situés differemment de ce qu'on les suppose dans cette figure, à laquelle on a accommodé le raisonnement; on arriveroit toûjours

comme l'on vient de faire à deux équations qui ne pourroient être differentes des precedentes que par quelques signes, & dont les lieux seroient par conséquent des portions de Paraboles que l'on décriroit avec la même facilité.

Le Comte *Roger de Vintimille* a proposé ce Problême avec quelques autres dans le Journal de Parme du mois d'avril de l'année 1693. ce qui a donné occasion au Pere *Saquerius* de faire imprimer un petit Livre à Milan, dans lequel il avouë qu'il n'a pû resoudre celui-ci, quoiqu'il fasse assez paroître par la solution des autres qu'il est fort versé dans la Geometrie.

EXEMPLE V.

352. UNE ligne droite indéfinie AP étant donnée de position, avec deux points fixes A, C, l'un sur cette droite, & l'autre au dehors; soit décrite une Parabole AM qui ait pour parametre une ligne quelconque, & pour axe la ligne AP dont l'origine soit en A; & soit menée du point donné C une perpendiculaire CM à cette Parabole. On demande le lieu de tous les points M, dont il est visible qu'il y a une infinité; puisque changeant continuellement de parametres, on peut décrire une infinité de Paraboles differentes, qui ayent toutes pour axes la même droite indéfinie AP, dont l'origine soit toûjours en A. FIG. 191.

Ayant mené par le point donné C la perpendiculaire CB sur AP, & par un des points cherchés M que l'on regarde comme donné, les droites MP, MK, paralleles à BC, AP, & la tangente MT; on nommera les données AB, a; BC, b; & les inconnuës & indéterminés AP, x; PM, y; ce qui donne $CK = b - y$, $MK = a + x$. Or par la condition du Problême, l'angle CMT est droit; & par conséquent les triangles rectangles TPM, CKM, seront semblables; car si l'on ôte des angles droits CMT, KMP, le même angle KMT,

* *Art.* 22. & 23. les restes *CMK*, *TMP*, seront égaux. Donc TP* $(2x)$. PM (y) :: CK $(b-y)$. KM $(a+x)$, d'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $yy - by + 2xx + 2ax = 0$, dont le lieu qui est

* *Art.* 322. celui qu'on demande est * une Ellipse que l'on construit*

* *Art.* 324. en cette sorte.

Ayant mené $AD = \frac{1}{2}b$ perpendiculaire à AP & du côté de PM, & tiré la droite indefinie DL parallele à AP, on prendra sur cette ligne la partie $DE = \frac{1}{2}a$ du côté opposé à PM; & de part & d'autre du point E les parties EF, EG égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{8}bb}$. Ensuite de l'axe FG qui ait pour parametre une ligne GH double de FG, on décrira une Ellipse. Je dis que sa portion AMO renfermée dans l'angle PAD est le lieu de l'équation precedente; & par consequent de tous les points cherchés M, lorsqu'ils tombent dans cet angle.

Car prolongeant PM, s'il est necessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG en L, on aura l'ordonnée $ML = \frac{1}{2}b - y$, & $EL = \frac{1}{2}a + x$, & par la proprieté de l'Ellipse, $FL \times LG$ ou $\overline{EF}^2 - \overline{EL}^2$ $(\frac{1}{8}bb - ax - xx)$. $\overline{LM}^2$ $(\frac{1}{4}bb - by + yy)$ :: $FG.GH$ :: 1. 2; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens $\frac{1}{4}bb - 2ax - 2xx = \frac{1}{4}bb - by + yy$. Donc &c.

Si l'on suppose à present que les points M tombent dans les angles BAD, BAR, on trouvera toûjours la même équation que ci-dessus, tant par la condition du Problême que par la proprieté de l'Ellipse; en observant de faire $AP = -x$, & $PM = -y$, lorsque le point P tombe de l'autre côté de l'origine A, & PM, de l'autre côté de la ligne AP. D'où il suit que les portions de l'Ellipse, que l'on vient de décrire, renfermées dans ces angles sont le lieu de ces points.

On doit remarquer qu'il est impossible qu'aucun des points cherchés M, tombe dans l'angle PAR, opposé au sommet à l'angle BAD dans lequel est situé le point donné C, d'où doivent partir toutes les perpendiculai-

res aux Paraboles. Car si d'un point quelconque pris dans cet angle PAR, on mene des droites comme MP, MT, perpendiculaires sur AP & CM, il est visible que les points P, T, tomberont du même côté du point A, & par consequent que cette ligne MT ne pourra être tangente en M comme le demande la question.

Si l'on suppose que AP (x) devienne nulle ou zero, l'équation precedente $yy - by + 2xx + ax = o$ se changera en celle-ci $yy - by = o$, dont les deux racines sont $y = o$, & $y = b$; ce qui fait voir qu'en tirant AO parallele & égale à BC, le lieu des points cherchés M passera par les deux point A, O. On prouvera de même en supposant que le point P tombe de l'autre côté de l'origine A, & faisant AP ($-x$) $=$ AB (a), que ce même lieu passera par les points B, C; de sorte que l'Ellipse doit être décrite autour du rectangle $ABCO$. Ceci donne lieu à une nouvelle construction que voici.

Soit formé le rectangle $ABCO$, & soit décrite * autour de ce rectangle une Ellipse, dont l'axe FG parallele aux côtés AB, OC, soit à son parametre GH, comme 1 est à 2. Il est évident qu'elle sera le lieu cherché. * Art. 176.

REMARQUE I.

353. Si la nature des lignes courbes telles que AM étoit exprimee par l'équation generale $y^m = x^n a^{m-n}$ (les lettres m, n, marquent les exposans des puissances de y & x tels qu'ils puissent être) qui renferme * non seulement la Parabole ordinaire, mais encore celles de tous * Art. 229. les degrés à l'infini; on auroit TP * ($\frac{n}{m}x$). PM (y) :: * Art. 237. CK ($b-y$). KM ($a+x$) : ce qui donne $yy - by + \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = o$, dont le lieu qui est celui qu'on cherche, est une Ellipse que l'on construira selon l'article 322. ou bien selon l'article 176. si l'on observe que cette Ellipse doit passer autour du rectangle donné $ABCO$, & que son axe FG parallele aux côtés AB, OC, doit être

à son parametre GH en la raison donnée de m à n.

REMARQUE II.

FIG. 191. 354. Si le centre E de l'Ellipse qu'on vient de décrire tomboit sur l'origine A de l'axe commun AP de toutes les Paraboles AM; & l'axe FG de l'Ellipse sur l'axe AP des Paraboles : cette Ellipse couperoit toutes ces differentes Paraboles à angles droits. On peut énoncer ce Theorême de la maniere qui suit.

FIG. 192. Soient une infinité de Paraboles comme AM de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour axe commun la même ligne AP, dont l'origine est toûjours au même point A; & soit une Ellipse qui ait pour centre le point A, & dont l'axe FG situé sur AP soit à son parametre, comme le nombre m exposant de la puissance de AP (x) est au nombre n exposant de la puissance de PM (y), dans l'équation generale $y^n = x^m a^{n-m}$ qui exprime la nature des Paraboles AM. Je dis que cette Ellipse coupera toutes ces Paraboles à angles droits.

Par le point M, où elle coupe telle de ces Paraboles qu'on voudra, ayant mené la tangente MT à cette Parabole, & MS perpendiculaire à cette tangente; il est question de prouver que MS touche l'Ellipse au point M. Pour en venir à bout, on tirera la perpendiculaire MP sur l'axe, & ayant nommé les indéterminées AP, x; PM, y; & la donnée FG, $2t$; on aura par la proprieté de l'Ellipse $FP \times PG$ ($tt - xx$). $\overline{PM}^2$ (yy) :: $m.n$, & partant $myy = ntt - nxx$. Or à cause des angles droits TPM, * Art. 237. TMS, il vient TP* $\left(\frac{n}{m}x\right)$. PM (y) :: PM (y). $PS = \frac{myy}{nx}$, & par conséquent AS ou $AP + PS = \frac{nxx + myy}{nx} = \frac{tt}{x}$ en mettant pour myy la valeur que l'on vient de trouver $ntt - nxx$. D'où l'on voit que $AP.AF$ :: $AF.AS$, * Art. 57. & qu'ainsi * la ligne MS touche l'Ellipse au point M. *Ce qu'il falloit &c.*

EXEMPLE VI.

355. SOIENT imaginées une infinité d'Hyperboles qui ayent toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites AP, AO, données de position, qui font entr'elles un angle droit PAO; & soient conçûës partir d'un point donné C une infinité de perpendiculaires comme CM à ces Hyperboles. On demande le lieu de tous les points M, où chacune des droites CM rencontre l'Hyperbole à laquelle elle est perpendiculaire. FIG. 193.

Ayant tiré les mêmes lignes que dans l'exemple precedent, & les ayant nommées par les mêmes lettres, on arrivera de même à cette proportion TP * (x). PM (y) :: CK $(b-y)$. KM $(a-x)$; ce qui donne cette equation $yy-by-xx+ax=0$, dont voici* le lieu. * Art. 107. * Art. 330. ou 335.

Ayant pris sur l'Asymptote AO parallele à PM, la partie $AD=\frac{1}{2}b$, & mené DL parallele à AP; on prendra sur cette ligne la partie $DE=\frac{1}{2}a$ du côté de PM, & de part & d'autre du point E, les parties EF, EG, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}bb}$ ou $\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}aa}$ selon que a est plus grand ou moindre que b. On décrira ensuite de la ligne FG, comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxiéme, deux Hyperboles opposées équilateres. Je dis que leurs portions renfermées dans l'angle PAO, seront le lieu de cette équation, & par conséquent celui de tous les points cherchés M.

Car prolongeant PM (s'il est necessaire) jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG, en L, on aura l'ordonnée $ML=\frac{1}{2}b-y$, & la partie $EL=x-\frac{1}{2}a$; &* par la proprieté des Hyperboles équilateres $\overline{EL}^2+\overline{EF}^2$ $(xx-ax+\frac{1}{4}bb)=\overline{LM}^2$ $(\frac{1}{4}bb-by+yy)$. Donc &c. * Art. 127.

Si $a=b$, la construction precedente n'a plus de lieu, car la valeur du demi axe EF ou EG devient nulle. Et comme l'équation precedente devient celle-ci $yy-ay-xx+ax=0$, ou $yy-ay+\frac{1}{4}aa=xx-ax+\frac{1}{4}aa$

de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $y - \frac{1}{2}a = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = x$, & $\frac{1}{2}a - y = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = a - x$; il s'ensuit que si l'on acheve le rectangle $ABCO$, & qu'on tire les deux diagonales AC,
FIG. 194. BO: elles seront le lieu de tous les points cherchés M. Car la diagonale AC est le lieu de la premiere équation $y = x$, & l'autre diagonale BO est le lieu de la deuxiéme $y = a - x$.

REMARQUE I.

FIG. 193. 356. Si la nature des lignes courbes qui ont pour Asymptotes les droites AB, AO, étoit exprimée par l'équation generale $x^m y^n = a^{n+m}$ qui renferme * les Hyperboles de tous les degrés à l'infini, on auroit TP* $(\frac{n}{m}x)$. $PM(y)$ :: $CK(b-y)$. $KM(a-x)$; ce qui donne $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, dont le lieu se construit * ainsi.

* Art. 229.
* Art. 237.
* Art. 330.

Ayant trouvé le point E comme dans l'exemple, on prendra sur DL de part & d'autre du point E, les parties EF, EG, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{m}{4n}bb}$ ou $\sqrt{\frac{m}{4n}bb - \frac{1}{4}aa}$; selon que naa est plus grand ou moindre que mbb. Ensuite de la ligne FG comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxiéme, qui soit à son parametre en la raison donnée de m à n, on décrira deux Hyperboles opposées: leurs portions renfermées dans l'angle OAB seront le lieu qu'on cherche.

Si $a.b :: \sqrt{m}.\sqrt{n}$, l'équation $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$
FIG. 194. se change en celle-ci $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, ou $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m}} + \frac{naa}{4m} = \frac{n}{m}xx - \frac{n}{m}ax + \frac{naa}{4m}$ de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient

vient $y - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}} = x\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$, ou $y = x\sqrt{\frac{n}{m}}$; & $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}} - y = x\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$ ou $y = a\sqrt{\frac{n}{m}} - x\sqrt{\frac{n}{m}}$. D'où il suit que si l'on acheve le rectangle *ABCO*, & qu'on tire les diagonales *BO*, *AC* ; ces deux lignes droites seront le lieu de tous les points cherchés *M* : car la diagonale *AC* est le lieu de la premiere équation $y = x\sqrt{\frac{n}{m}}$, & l'autre diagonale *BO* le lieu de la seconde $y = a\sqrt{\frac{n}{m}} - x\sqrt{\frac{n}{m}}$.

On prouvera de même que dans l'Ellipse, que les Hyperboles opposées qui sont le lieu cherché, doivent être décrites autour du rectangle donné *ABCO* ; & comme l'axe *FG*, parallele aux côtés *AB*, *OC*, doit être à son parametre en la raison donnée de *m* à *n*, il s'ensuit qu'on peut décrire, si l'on veut, ces Hyperboles par le moyen de l'article 176. (Liv. 4.) FIG. 193.

REMARQUE II.

357. SI le centre *E* de l'Hyperbole *BFC* tomboit sur le point *A*, & son axe *FG* sur la ligne *AP* ; je dis que cette Hyperbole couperoit à angles droits toutes celles qui ont pour Asymptotes les droites *AP*, *AO* ; ce qu'on peut énoncer ainsi. FIG. 193.

Soient une infinité d'Hyperboles de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites *AP*, *AO*, qui font entr'elles un angle droit ; & soit une Hyperbole ordinaire *FM* qui ait pour centre le point *A*, & dont le premier axe *FG* situé sur *AP*, soit à son parametre comme le nombre *m* exposant de la puissance de *AP* (x) est au nombre *n* exposant de la puissance de *PM* (y) dans l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime la nature des Hyperboles *MAM*. Je dis que l'Hyperbole *FM* coupe à angles droits toutes ces differentes Hyperboles. FIG. 195.

Ayant mené par le point M où elle coupe telle de ces Hyperboles qu'on voudra, une tangente MT à cette Hyperbole, & une perpendiculaire MS à cette tangente ; il s'agit de prouver que l'angle TMS sera droit. pour le faire, on tirera MP perpendiculaire sur l'Asymptote AP ; & ayant nommé les indéterminés AP, x ; PM, y ; & la donnée $FG, 2t$; on aura par la proprieté de l'Hyperbole FM cette proprotion $FP \times PG$ $(xx - tt)$. $\overline{PM}^2$ (yy) :: $m.n$, & partant $myy = nxx - ntt$. Or à

* Art. 237. cause des angles droits TPM, TMS, il vient TP* $(\frac{n}{m}x)$. PM (y) :: PM (y). $PS = \frac{myy}{nx}$. Et par consequent AS ou $AP - PS = \frac{nxx - myy}{nx} = \frac{tt}{x}$ en mettant pour myy la valeur qu'on vient de trouver $nxx - ntt$. D'où l'on voit que AS est troisiéme proportionnelle à AP, AF;

* Art. 121. & qu'ainsi * la ligne MS touche l'Hyperbole FM au point M. *Ce qu'il falloit démontrer.*

EXEMPLE VII.

FIG. 196. 358. La Parabole BAC étant donnée, on demande le lieu de tous les points M, tels qu'ayant mené de chacun de ces points, deux tangentes MB, MC, à cette Parabole ; l'angle BMC qu'elles comprennent soit toûjours égal à un angle donné.

Il peut arriver que l'angle donné BMC soit aigu, obtus, ou droit ; ce qui fait trois differens cas.

Premier cas. Lorsque l'angle donné BMC est aigu.

* Art. 160. Ayant mené * l'axe AD de la Parabole donnée BAC, qui rencontre les tangentes MB, MC, aux points F, G, on tirera sur cet axe des points touchans B, C, & du point de concours M, les perpendiculaires BD, CE, MP. Et ayant mené MN qui fasse sur l'axe AD l'angle FNM égal à l'angle FMG complement à deux droits de l'angle donne BMC, on nommera les inconnuës & indéterminées AP, x ; PM, y ; AF, s ; AG, t ;

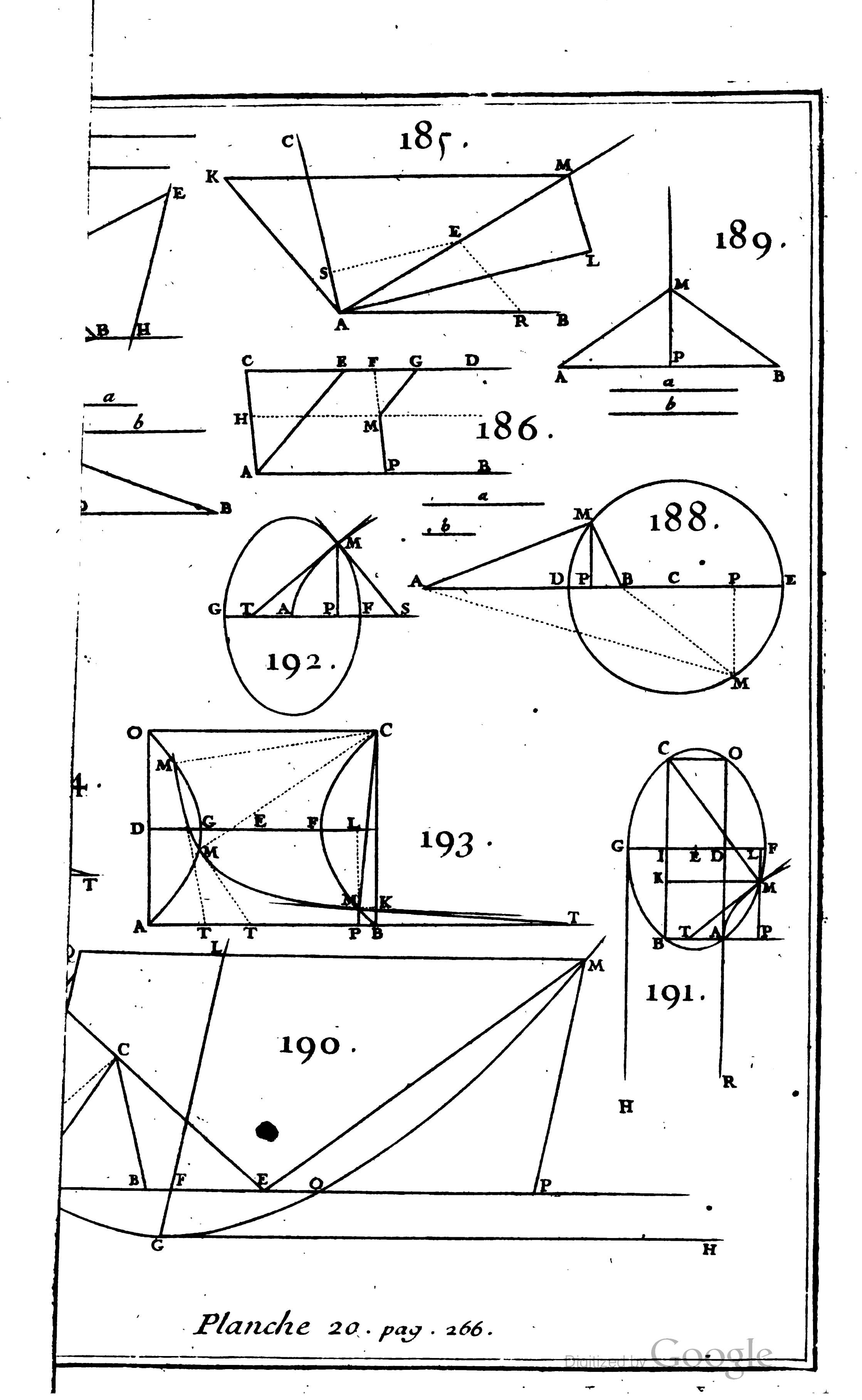


Planche 20. pag. 266.

& le parametre de l'axe AD, sçavoir, AV, a; lequel est donné, puisque la Parabole BAC est donnée. Cela posé; à cause du triangle rectangle FPM, on aura le quarré $\overline{FM}^2 = ss - 2sx + xx + yy$, lequel étant divisé par FG $(s - t)$ donnera $\frac{ss - 2sx + xx + yy}{s - t} = FN$, à cause des triangles semblables FMG, FMN; & partant PN ou $FP - FN = \frac{sx + tx - st - xx - yy}{s - t}$. Je cherche à present par le moyen de la Parabole donnée BAC des valeurs de $s + t$, st, & $s - t$ par rapport à x & y, afin qu'étant substituées, dans la valeur de PN, cette ligne ne renferme plus dans son expression d'autres inconnuës que x & y. Ce que je fais ainsi.

Les triangles semblables FPM, FDB; & GPM, GEC, donnent FP $(s - x)$ PM (y) :: FD* $(2s)$. BD* $(\sqrt{as})$. *Art. 22.
Et GP $(x - t)$. PM (y) :: GE $(2t)$. CE $(\sqrt{at})$. D'où je forme ces deux équations $ss - 2xs - \frac{4yy}{a}s + xx = 0$, & *Art. 7.
$tt - 2xt - \frac{4yy}{a}t + xx = 0$; c'est à dire (en faisant $p = 2x + \frac{4yy}{a}$ pour faciliter le calcul) $ss - ps + xx = 0$, & $tt - pt + xx = 0$. Je retranche la seconde équation de la premiere, & j'ai $ss - tt - ps + pt = 0$ qui étant divisée par $s - t$ donne $s + t = p$; & partant $s = p - t$, & $ss = ps - ts = ps - xx$ à cause de la premiere équation, d'où je tire $st = xx$. Si l'on ôte $4xx$ valeur de $4st$ de pp valeur de $ss + 2ts + tt$, on formera enfin cette égalité $ss - 2st + tt = pp - 4xx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, on aura $s - t = \sqrt{pp - 4xx} = \frac{4y\sqrt{ax + yy}}{a}$ en mettant pour p sa valeur $2x + \frac{4yy}{a}$.

Si l'on met à present à la place de $s + t$, st, & $s - t$, leurs valeurs $2x + \frac{4yy}{a}$, xx, & $\frac{4y\sqrt{ax + yy}}{a}$ dans $\frac{sx + tx - st - xx - yy}{s - t}$, on trouvera $PN = \frac{4xy - ay}{4\sqrt{ax + yy}}$. Or si

l'on prend sur l'axe la partie NQ égale au parametre AV (a), & qu'on tire QT parallele à PM, & qui rencontre en T la droite MN prolongée autant qu'il sera necessaire ; il est visible que la ligne QT sera donnée, puisque dans le triangle rectangle NQT, l'angle QNT qui est égal à l'angle donné BMC est donné, & que de plus le côté NQ qui est égal au parametre AV de l'axe de la Parabole, est aussi donné. Soit donc la donnée $QT = b$, & à cause des triangles semblables NPM, NQT, on aura cette proportion, $NP\left(\frac{4xy-ay}{4\sqrt{yy+ax}}\right)$. $PM(y) :: a.b$, & partant $4a\sqrt{yy+ax} = 4bx - ab$, c'est à dire en ôtant les incommensurables $yy - \frac{bb}{aa}xx + ax + \frac{bb}{2a}x - \frac{1}{16}bb = 0$, dont le lieu (qui est celui qu'on cherche) se construit * en cette sorte.

* Art. 330. & 332.

Soit prise sur l'axe AD de la Parabole, la partie $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$ du côté de PM ; & de part & d'autre du point H les parties HI, HK, égales chacune à $\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}$; & soit décrite du premier axe IK qui soit à son parametre KL comme aa est à bb, une Hyperbole KM. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver.

Car $HP = x - \frac{1}{4}a - \frac{a^3}{2bb}$, & par la proprieté de l'Hyperbole $\overline{HP}^2 - \overline{HK}^2$ $(xx - \frac{1}{2}ax - \frac{a^3}{bb}x + \frac{1}{16}aa)$. $\overline{PM}^2$ $(yy) :: IK.KL :: aa.bb$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, l'équation precedente.

Il est à propos de remarquer que dans ce cas FN sera toûjours moindre que FP ; puisque l'angle FNM, qu'on a pris égal au complement à deux droits de l'angle donné, est obtus. C'est pourquoi $\frac{4xy-ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ valeur de $FP - FN$ doit être positive ; & par consequent x doit toûjours surpasser $\frac{1}{4}a$. D'où l'on voit que quoiqu'il y ait

une portion de l'Hyperbole opposée à *KM* qui soit renfermée dans l'angle *PAV* fait par la ligne *AP* & par la droite *AV* menée parallelement à *PM* & du même côté, elle ne peut pas neanmoins faire partie du lieu des points *M*; parce que *AI* étant moindre que $\frac{1}{4}a$, l'indéterminée *AP* qui seroit alors moindre que *AI*, seroit à plus forte raison moindre que $\frac{1}{4}a$.

Second cas. Lorsque l'angle donné est obtus. En supposant que les points *M* tombent dans l'angle *PAV*, & par un raisonnement semblable à celui du premier cas, on trouvera la même équation; & par consequent la construction du lieu demeurera la même. Mais il faut observer dans ce second cas que *FN* sera plus grande que *FP*, & qu'ainsi la valeur $\frac{4xy-ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ de *FP* — *FN* deviendra negative; d'où il suit que x sera toûjous moindre que $\frac{1}{4}a$, & partant que le lieu cherché sera alors la portion de l'Hyperbole qui s'étend du même côté de la Parabole, laquelle se trouve renfermée dans cet angle *PAV*. Et comme en supposant que les points *M* tombent dans l'angle *DAV*, on trouve encore la même équation, il s'ensuit que cette Hyperbole entiere sera le lieu de tous les points cherchés *M*.

De-là il est évident que si une Hyperbole *KM* est le lieu de tous les points *M* lorsque l'angle donné *BMC* est aigu, son opposée sera le lieu de tous ces points lorsque l'angle donné sera égal au complement à deux droits de l'angle *BMC*, parce qu'alors les lignes données a & b qui déterminent la construction des Hyperboles demeurent les mêmes.

Troisiéme cas. Lorsque l'angle donné est droit. Il est clair que *FN* est alors égale à *FP*, & qu'ainsi la valeur $\frac{4xy+ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ de *FP* — *FN* sera nulle ou zero. D'où l'on voit * que si l'on prend sur l'axe *AD* prolongé vers son origine *A* la partie *AP* = $\frac{1}{4}a$, & qu'on lui mene la perpendiculaire indéfinie *PM*; cette ligne qui n'est autre

FIG. 196. 197.

* Art. 306.

que la directrice comme l'on peut voir dans les définitions de la Parabole, sera le lieu cherché.

COROLLAIRE.

FIG. 196. 197. 359. Si l'on mene le demi-second axe HO, & qu'on tire l'hypothenuse KO; les triangles rectangles KHO, NQT seront semblables : car puisque le second axe est moyen proportionnel entre le premier IK & son parametre KL, il s'ensuit que $\overline{KH}^2 . \overline{HO}^2 :: IK . KL :: aa . bb$, & qu'ainsi $KH . HO :: NQ (a) . QT (b)$. L'angle HKQ (qui selon la définition 11. du 3. Livre, est égal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes de l'Hyperbole KM) sera donc égal à l'angle QNT; c'est à dire, à l'angle donné BMC; & on aura $NQ (a) . QT (b) :: KH \left(\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}\right) . HO = \frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}$; & $NQ (a) . NT (\sqrt{aa+bb}) :: KH \left(\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}\right) . KO = \frac{a^3+abb}{2bb}$. Or si l'on pose l'hypothenuse KO du triangle rectangle KHO fait par les deux demi-axes HK, HO, sur le premier axe IK depuis le centre H, en R & S; il est clair * que ces deux points seront les deux foyers de l'Hyperbole KM & de son opposée; & que $RA = \frac{1}{4}a$, puisque $HR = \frac{a^3+abb}{2bb}$ & $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$. D'où l'on voit que le foyer R de l'Hyperbole KM est encore le foyer * de la Parabole BAC, & que $SR \left(\frac{a^3+abb}{bb}\right) . HO \left(\frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}\right) :: HO \left(\frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}\right) . AR \left(\frac{1}{4}a\right)$, puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Ce qui donne lieu à ce Theorême.

* Art. 74.

* Def. 3. 4. 5. I.

FIG. 196. Si sur la distance SR des foyers d'une Hyperbole KM, on prend du côté de S, la partie RA troisiéme proportionnelle à cette distance SR, & à la moitié HO de son second axe; & qu'ayant décrit * une Parabole BAC qui ait pour foyer le point R, & pour axe la li-

* Art. 4.

gne *AR* dont l'origine soit en *A*, on tire d'un point quelconque *M* de l'Hyperbole *KM* deux tangentes *MB*, *MC*, à cette Parabole : je dis que l'angle *BMC* qu'elles comprennent, sera toûjours égal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes ; & que si l'on prend le point *M* sur l'Hyperbole opposée, l'angle compris par les tangentes, sera toûjours égal au complement à deux droits de la moitié de l'angle fait par les Asymptotes.

EXEMPLE VIII.

360. UNE ligne droite indéfinie *BAP* étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes *A*, *D*, l'un sur cette ligne & l'autre au dehors ; on demande le lieu de tous les points *M*, dont la proprieté soit telle qu'ayant mené de chacun de ces points aux deux points fixes *A*, *D*, les droites *MA*, *MD* : la ligne *AM* soit toûjours égale à la partie *ME* de l'autre droite *DM*, prise entre le point *M* & le point *E* où elle rencontre la ligne *MP*. FIG. 198.

Du point donné *D* & du point *M* que l'on suppose être l'un des points cherchés, ayant mené les perpendiculaires *BD*, *MP*, sur la ligne *AP*, on nommera les données *AB*, $2a$; *BD*, $2b$; & les inconnuës & indéterminées *AP*, x ; *PM*, y : & on aura $AP = PE$; puisque (*hyp.*) $AM = ME$. Or les triangles semblables *EBD*, *EPM*, donnent *EB* ou $AE - AB$ $(2x - 2a)$. *BD* $(2b)$ :: *EP* (x). *PM* (y). En multipliant donc les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $xy - ay = bx$, qui renferme la condition marquée dans le Problême, & dont le lieu qui est * une Hyperbole équilatere entre les Asymptotes se construit ainsi. * Art. 337.

Soit tirée la ligne *AD* que l'on divisera par le milieu en *C*, par où l'on menera les droites *CF*, *CG*, l'une parallele & l'autre perpendiculaire à *AP* : soient décrites entre les Asymptotes *CF*, *CG*, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point *C*, par les points *D*, *A*, * * Art. 130. 131.

* Def. 16. III. les deux Hyperboles opposées DM, AM, qui sont* équilateres. Je dis qu'elles seront le lieu complet de tous les points cherchés M.

Car les Asymptotes CF, CG, divisent les droites AB, BD en deux parties égales aux points L, K, puisque AD est divisée par le milieu en C; & partant lorsque les points P tombent sur AB prolongée indefiniment du côté de B, comme l'on vient de supposer en faisant le calcul, la ligne PL ou $CH = x - a$, $HM = y - b$; & par la proprieté * de l'Hyperbole $CH \times HM$ ($xy - ay - bx + ab$) $= CK \times KD$ (ab) : ce qui donne $xy - ay = bx$.

* Art. 100.

Si l'on suppose à present que les points P tombent sur BA indéfiniment prolongée du côté de A, ou sur la partie déterminée AB; on trouvera toûjours (en observant de faire $AP = -x$, & $PM = -y$ lorsqu'ils tombent de l'autre coté du point A & de la ligne AP) la même équation $xy - ay = bx$, tant par la condition marquée dans le Problême que par la proprieté de l'Hyperbole AM ou DM. Donc &c.

COROLLAIRE.

361. DE-LA il est évident que les parties MR, MS des deux droites AM, DM, comprises entre le point M & l'une ou l'autre des Asymptotes, sont égales entr'elles. Car 1°. Lorsque l'Asymptote, comme CF, est parallele à la ligne AP, l'angle RSM est égal à l'angle AEM, & l'angle SRM à l'angle MAE. 2°. Lorsque l'Asymptote, comme CG, est perpendiculaire à AP, l'angle RSM sera le complement à un droit de l'angle AEM à cause du triangle rectangle SLE, & de même l'angle SRM ou son opposé au sommet ARL est le complement à un droit de l'angle EAM à cause du triangle rectangle RAL. Donc puisque les angles EAM, AEM, sont égaux, il s'ensuit que le triangle RMS sera isoscelle, & qu'ainsi les côtés MR, MS, seront égaux entr'eux.

entr'eux. Ce Corollaire nous fournit le Theorême suivant.

Si l'on mene d'un point quelconque *M* d'une Hyperbole équilatere, deux droites *MD*, *MA*, aux extremités d'un de ses premiers diametres *AD*, lesquelles rencontrent l'une ou l'autre Asymptote aux points *R*, *S*: je dis que les parti[illegible] *MR*, *MS*, de ces deux droites seront égales entr'elles.

EXEMPLE IX.

362. DEUX cercles *EGF*, *BNO*, dont les centres sont *C*, *A*, étant donnés, & ayant mené par un point quelconque *G* du cercle *EGF* une tangente indéfinie *GNO* qui coupe l'autre cercle *BNO* en deux points *N*, *O*, par lesquels soient tirées les tangentes *NM*, *OM*; on demande le lieu de tous les points de concours *M*. FIG. 199.

Ayant tiré *MP* perpendiculaire sur *CA*, qui passe par les centres *C*, *A*, des cercles donnés; on menera les droites *CG*, *AM*, qui seront paralleles, puisque l'une & l'autre est perpendiculaire sur la même droite *GO* qu'elles rencontrent aux points *G*, *Q*; & on nommera les données *AB* ou *AO*, *a*; *CE* ou *CF* ou *CG*, *b*; *CA*, *c*; & les inconnuës & indéterminées *AP*, *x*; *PM*, *y*. Cela fait, les triangles rectangles semblables *AOM*, *AQO*, donneront *AM* ($\sqrt{xx+yy}$). *AO* (a) :: *AO* (a). $AQ = \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}}$. Et menant *CH* parallele à *GO*, qui rencontre en *H*, *MA* prolongée, s'il est necessaire, on aura à cause des triangles rectangles semblables *MAP*, *CAH*, cette proportion: *PA* (x). *AM* ($\sqrt{xx+yy}$) :: *AH* ou *CG* — *AQ* ($b - \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}}$). *AC* ($c$), ce qui donne $b\sqrt{xx+yy} = aa + cx$, c'est à dire, en ôtant les incommensurables, l'équation $yy + \frac{bb-cc}{bb}xx - \frac{2aac}{bb}x - \frac{a^4}{bb} = 0$, dont le lieu est * une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole selon que *CE* (b) est égale, * Art. 345.

plus grande, ou moindre que CA (c). Voici la construction du dernier cas.

Soit prise sur la ligne AP la partie $AR = \frac{aac}{cc-bb}$ du côté opposé à PM; & de part & d'autre du point R les parties RI, RK, égales chacune à $\frac{aab}{cc-bb}$; & soit décrite du premier axe IK qui ait pour parametre $KL = \frac{2aa}{b}$ une Hyperbole. Je dis que sa portion indéfinie DM renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par la droite AD menée parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de cette équation.

Car par la proprieté de l'Hyperbole, $\overline{RP}^2 - \overline{RI}^2$ $\left(\frac{a^4 + 2aacx}{cc-bb} + xx\right)$ $\overline{PM}^2$ (yy) :: $IK\left(\frac{2aab}{cc-bb}\right)$. $KL\left(\frac{2aa}{b}\right)$; ce qui donne l'équation precedente.

Si l'on suppose à present que les points M tombent dans l'angle KAD qui est à côté de l'angle PAD, on trouvera encore (en faisant $AP = -x$) la même équation, d'où il suit que la portion déterminée ID de l'Hyperbole IM, avec la moitié entiere de l'Hyperbole qui lui est opposée sera le lieu de ces points, & qu'ainsi ces deux Hyperboles opposées composent le lieu complet de tous les points cherchés M: où l'on doit observer que la portion SIT renfermée dans le cercle BNO est inutile, puisqu'aucun des points de concours M des deux tangentes NM, OM, à ce cercle, ne peuvent tomber au dedans.

Il est à propos de remarquer que $RA\left(\frac{aac}{cc-bb}\right) = \sqrt{\overline{KK}^2 + \frac{1}{4} IK \times KL}$, comme l'on voit en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques; & qu'ain-
* Art. 74. si puisque le rectangle $IK \times KL$ vaut le quarré de la moitié du second axe, le point A sera * l'un des foyers de l'Hyperbole IM. Or puisque AI ou $AR - RI = \frac{aac - aab}{cc-bb} = \frac{aa}{c+b}$, & $AK = AR + RK = \frac{aac + aab}{cc-bb} = \frac{aa}{c-b}$, il s'ensuit qu'on peut abreger la construction

precedente en cette sorte.

Soient prises sur la ligne AC du côté de C, les parties AI, AK, troisiémes proportionnelles à AF $(c+b)$, AB (a), & à AE $(c-b)$, AB (a); & soient décrites du premier axe IK, & du foyer A * deux Hyperboles opposées. Il est évident qu'elles seront le lieu de tous les points cherchés M. * Art. 76.

Lorsque CE (b) est plus grande que CA (c), la construction de l'Ellipse qui est le lieu des points cherchés M, se fera de la même maniere que pour l'Hyperbole, en observant de prendre la partie AK de l'autre côté du point A par rapport au point C. Et enfin lorsque CE $(b) = CA$ (c), il n'y aura qu'à prendre sur la ligne AC du côté de C, la partie AI troisiéme proportionnelle à AF, AB, & décrire ensuite une Parabole qui ait pour foyer le point A, & pour axe la ligne IA dont l'origine soit en I. FIG. 200.

COROLLAIRE I. POUR L'ELLIPSE & LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

363. DE-LA il est évident que si de l'un des foyers A d'une Ellipse ou de deux Hyperboles opposées, dont le premier axe est IK, on décrit un cercle quelconque BNO; & qu'ayant pris sur cet axe les parties AE, AF, troisiémes proportionnelles à AK, AB, & à AI, & AB, (sçavoir AE du côté du point K, & AF du côté du point I) on décrive du diametre EF un cercle EGF: il est évident, dis-je, que si l'on tire d'un point quelconque M de la Section, deux tangentes MN, MO, au cercle BNO, la ligne ON qui joint les points touchans étant prolongée, s'il est necessaire, touchera toûjours l'autre cercle EGF. FIG. 199.

COROLLAIRE II. POUR LA PARABOLE.

364. IL suit encore de la resolution de ce Problême, que si du foyer A d'une Parabole IM dont l'axe IA a FIG. 200.

Mm ij

ſon origine en I, on décrit un cercle quelconque BNO; & qu'ayant pris ſur l'axe du côté de ſon origine, la partie AF troiſiéme proportionnelle à AI, AB, on décrive un cercle AGF du diametre AF; & qu'enfin l'on tire d'un point quelconque M de la Parabole deux tangentes MN, MO, au cercle BNO: la ligne NO qui joint les points touchans, étant prolongée, s'il eſt neceſſaire, touchera toûjours le cercle AGF en un point G.

EXEMPLE V.

FIG. 201. 202. 203. 365. UNE ligne droite indéfinie AP étant donnée ſur un plan, avec un point fixe F hors d'elle ; trouver le lieu de tous les points M, dont la proprieté ſoit telle qu'ayant mené de chacun de ces points une perpendiculaire MP ſur AP, & au point F une ligne droite MF; la raiſon de MP à MF ſoit toûjours la même, que celle de la donnée a à la donnée b.

Ayant mené du point donné F ſur la ligne AP la perpendiculaire FA, & du point M que l'on ſuppoſe être l'un des cherchés, une parallele MQ à AP, on nommera la donnée AF, c; & les inconnuës & indéterminees AP, x; PM, y; qui font entr'elles un angle droit APM. Cela poſé, le triangle rectangle MQF donne $\overline{MF}^2 = \overline{FQ}^2 (cc - 2cy + yy) + \overline{MQ}^2 (xx)$, & à cauſe de la condition marquee dans le Problême on aura $\overline{MP}^2 (yy) . \overline{MF}^2 (cc - 2cy + yy + xx) :: aa . bb$; d'où (en multipliant les moyens & les extrêmes) on tire cette équation $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = 0$, dont il s'agit maintenant de conſtruire le lieu. Pour en venir à bout, il faut diſtinguer trois differens cas ſelon que a eſt plus grand, moindre, ou égal à b.

Premier cas. En diviſant par $aa - bb$, on trouve cette équation $yy - \frac{2aac}{aa-bb}y + \frac{aa}{aa-bb}xx + \frac{aacc}{aa-bb} = 0$,

*Art. 324. dont le lieu eſt une Ellipſe * que l'on conſtruit en cette ſorte.

Soit prise sur AF du côté de F, la partie $AC = \frac{aac}{aa-bb}$; & ayant mené par le point C une parallele KH à AP, soient prises sur cette ligne de part & d'autre du point C, les parties CH, CK, égales chacune à $\sqrt{\frac{bbcc}{aa-bb}}$. Ensuite de l'axe KH qui soit à son parametre KL comme $aa-bb$ est à aa, soit décrite une Ellipse. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation precedente, & par conséquent de tous les points cherchés M. FIG. 201.

Car par la proprieté de l'Ellipse, $KE \times EH$ ou $\overline{CH}^2 - \overline{CE}^2 \left(\frac{bbcc}{aa-bb} - xx\right) . \overline{EM}^2 \left(\frac{a^4cc}{\overline{aa-bb}^2} - \frac{2aacy}{aa-bb} + yy\right) :: KH . KL :: aa-bb . aa$; ce qui, en multipliant les extrêmes & les moyens, rend la même équation que ci dessus.

Puisque $\overline{CH}^2 . \overline{CB}^2 :: KH . KL :: aa-bb . aa$, il s'ensuit que le demi-axe CB ou $CD = \frac{abc}{aa-bb}$; & qu'ainsi DF ou $DC+CF = \frac{abc+bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a-b}$, & FB ou $CB-CF = \frac{abc-bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a+b}$. Donc $DF \times FB = \frac{bbcc}{aa-bb} = \overline{CH}^2$; & partant le point F est * l'un des foyers de cette Ellipse qui a pour grand axe la ligne BD. Ces remarques nous fournissent une construction beaucoup plus simple que la precedente : La voici. * *Art.* 35.

Soient prises sur FA du côté de A la partie $FB = \frac{bc}{a+b}$, & du côté opposé la partie $FD = \frac{bc}{a-b}$. Ayant pris DG égal à BF du côté de F; soit décrite des foyers F, G, & de l'axe BD * une Ellipse; il est évident qu'elle satisfera à la question. * *Art.* 36.

Second cas. On aura dans ce cas $yy + \frac{2aac}{bb-aa}y - \frac{aa}{bb-aa}xx - \frac{aacc}{bb-aa} = 0$, parce que a est moindre que b. Le lieu de cette équation sera deux Hyperboles opposées, que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7). Après

avoir fait les mêmes remarques, que dans le cas precedent, on trouvera cette construction.

FIG. 202. Soient prises sur FA du côté du point A les parties $FB = \frac{bc}{b+a}$, $FD = \frac{bc}{b-a}$. Ayant pris DG égal à BF

* Art. 76. du côté opposé au point F, soient * décrites des foyers F, G, & du premier axe BD, deux Hyperboles opposées BM, DM. Elles seront le lieu de tous les points cherchés M.

Troisiéme cas. L'équation generale $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = 0$ se changeant en cette autre $xx - 2cy + cc = 0$, parce que $a = b$, son lieu est une Parabole

FIG. 203. qu'il est facile de construire selon l'article 310. (Liv. 7.) mais on voit tout d'un coup & sans avoir besoin d'aucun calcul, que si l'on décrit une Parabole qui ait pour directrice la ligne AP, & pour foyer le point F, selon qu'il est enseigné dans la définition premiere du premier Livre, elle sera le lieu requis.

COROLLAIRE I.

366. Il est clair dans le premier cas, que $CF\left(\frac{bbc}{aa-bb}\right)$. $CB\left(\frac{abc}{aa-bb}\right) :: CB\left(\frac{abc}{aa-bb}\right)$. $CA\left(\frac{aac}{aa-bb}\right) :: a.\ b$; & l'on trouve la même chose dans le second cas: ce qui donne lieu à ce Theorême.

FIG. 201. 202. Si dans une Ellipse ou deux Hyperboles opposées qui ont pour centre le point C, pour foyers les deux points F, G, & pour premier axe la ligne BD, on prend CA troisiéme proportionnelle à CF, CB, du côté du foyer F; & qu'on mene la droite indéfinie AP perpendiculaire sur BD: je dis que si d'un point quelconque M de la Section, l'on tire sur AP la perpendiculaire MP, & au foyer F la droite MF; la raison de MP à MF, sera toûjours la même que du premier axe BD à la distance FG des foyers.

Dans les Corollaires suivans cette ligne droite indéfinie AP s'appellera *Directrice* à l'égard de ces deux

Sections ; aussi-bien qu'à l'égard de la Parabole. D'où l'on voit qu'il est facile de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné *F*, pour directrice une ligne donnée de position *AP*, & qui passe par un point donné *M* : car tirant au foyer *F* la ligne *MF*, & sur la directrice *AP* la perpendiculaire *MP*, & nommant les données *MP*, *a* ; *MF*, *b* ; il n'y aura qu'à décrire le lieu des points *M* tels que *MP* soit toûjours à *MF* comme *a* est à *b*.

COROLLAIRE II.

367. Si l'on joint deux points quelconques *M*, *N*, d'une Section conique, par une ligne droite qui rencontre la directrice en *C* ; & que du foyer *F*, on tire les droites *FM*, *FN*, *FC* : je dis que la ligne *FC* coupe en deux parties égales l'angle *NFH* complement à deux droits de l'angle *NFM*, lorsque les points *M*, *N*, tombent sur une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole ; & l'angle *NFM*, lorsqu'ils tombent sur deux Hyperboles opposées. FIG. 204. 205.

Car tirant les perpendiculaires *MP*, *NQ*, sur la directrice, & la ligne *ND* parallele à *MF* ; les triangles semblables *MPC*, *NQC*, & *MFC*, *NDC*, donnent *MP*. *NQ* :: *MC*. *NC* :: *MF*. *ND*. Et partant *MP*. *MF* :: *NQ*. *ND*. Or par la proprieté de la Section conique qui a pour directrice la ligne *PQ*, & pour foyer le point *F*, on aura *MP*. *MF* :: *NQ*. *NF*. Les lignes *ND*, *NF*, seront donc égales entr'elles ; c'est pourquoi dans le premier cas l'angle *NDF* ou *CFH* sera égal à l'angle *CFN*, & dans le second l'angle *FDN* ou *CFM* sera égal à l'angle *CFN*. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE III.

368. De-là on voit comment on peut décrire une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole qui passe par trois FIG. 204.

points donnés *M*, *N*, *O*, & qui ait pour foyer le point donné *F*.

Soient menées par le foyer *F*, les droites *FC*, *FE*, qui divisent par le milieu les angles *NFH*, *NFK*, complemens à deux droits des angles donnés *MFN*, *OFN*; & par les points *C*, *E*, où elles rencontrent les lignes *MN*, *ON*, qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indefinie *CE*. Soit décrite une Section conique qui ait pour directrice la ligne *CE*, pour foyer le point *F*, & qui passe par le point *M*: il est clair selon le Corollaire precedent qu'elle passera aussi par les deux autres points *N*, *O*.

COROLLAIRE IV.

FIG. 205. 369. On tire encore du Corollaire second une maniere de décrire deux Hyperboles opposées qui ayent pour foyer le point *F*; & dont l'une d'elles passe par deux points donnés *M*, *O*, & l'autre par un point donné *N*.

Soit menée par le point *F* la ligne *FE* qui divise par le milieu l'angle *HFO* complement à deux droits de l'angle *MFO* formé par les droites *FM*, *FO*, tirées du point *F* aux deux points *M*, *O*, qui doivent se trouver dans la même Hyperbole; & soit encore menée par le même point *F* la ligne *FC*, qui divise en deux parties égales l'angle *MFN* formé par les droites *FM*, *FN*, tirées du point *F* aux deux points *M*, *N*, qui doivent tomber sur les deux Hyperboles opposées. Par les points *E*, *C*, où les lignes *FE*, *FC*, rencontrent les droites *MO*, *MN*, qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indefinie *EC*. Soient enfin décrites deux Hyperboles opposées, qui ayent pour foyer le point *F*, pour directrice la ligne *EC*, & dont l'une d'elles passe par le point *M*: il est évident qu'elles satisfont à la question.

COROL. V.

COROLLAIRE. V.

370. LES mêmes choses étant posées que dans le Corollaire second ; il est visible que l'angle *MFN* difference de l'angle *CFM* & de son complement à deux droits *CFH* ou *CFN*, diminuë à mesure que le point *N* approche du point *M* ; de sorte qu'il s'évanoüit tout-à-fait, lorsque le point *N* tombe sur le point *M*. L'angle *CFM* sera donc égal alors à son complement à deux droits, & par consequent il sera droit. Or comme la ligne *MN* devient alors la tangente *MT*, puisqu'elle passe * par deux points infiniment proches de la courbe ; on voit naître une maniere generale & toute nouvelle de mener d'un point donné *M* sur une Section conique, une tangente *MT*, un foyer *F* avec l'axe qui passe par ce foyer étant donnés. FIG. 204. * Art. 188.

Car ayant trouvé la directrice comme il est enseigné dans le Corollaire second, on menera du point donné *M* au foyer *F* la droite *MF*, sur laquelle on tirera la perpendiculaire *FT* qui rencontre la directrice en *T*, par où & par le point donné *M* on tirera la tangente cherchée *MT*.

EXEMPLE XI.

371. DEUX angles *KAM*, *KBM*, mobiles autour des points fixes *A*, *B*, étant donnés sur un plan, avec une ligne droite indéfinie *FK* qui ne passe par aucun de ces points ; soit imaginé le point de concours *K* des deux côtés *AK*, *BK*, se mouvoir le long de la droite *FK*, & soit proposé de trouver la nature de la ligne courbe que décrit dans ce mouvement le concours *M* des deux autres côtés *AM*, *BM*, prolongés lorsqu'il est necessaire de l'autre côté des points *A*, *B*. FIG. 206.

Sur *AB*, comme corde, je décris de l'autre côté du point *M*, un arc de cercle capable d'un angle *BDA* qui vaille quatre droits moins les deux angles donnés *KAM*, *KBM* ; & ayant achevé le cercle entier dont

cet arc fait partie, il peut arriver que la droite indéfinie FK tombe toute entiere au dehors de ce cercle, ou qu'elle passe au dedans, ou enfin qu'elle le touche ce qui fait trois differens cas que j'explique en particulier.

Premier cas. Du centre C du cercle $BDAE$ je mene sur FK, la perpendiculaire CF qui le rencontre aux points D, E; & je fais passer par le point D (plus proche de la ligne FK que l'autre point E) les deux côtés DA, DB, des deux angles DAP, DBQ, égaux aux angles KAM, KBM, lesquels côtés étant prolongés vers D rencontrent la ligne FK, aux points G, H. Or par la construction l'angle BDA plus les deux angles DAP, DBQ, vaut quatre droits; & comme le même angle BDA plus les deux angles DAB, DBA, vaut deux droits; il s'ensuit que les angles BAP, + BAQ, valent deux droits, & qu'ainsi les lignes AP, BQ, sont paralleles entr'elles. Cela posé.

Soit mené du point K sur les deux côtés AD, BD, les perpendiculaires KR, KS; & des points A, M, sur les deux autres côtés BQ, AP, les perpendiculaires AI, MP, qui rencontrent BQ, aux points I, Q. Soient les données $FE = a$, $FD = b$, $BI = c$, $AI = d$, $FG = g$, $FH = h$, $DG = m$, $DH = n$; & les inconnuës $FK = z$, $AP = x$, $PM = y$; & à cause des triangles rectangles semblables, GDF, GKR, on aura ces deux proportions: $GD(m).GF(g)::GK(z-g).GR = \frac{gz-gg}{m}$. Et $GD(m).DF(b)::GK(z-g).KR = \frac{bz-bg}{m}$. Or les triangles rectangles semblables GDF, EDA, donnent aussi $GD(m).DF(b)::ED(a-b).AD = \frac{ab-bb}{m}$, & partant $AD+DG$ ou $AG = \frac{ab-bb+mm}{m}$, & $AG+GR$ ou $AR = \frac{ab-bb+mm+gz-gg}{m} = \frac{ab+gz}{m}$; parce que $mm = bb + gg$ à cause du triangle rectangle DFG. Mais les triangles rectangles ARK, APM sont semblables

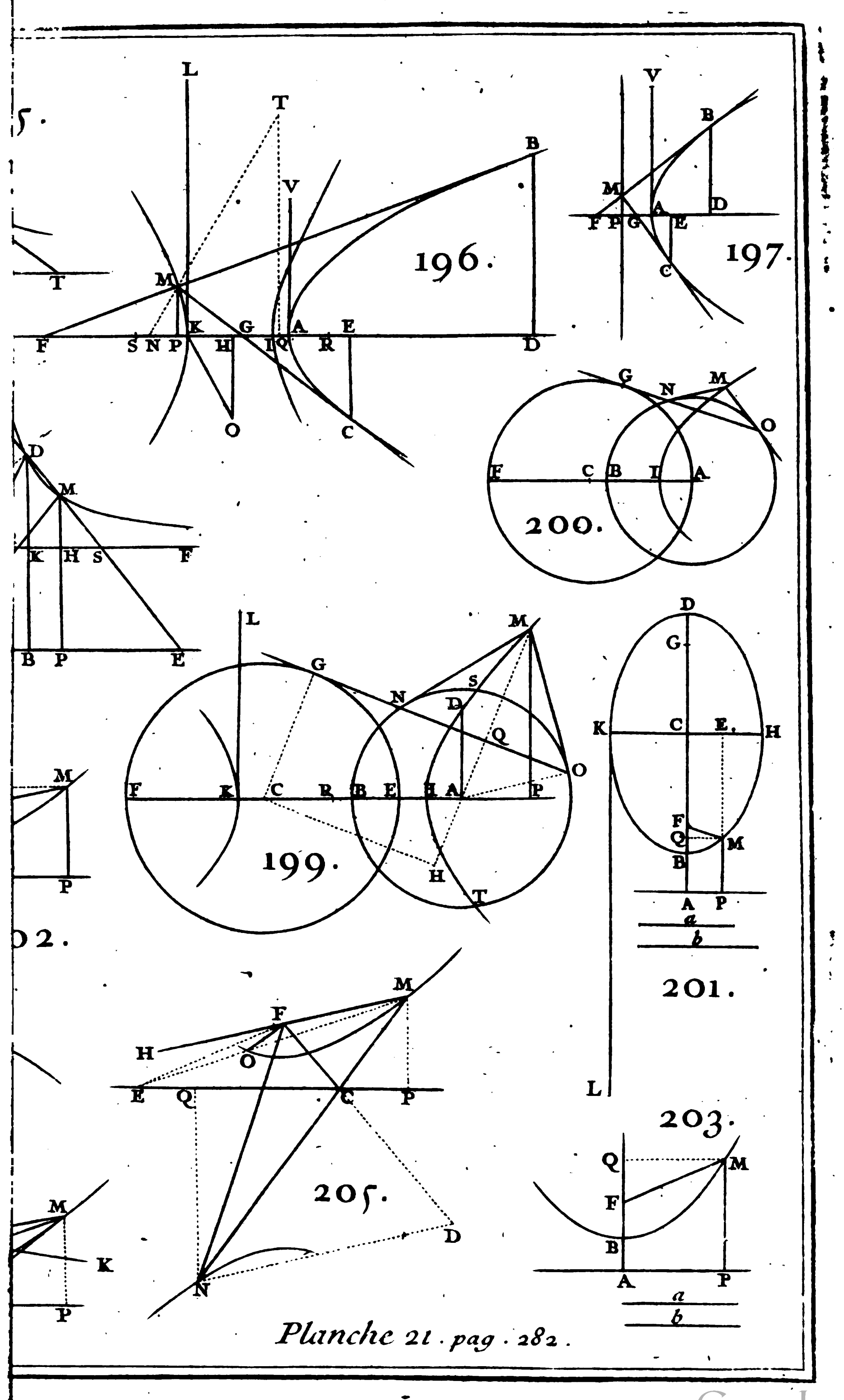


Planche 21 . pag . 282 .

car retranchant des angles égaux KAM, DAP le même angle KAP, les restes KAR, PAM, seront égaux ; & par conséquent $AR\ (\frac{ab+gz}{m})$. $RK\ (\frac{bz-bg}{m})$ :: $AP\ (x)$. $PM\ (y)$, d'où l'on tire $z = \frac{aby+bgx}{bx-gy}$.

Maintenant les triangles rectangles semblables HDF, HKS donnent $HS = \frac{bz+bb}{n}$, $KS = \frac{bz+bb}{n}$; & les triangles rectangles semblables HFD, EBD, donnent $DH\ (n)$. $DF\ (b)$ :: $DE\ (a-b)$. $DB = \frac{ab-bb}{n}$. Et partant $BD+DH$ ou $BH = \frac{ab-bb+nn}{n}$, & $BH-HS$ ou $BS = \frac{ab-bb+nn-bz-bb}{n} = \frac{ab-bz}{n}$, parce que $nn = bb + bb$ à cause du triangle rectangle DFH. Or les triangles rectangles BSK, BQM, sont semblables ; car retranchant des angles égaux DBQ, KBM, le même angle DBM, les restes KBS, MBQ, seront égaux ; & par conséquent $BS\ (\frac{ab-bz}{n})$. $SK\ (\frac{bz+bb}{n})$ :: $BQ\ (x-c)$. $QM\ (y+d)$. D'où l'on tire $z = \frac{aby-bbx+bcb+abd}{bx+by-bc+bd}$.

Comparant cette derniere valeur de z avec la precedente, multipliant en croix, en faisant pour abreger $GH\ (g+b) = f$, on arrive enfin en divisant par abf à cette équation.

$$yy + dy + \frac{b}{a}xx - \frac{bc}{a}x = 0.$$
$$\qquad -\frac{bc}{f} \qquad\qquad -\frac{bd}{f}$$
$$\qquad +\frac{cgb}{af} \qquad\qquad +\frac{dgb}{af}$$

dont le lieu que l'on pourra construire selon l'article 324. (Liv. 7.) sera une Ellipse, parce que le terme $\frac{b}{a}xx$ sera toûjours precedé dans ce premier cas du signe $+$, en quelque situation que se puissent trouver les points A, B, K.

Second cas. Après avoir nommé les lignes par les FIG. 207.

mêmes lettres que dans le premier cas, & fait les mêmes raisonnemens ; on arrivera à cette équation.

$$yy + dy - \frac{b}{a}xx + \frac{bc}{a}x = 0$$
$$- \frac{bc}{f} \qquad - \frac{bd}{f}$$
$$- \frac{cgb}{af} \qquad - \frac{dgb}{af}$$

qui ne differe de la precedente que dans quelques signes, & dont le lieu que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv.7.) sera toûjours deux Hyperboles opposées, parce que le terme $\frac{b}{a}xx$ sera toûjours precedé du signe — dans ce second cas.

Comme le plan xy ne se rencontre point dans les deux équations precedentes, & que l'angle *APM* est droit ; on connoît d'abord que l'un des axes de l'Ellipse dans le premier cas, & des Hyperboles opposées dans le second doit être parallele aux lignes *AP*, *BQ* ; & qu'il a avec son parametre la même raison que *EF* (a) à *FD* (b), parce que la fraction $\frac{b}{a}$ qui multiplie le quarré xx exprime ce rapport.

Lorsque le point *K* en parcourant la ligne indéfinie *KF* arrive au point *O* où cette ligne rencontre la circonference, il est clair que les côtés *AM*, *BM*, qui décrivent par leur point de concours *M* l'Hyperbole *BAM* deviennent paralleles entr'eux ; qu'ils se coupent vers le côté opposé, pendant que le point *K* parcourt la partie *OL* de la ligne *KF* renfermée dans la circonference ; qu'ils deviennent encore paralleles, lorsque le point *K* tombe en *L*, après quoi ils se rencontrent de nouveau vers le même côté. D'où l'on voit que le point *M* décrit l'Hyperbole *BAM*, pendant que le point *K* parcourt les deux parties indéfinies de la droite *KF* qui tombent de part & d'autre de la circonference ; & qu'il décrit son opposée, pendant que le point *K* parcourt la partie *OL* renfermée dans la circonference.

FIG. 208. *Troisiéme cas.* Comme dans ce troisiéme cas la droite

indéfinie FK touche la circonference du cercle $BDAE$ en quelque point F, il est clair que le point D des deux autres cas se confond ici avec le point F, & qu'ainsi les triangles DFG, DFH, s'évanoüissent : c'est pourquoi on se servira en leur place des triangles DAE, DBE, de la maniere qui suit.

Soient les données $AE = a$, $EB = b$, $EF = m$, $AF = g$, $BF = h$, $BI = c$, $AI = d$; & les inconnuës $FK = z$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles rectangles FKR, EFA sont semblables; car l'angle KFR ou son opposé au sommet TFA fait par la tangente FT & la corde FA, a pour mesure la moitié de l'arc AF; de même que l'angle FEA : Et partant $FE(m). EA(a) :: KF(z). FR = \frac{az}{m}$. Et $EF(m). FA(g) :: FK(z). KR = \frac{gz}{m}$. Or les triangles rectangles semblables ARK, APM, donnent AR ou $AF + FR\left(\frac{az+gm}{m}\right). RK\left(\frac{gz}{m}\right) :: AP(x). PM(y)$; d'où l'on tire $z = \frac{gmy}{gx-ay}$. On trouvera de même, à cause des triangles rectangles semblables EFB, FKS, que $FS = \frac{bz}{m}$, & $KS = \frac{hz}{m}$; & à cause des triangles rectangles semblables BSK, BQM, que BS ou $BF - FS\left(\frac{hm-bz}{m}\right). SK\left(\frac{hz}{m}\right) :: BQ(x-c). QM(y+d)$; ce qui donne $z = \frac{hmy+hmd}{hx-ch+bd+by}$.

Comparant ces deux valeurs de z, multipliant en croix, & mettant par ordre les termes, on trouve cette équation $yy + dy - \frac{cgh}{ah+bg}y - \frac{dgh}{ah+bg}x = 0$, dont le lieu sera toûjours une Parabole que l'on peut construire selon l'article 310. (Liv. 7.) & qui aura son axe parallele aux droites AP, BQ.

Il est donc évident 1°. Que le lieu de tous les points cherchés M sera toûjours une Section conique, dont l'axe ou l'un des axes sera parallele aux lignes AP, BQ; & en

particulier qu'il sera une Ellipse dans le premier cas, deux Hyperboles opposées dans le second, & une Parabole dans le troisiéme; & que dans le premier & le second cas, l'axe qui est parallele à *AP*, aura avec son parametre, la même raison que *EF* à *FD*. 2°. Que dans le premier & le troisié. cas les deux points fixes *A*, *B*, autour desquels tournent les angles mobiles *KAM*, *KBM* tomberont toûjours du même côté de la ligne *FK*, au lieu que dans le second ils peuvent tomber non seulement du même côté de cette ligne, mais encore de part & d'autre; parce que la circonference du cercle *ADBE* sur laquelle ils sont situés, est coupée alors en deux portions par la ligne *FK*.

REMARQUE I.

FIG. 206. 207. 208. 372. 1°. UNE ligne quelconque qui passe par l'un des points fixes *A* ou *B*, comme *AM*, étant donnée, on pourra toûjours trouver sur cette ligne le point *M* où elle rencontre la Section qui est le lieu requis, en cette sorte. Ayant mené la droite *AK* qui fasse avec *AM* l'angle *MAK* égal à l'angle donné qui doit tourner autour du point fixe *A*, on menera du point *K* où elle rencontre la droite *FK*, par le point fixe *B*, l'angle *KBM* égal à l'autre angle donné, qui doit tourner autour de l'autre point fixe *B*; & le point *M* où le côté *BM* de cet angle rencontre la ligne *AM*, sera celui qu'on cherche. 2°. Lorsque le point *K* en parcourant la ligne *FK*, se trouve tellement situé que le côté *AM* de l'angle *KAM* tombe sur la ligne *AB*; il est visible que le point de concours *M* des deux côtés *AM*, *BM*, tombe alors sur le point *B*, & qu'ainsi le lieu des points *M* passe par le point fixe *B*; on prouvera de même qu'il passe par le point *A*.

FIG. 206. De-là on voit que pour décrire la Section conique qui est le lieu des points cherchés *M*, sans avoir besoin des équations precedentes, il n'y a qu'à mener comme dans l'exemple les droites *AP*, *AI*; sur lesquelles ayant

trouvé, selon cette remarque, les points où elles rencontrent la Section, & achevé le rectangle qui a pour côtés ces deux lignes, il n'y aura qu'à décrire * autour de ce rectangle, l'Ellipse ou les deux Hyperboles opposées (selon que *FK* tombe au dehors ou au dedans du cercle), dont l'axe qui est parallele à *AP* soit à son conjugué, comme le quarré de *EF* est au quarré de *DF*. Si la Section est une Parabole (ce qui arrive lorsque la ligne *KF* touche le cercle *BDA*); on trouvera sur la ligne *AI* le point où elle rencontre la Section, & on décrira selon l'article 170. (Liv. 4.) une Parabole qui passe par ce point, & par les deux autres donnés *A*, *B*; & dont les diametres soient paralleles aux lignes *AP*, *BQ*.

* Art. 176. & 178.

Fig. 208.

REMARQUE II.

373 LORSQUE le point *K* en parcourant la ligne *FK* est tellement situé que le côté *AM* de l'angle *KAM* tombe sur *AB*, il est clair non-seulement que le point *M* tombe en *B*; mais aussi que le côté *BM* de l'angle *KBM* devient tangente * en *B* de la ligne courbe qui est le lieu du point *M*, puisque le point *M* peut être regardé alors comme étant infiniment près du point *B*. D'où il suit que pour mener une tangente de ce lieu en *B*, il n'y a qu'à mener par le point *A* une ligne droite *AC* qui fasse avec *BA* un angle *BAC* égal à l'angle donné *KAM*, & tirer ensuite une ligne *BD*, qui fasse avec *BC* l'angle *CBD* égal à l'autre angle donné *KBM*; car le côté *BM* de cet angle, qui devient *BD*, touchera la Section en *B*. Il en est de même de l'autre point fixe *A*.

Fig. 209.

* Art. 188.

De-là on tire encore une maniere très-facile de décrire la Section conique qui est le lieu de tous les points *M* sans avoir besoin des équations precedentes, ni même d'aucun calcul. Ayant mené par le point fixe *B* une tangente *BD*, & par l'autre point fixe *A* une parallele *AE* à cette tangente, on trouvera * sur cette ligne le point *E* où elle rencontre la Section, & l'ayant divisée par le milieu en *H* on tirera *BH*, sur laquelle on cherchera *

Fig. 209.

* Art. 372.

* Art. 372.

aussi le point G où elle rencontre la Section. Cela fait, on décrira * du diametre BG & de l'ordonnée HA ou HE, une Section conique, qui sera celle qu'on demande. Car il est visible que la ligne BG qui divise par le milieu en H la ligne AE terminée par la Section & parallele à la tangente en B, en sera un diametre qui aura pour ordonnée la ligne AH. Où l'on doit remarquer que lorsque le point H tombe entre les points B, G, la Section est une Ellipse ; que lorsqu'il tombe de part ou d'autre de ces deux points, ce sont deux Hyperboles opposées ; & qu'enfin lorsque la ligne BG est infinie, la Section est une Parabole.

* Art. 162. 161.

COROLLAIRE I.

FIG. 210. 374. CET exemple nous fournit le moyen de faire passer par quatre points donnés A, B, H, M, une Section conique d'une espece déterminée.

Car 1°. Soit la Section conique une Ellipse ; dont le grand axe soit à son parametre, en la raison donnée de a à b. Je forme le triangle ABH, en joignant trois des points donnés par des lignes droites ; & du quatriéme point M, je fais passer par les points A, B, les angles MAK, MBK, égaux aux angles GAH, RBA, complements à deux droits des angles HAB, HBA. Je décris sur AB comme corde de l'autre côté du point M un arc de cercle BDA capable d'un angle qui vaille quatre droits moins les deux angles KAM, KBM ; & du centre C de cet arc, je décris un autre cercle dont le rayon CF soit au rayon CD du premier, comme $a+b$ est à $a-b$; & du point de concours K des deux côtés AK, BK, des angles MAK, MBK, je tire une tangente KF à ce dernier cercle. Maintenant je dis que si l'on fait mouvoir le point K le long de la droite indéfinie FK ; le point de concours M des deux autres côtés AM, BM, prolongés lorsqu'il sera necessaire de l'autre côté des points A, B, décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on demande. Car il est évident selon

ce

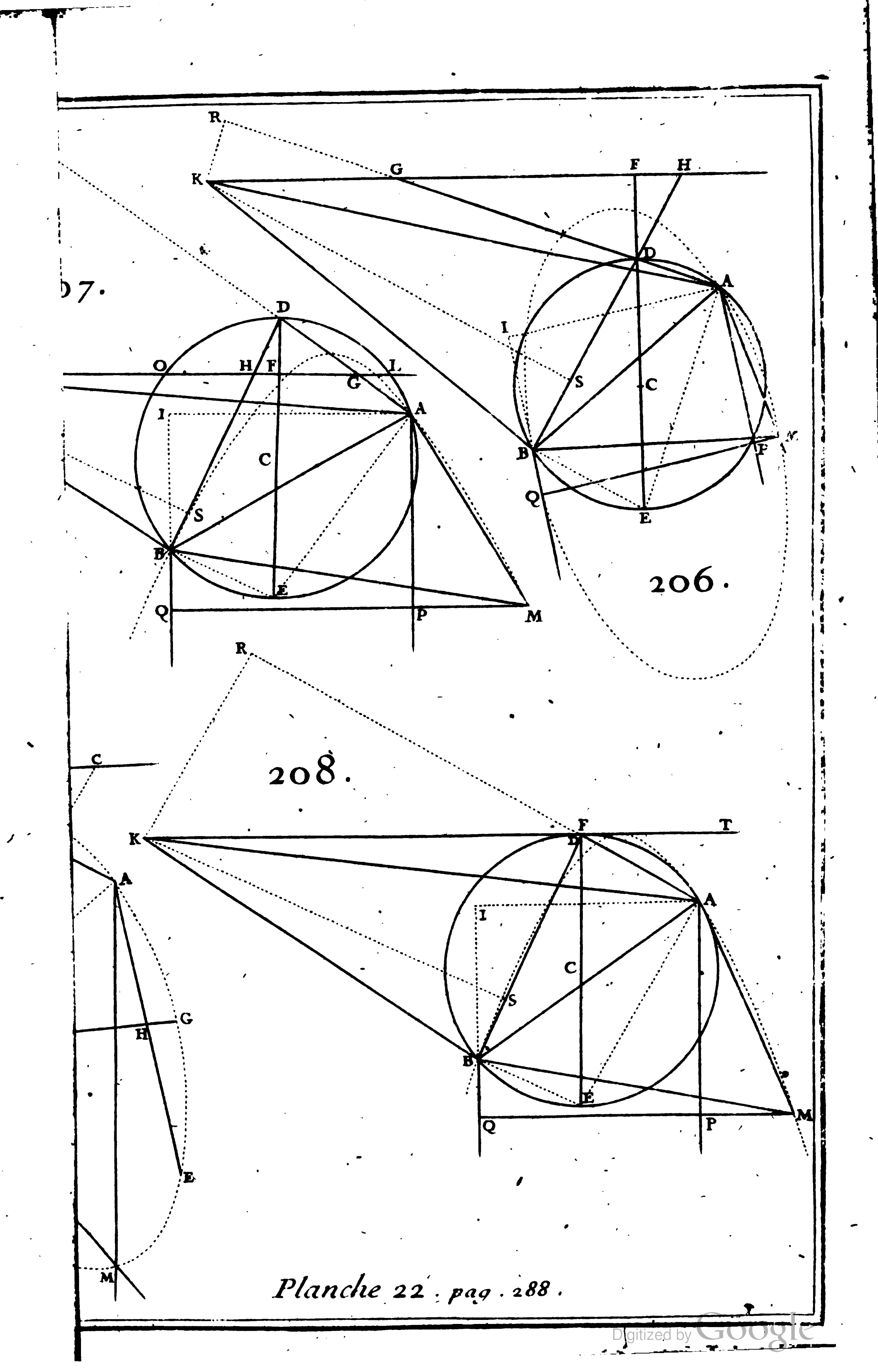


Planche 22. pag. 288.

ce qu'on a dit dans le premier cas de l'exemple, que le lieu des points M sera une Ellipse, dont le grand axe sera à son parametre comme EF (a) à DF (b); & de plus qu'elle passera par les points A, M, B, H, puisque le point K étant en G, le côté AM tombera sur AH, & le côté BM sur BR.

2°. Lorsque c'est une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées qu'il est question de décrire par quatre points donnés A, B, H, M, & dont le grand axe soit à son parametre en la raison donnée de a à b; la construction demeure la même, excepté que le rayon CF du cercle concentrique au cercle $BDAE$, doit être au rayon CD, comme $a - b$ est à $a + b$.

3°. Lorsqu'il s'agit de décrire une Parabole par quatre points donnés A, B, H, M. Ayant decrit comme dans le premier cas le cercle $BDAE$, on menera du point de concours K une tangente à ce cercle, qui sera la droite indéfinie sur laquelle faisant mouvoir le point K, l'autre point de concours M décrira la Parabole qu'on demande.

Comme l'on peut mener d'un même point deux tangentes à un cercle, il s'ensuit qu'on peut décrire deux differentes Sections coniques qui satisfont également lorsque le Problême est possible; car lorsque le point K tombe au dedans du cercle qui a pour rayon CF, il est visible que le Problême est impossible.

On pourra décrire la Section conique par le moyen de ses axes en se servant de l'article 372. ou par le moyen d'un de ses diametres & d'une ordonnée à ce diametre, en se servant de l'article 373.

COROLLAIRE II.

375. ON tire encore de cet exemple, une nouvelle maniere de décrire une Section conique qui passe par cinq points donnés A, B, H, M, N. Car ayant joint trois quelconques de ces points A, B, H, par des FIG. 212.

lignes droites, on fera passer par les autres points *M*, *N*, & par les deux points fixes *A*, *B*, les angles *MAK*, *NAS*, égaux chacun à l'angle *HAG* complement à deux droits de l'angle *HAB*, & les angles *MBK*, *NBS* égaux chacun à l'angle *ABR* complement à deux droits de l'angle *ABH*; & on tirera par les points de concours *K*, *S*, une ligne droite indéfinie *S*, *K*, sur laquelle faisant mouvoir le point *K*, il est clair que le point de concours *M* decrira dans ce mouvement la Section conique qu'on demande; puisqu'elle passera par les cinq points donnés *A*, *B*, *H*, *M*, *N*.



LIVRE NEUVIÉME.

De la construction des Egalités.

PROPOSITION I.

Problême.

376. CONSTRUIRE *toute égalité donnée, dans laquelle l'inconnuë ne se trouve qu'au premier degré.*

Soit en premier lieu l'inconnuë x égale à une ou à plusieurs fractions simples, telles que $\frac{ab}{c}$, ou $\frac{abe}{cf}$, ou $\frac{abeh}{cfg}$ &c. Ayant fait $c.b :: a.l$, il est clair que cette quatriéme proportionnelle $l = \frac{ab}{c}$; & si l'on fait $f.l :: e.m$, l'on aura $m = \frac{el}{f} = \frac{abe}{cf}$; & faisant enfin $g.m :: h.n$, il vient $n = \frac{mh}{g} = \frac{abeh}{cfg}$ en mettant pour m sa valeur $\frac{abe}{cf}$. De sorte qu'on aura l'inconnuë x égale à l, ou à m, ou à n, &c. selon que x sera égale à $\frac{ab}{c}$, ou à $\frac{abe}{cf}$, ou à $\frac{abeh}{cfg}$ &c. Or il est visible qu'en augmentant le nombre des proportions, autant qu'il sera necessaire, on trouvera toûjours une ligne droite égale à une fraction simple donnée, tel que puisse être le nombre des dimensions de son numerateur. D'où l'on voit que l'on pourra toûjours trouver une ligne x égale à une quantité composée de plusieurs fractions simples; car ayant trouvé en particulier des lignes droites égales à chacune de ces fractions, il n'y aura qu'à les ajoûter, ou retrancher selon qu'il sera marqué par les signes $+$ & $-$. Qu'il faille, par exemple, trouver une ligne $x = a + \frac{ab}{c} + \frac{aab}{cf} - \frac{aacf}{b^3}$, on ajoûtera les deux lignes $h = \frac{ab}{c}$ & $l = \frac{aab}{cf}$ à la ligne a pour en composer une seule, de laquelle ayant retran-

vouez ... J. P. Reyneau 1708 tom 2 ...

+ a une fraction simple, par exemple telle que $\frac{ab}{c}$ &c.

ché la ligne $m = \frac{aacc}{b^3}$, le reste sera la valeur cherchée de l'inconnuë x, c'est à dire qu'on aura $x = a + b + l - m$.

Soit en second lieu l'inconnuë x égale à une ou à plusieurs fractions composées, c'est à dire, dont les denominateurs ayent plusieurs termes. On cherchera d'abord, comme l'on vient d'enseigner ci-dessus, une ligne égale au dénominateur divisé par une ligne arbitraire, lorsque chacun de ses termes n'a que deux dimensions, par un plan lorsqu'ils en ont trois, par un solide lorsqu'ils en ont quatre, &c ; ce qui reünira tous les termes du dénominateur en un seul, lequel étant substituë en leur place, changera la fraction composée en une ou en plusieurs simples selon que le numerateur est composé d'un ou de plusieurs termes ; & ayant trouvé comme ci-dessus une ligne qui leur soit égale, elle sera celle qu'on cherche. Ceci s'éclaircira par les exemples qui suivent.

On demande une ligne $x = \frac{age - bce}{bb + af}$, je cherche d'abord une ligne $m = f + \frac{bb}{a}$, c'est à dire égale au dénominateur $af + bb$ divisé par la ligne a ; ce qui donne $bb + af = am$, & ayant trouvé ensuite une ligne $n = \frac{age - bce}{am} = \frac{ge}{m} - \frac{bce}{am}$; il est clair que la ligne cherchée $x = n$. De même si l'on demandoit une ligne $x = \frac{a^3b + aacc - abcf}{aaf + ccf + bff}$, on trouveroit une ligne $m = a + \frac{cc}{a} + \frac{bf}{a}$, c'est à dire égale au dénominateur $aaf + ccf + bff$ divisé par le plan af ; ce qui donne $afm = aaf + ccf + bff$, & ensuite une autre ligne $= \frac{a^3b + aacc - abcf}{afm} = \frac{aab}{fm} + \frac{acc}{fm} - \frac{bc}{m} = x$. Il en est ainsi de tous les autres exemples que chacun se peut former à plaisir.

Il est inutile d'avertir que si l'on demandoit une ligne x égale à une ou à plusieurs fractions tant simples que

composées ; il faudroit chercher en particulier des lignes égales à chacune de ces fractions, pour les ajoûter ensuite ou les retrancher les unes des autres, selon que les signes $+$ ou $-$ le feroient connoître.

COROLLAIRE I.

377. IL est facile par le moyen de cette Proposition de trouver 1°. Une fraction simple $\frac{x}{a}$ ou $\frac{a}{x}$, dont le dénominateur ou le numerateur a soit donné, égale à une ou à plusieurs fractions simples ou composées ; car il n'y aura qu'à trouver une ligne x égale à la ligne a multipliée ou divisée par ces fractions. Qu'il faille trouver par exemple, une fraction $\frac{x}{a} = \frac{cc+ff}{af+cf} + \frac{aa}{gg}$, il est visible qu'il n'y aura qu'à trouver une ligne $x = \frac{acc+aff}{af+cf} + \frac{a^3}{gg}$. 2°. Un plan ax, dont l'un des côtés a est donné, égal à un ou à plusieurs plans si composé qu'ils puissent être ; car il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces plans divisés par a. 3°. Un solide aax ou abx, dont deux des côtés a, a, ou a, b, sont donnés, égal à plusieurs solides ; puisqu'il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces solides divisés par le quarré aa ou par le plan ab. 4°. Un sursolide a^3x ou $abcx$ dont trois côtés a, a, a, ou a, b, c, sont donnés, égal à plusieurs sursolides ; puisqu'il ne faut encore pour cela que trouver une ligne x egale à tous ces sursolides divisés par le cube a^3 ou par le solide abc. Et il en est de même de plusieurs produits de cinq dimensions, de six &c. que l'on peut toûjours reduire en un seul dont tous les côtés, excepté un, soient donnés.

COROLLAIRE II.

378. DE-LA on voit que pour trouver un quarré égal à plusieurs plans donnés, il les faut reünir

tous en un ſeul, & trouver enſuite une moyenne proportionnelle entre les deux côtés ; car il eſt clair qu'elle ſera le côté du quarré qu'on demande. Qu'il faille, par exemple, trouver un quarré $xx = ss - \frac{cceee - eebb}{bb + af}$ (les lignes a, b, c, e, f, h, s, ſont données), je cherche une ligne $m = \frac{ss}{e} - \frac{cce - ebb}{bb + af}$ pour avoir un plan $em = ss - \frac{ccee - eebb}{bb + af}$; & ayant trouvé une moyenne proportionnelle x entre les deux côtés e, m, du plan em, il eſt clair que $xx = em = ss - \frac{ccee - eebb}{bb + af}$.

Pour trouver une ligne x dont le quarré x^4 ſoit égal à pluſieurs ſurſolides donnés ; je cherche, comme ci deſſus, un quarré zz égal à tous les ſurſolides donnés diviſés par le quarré aa donné ou pris à volonté. Je prends enſuite une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes a & z, & je dis qu'elle ſera celle qu'on demande ; car $xx = az$, &, en quarrant chaque membre, $x^4 = aazz$, c'eſt à dire x^4 égal à tous les ſurſolides donnés.

REMARQUE.

379. QUOIQUE la methode que l'on vient d'expliquer ſoit general pour tous les cas poſſibles, il ne s'enſuit pas neanmoins qu'elle ſoit toûjours la plus ſimple. C'eſt pourquoi je vais donner ici des exemples particuliers que l'on reſoud d'une maniere plus aiſée en s'écartant un peu de la methode generale, & qui pourront ſervir de methodes pour tous les cas ſemblables.

1°. Soit $x = \frac{abcc - aabb}{abc + c^3}$. Je cherche d'abord une ligne $m = \frac{ab}{c}$, & ſubſtituant à la place de ab ſa valeur cm, je trouve $x = \frac{c^3m - ccmm}{ccm + c^3} = \frac{cm - mm}{m + c}$; d'où je connois qu'en faiſant $c + m . c - m :: m . n$, j'ai cette quatriéme proportionnelle $n = x$. Il eſt donc viſible qu'on n'a eu beſoin que de deux proportions pour trouver la valeur de x, au lieu

que si l'on tente la methode generale, on trouvera qu'il en faut au moins trois.

2°. Soit $x = \sqrt{aa + bb}$. Je fais un triangle rectangle, dont l'un des côtés $= a$, & l'autre $= b$; & son hypothenuse sera la valeur de x. S'il falloit trouver une ligne $x = \sqrt{aa - bb}$, il n'y auroit qu'à trouver une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes $a + b$ & $a - b$; car son quarré xx doit être égal au produit des extrêmes $aa - bb$. Ou bien je fais un triangle rectangle dont l'hypothenuse $= a$, & l'un des côtés $= b$; l'autre côté sera la valeur de x.

3°. Soit $xx = ss + 4ee - \frac{4cccc}{aa}$. Je prends l'hypothenuse m d'un triangle rectangle dont l'un des côtés $= s$, & l'autre $= 2e$, & ayant trouvé une autre ligne $n = \frac{2cc}{a}$, j'ai $xx = mm - nn$ & $x = \sqrt{mm - nn}$ que je resous comme je viens de faire $x = \sqrt{aa - bb}$ dans l'exemple precedent.

4°. Soit enfin $xx = ss - \frac{eeee - eehh}{bb + af}$. Je prends une moyenne proportionnelle entre les côtés a, f, du plan af, pour avoir un quarré $ll = af$, je trouve ensuite un quarré $mm = bb + ll$, & un autre quarré $nn = cc + hh$ par le moyen de deux triangles rectangles, comme dans le second exemple, & j'ai par la substitution $xx = ss - \frac{eenn}{mm}$; & trouvant enfin une ligne $g = \frac{en}{m}$, il vient $x = \sqrt{ss - gg}$ que l'on resoud comme ci-dessus.

PROPOSITION II.

Problême.

380. TROUVER *les racines de toutes sortes d'Egalités du second degré.*

Toutes les Egalités du second degré se peuvent ré-

duire à l'une de ces deux formes, $xx \mp ax - bb = o$, ou $xx \mp ax + bb = o$; en trouvant une ligne a * égale à toutes les quantités connuës qui multiplient l'inconnuë x, & un quarré bb * égal à tous les plans entierement connus. Cela posé.

* Art. 376.
* Art. 378.

FIG. 212. 1°. Soit $xx \pm ax - bb = o$. Je forme un angle droit CAB dont l'un des côtés $CA = \frac{1}{2}a$, & l'autre côté $AB = b$; & ayant mené l'hypothenuse BC prolongée au delà de C, je decris du centre C & du rayon CA, un cercle qui coupe BC en deux points E, D. Je dis que les droites BD, BE, sont les deux racines de l'égalité proposée $xx \mp ax - bb$: sçavoir BE la racine vraie, & BD la fausse de l'égalité $xx + ax - bb = o$, & au contraire BD la vraie & BE la fausse de l'égalité $xx - ax - bb = o$.

Car faisant $BE = x$, on aura BD ou $BE + ED = a + x$; & si l'on fait $BD = -x$, on trouvera BE ou $BD - ED = -x - a$. Donc en l'un & l'autre cas $DB \times BE = xx + ax = \overline{AB}^2 (bb)$ par la proprieté du cercle, c'est à dire $xx + ax - bb = o$. Au contraire si l'on fait $BD = x$ ou $BE = -x$, on trouvera $DB \times BE = xx - ax = bb$ ou $xx - ax - bb = o$.

FIG. 213. 2°. Soit $xx \mp ax + bb = o$. Je forme comme dans le premier cas, un angle droit CAB dont l'un des côtés $CA = \frac{1}{2}a$, & l'autre $AB = b$; & ayant mené une droite indefinie BD parallele à AC, je décris du centre C & du rayon CA un arc de cercle qui coupe la ligne BD aux points E, D. Je dis que les droites BE, BD, sont les racines de l'égalité proposée $xx \mp ax + bb = o$: sçavoir les deux vraies de l'égalité $xx - ax + bb = o$, & les deux fausses de l'égalité $xx + ax + bb = o$.

Car achevant la demi-circonference $AEDH$, & menant les paralleles EF, DG à AB; on aura en faisant BE ou $AF = x$, le rectangle $AF \times FH = ax - xx = \overline{FE}^2 (bb)$ par la proprieté du cercle. De même si l'on fait BD ou $AG = x$, on aura $AG \times GH = ax - xx = \overline{GD}^2 (bb)$: c'est à dire en l'un & l'autre cas

cas $xx - ax + bb = o$. Si l'on veut que BE ou $AF = -x$, & BD ou $AG = -x$, on trouvera $AF \times FH$ & $AG \times GH = -xx - ax = \overline{FE}^2$ ou $\overline{GD}^2 (bb)$ c'est à dire $xx + ax + bb = o$.

Si le cercle qui a pour centre le point C, & pour rayon la droite CA, ne coupe ni ne touche la parallele BD, (ce qui arrive toûjours lorsque AB surpasse CA); les racines de l'égalité seront toutes deux imaginaires: mais s'il la touche en un point, les deux racines BE, BD, deviennent égales chacune au rayon CA.

REMARQUE.

381. LORSQUE dans une égalité l'inconnuë ne se rencontre qu'au quatriéme & au second degré, on peut toûjours reduire cette égalité en une autre où l'inconnuë ne monte qu'au second degré: de maniere que ces sortes d'égalités ne passent que pour être du second degré.

Soit par exemple $z^4 - aazz - aabb = o$. Je suppose une inconnuë x qui soit telle que son rectangle par la donnée a soit égal au quarré zz; ce qui donne $ax = zz$. Et mettant à la place de zz cette valeur ax, & à la place de z^4 son quarré $aaxx$, je change l'égalité donnée $z^4 - aazz - aabb = o$ en cette autre $xx - ax - bb = o$, où l'inconnuë x ne monte qu'au second degré. J'en cherche les racines x, comme l'on vient d'enseigner, & prenant des moyennes proportionnelles entre la donnée a & les valeurs de ses racines, je dis qu'elles exprimeront les valeurs cherchées de l'inconnuë z: ce qui est évident, puisque $zz = ax$. FIG. 214.

PROPOSITION LII.

Problême.

382. TROUVER *par une autre voye les racines des égalités du second degré, sans qu'il soit necessaire de changer leur dernier terme en un quarré.*

FIG. 215. 1°. Soit $xx \mp ax - bc = o$. Ayant décrit un cercle quelconque ABD, dont le diametre ne soit pas moindre que les données a & $b - c$ je suppose ici que b surpasse c) ; on inscrira dans ce cercle, à commencer par un de ses points quelconques A, deux cordes $AB = a$, $AD = b - c$: & ayant prolongé AD en F en sorte que $DF = c$, on decrira de son centre C, & du rayon CF, un autre cercle concentrique qui coupe aux points F, E, G, H, les cordes AD, AB prolongées Je dis que AG est la vraie racine, & AH la fausse de l'egalité $xx + ax - bc = o$; & qu'au contraire AG est la fausse, & AH est la vraie racine de $xx - ax - bc = o$.

Car AF ou $AD + DF = b$, DF ou $AE = c$, & faisant AG ou $BH = x$, on aura $AH = a + x$. Or par la proprieté du cercle $EGFH$, le rectangle $EA \times AF$ $(bc) = GA \times AH$ $(xx + ax)$. Si l'on fait à present $AH = -x$, on aura AG ou BH ou $AH - AB = -x - a$, & par consequent $GA \times AH = xx + ax$ comme auparavant. Donc soit que l'on fasse $AG = x$ ou $AH = -x$, on trouvera toûjours $xx + ax - bc = o$. On prouvera de même que AG est la racine fausse, & AH la vraie de l'egalite $xx - ax - bc = o$.

FIG. 216. 2°. Soit $xx \mp ax + bc = o$. Ayant décrit un cercle quelconque ABD, dont le diametre ne soit pas moindre que les données a & $b + c$, on inscrira dans ce cercle, à commencer par un de ses points quelconques A, deux cordes $AB = a$, $AD = b + c$: & ayant pris sur AD la partie $DF = c$, on décrira de son centre C & du rayon CF un autre cercle concentrique qui coupera les cordes AD, AB, aux points F, E, G, H. Je dis que AG & AH sont les deux racines vraies de l'egalité $xx - ax + bc = o$, & les deux fausses de $xx + ax + bc = o$. Cela se démontre de même que dans le premier cas.

Si le cercle qui a pour rayon CF ne touchoit ni ne rencontroit la ligne AB en aucun point, il s'ensuivroit que les deux racines de l'égalité seroient imaginaires.

AVERTISSEMENT.

Tout l'artifice dont je me sers pour construire les égalités qui n'ont qu'une inconnuë, ou pour trouver les racines, consiste à introduire dans cette égalité une nouvelle inconnuë, en sorte qu'on en puisse tirer plusieurs équations qui renferment chacune les deux inconnuës & qui soient telles que deux quelconques de ces équations renferment ensemble toutes les quantités connuës de la proposée; car autrement en faisant évanoüir l'inconnuë nouvellement introduite, on ne retrouveroit pas l'égalité proposée. Je choisis ensuite entre ces équations deux des plus simples, & en ayant construit separément les lieux, leurs points d'interséctions me donnent les racines que je cherche. Il y a de l'art à introduire l'inconnuë; car il faut que les lieux que l'on tire de la proposée, soient les plus simples qu'il se puisse: par exemple, si l'égalité est du quatriéme degré, il faut que les lieux des équations qu'on tire ne passent point le second degré; que parmi ces lieux il y ait toûjours un cercle comme étant le plus simple, & aussi une Parabole, une Hyperbole équilatere &c. Or c'est ce que j'ai tâché d'executer dans les Lemmes & les Propositions qui suivent.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des Egalités du troisiéme & du quatriéme degré, par le moyen d'un cercle, & d'une Parabole donnée.

383. SOIT proposée l'égalité $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$, dans laquelle x est l'inconnuë, & a, b, c, d, f, sont les données; & soit supposée une autre inconnuë y telle que son rectangle par la connuë a, soit égal au rectangle de $x+b$ par x. Ce qui donne les équations suivantes.

1°. $ay = xx + bx$, de laquelle quarrant chaque membre, on trouve $x^4 + 2bx^3 + bbxx = aayy$; &

mettant à la place de $x^4 + 2bx^3$, sa valeur $aayy - bbxx$ dans l'égalité proposée x^4 &c. on la changera en cette seconde equation.

2e. $yy - \frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0$, dans laquelle mettant à la place de xx sa valeur $ay - bx$ trouvée par le moyen de la premiere équation, 1°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx$. 2°. Dans $\frac{c}{a}xx$. 3°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx$, on arrivera à ces trois differentes équations.

3e. $yy - \frac{bb}{a}y + \frac{b^3}{aa}x + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0$.

4e. $yy - \frac{bb}{aa}xx + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = 0$.

5e. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$. Si l'on retranche de cette cinquiéme équation, la premiere $xx + bx - ay = 0$, & qu'ensuite on la lui ajoute, on aura ces deux autres.

6e. $yy + cy - \frac{bb}{a}y + ay - xx - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$.

7e. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - ay + xx + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$.

Maintenant si l'on prend pour les inconnuës x & y deux lignes droites AP, PM, qui fassent entr'elles un angle quelconque APM; il est évident que le lieu de la premiere équation est * une Parabole : que celui de la seconde peut être une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole selon que bb est égal, moindre, ou plus grand que ac; que celui de la troisiéme est une Ellipse, qui devient un cercle * lorsque $c = a$ & que l'angle APM est droit : que celui de la quatriéme est une Hyperbole, qui devient équilatere * lorsque $b = a$: que celui de la cinquiéme est encore une Parabole : que celui de la sixiéme est une Hyperbole équilatere : & enfin que le lieu de la septiéme est un cercle, lorsque l'angle APM est droit.

* Art. 310.
* Art. 328. & 329.
* Art. 335. & 336.

REMARQUE I.

384. S'IL y avoit $-2bx^3$ dans l'égalité proposée au lieu de $+2bx^3$, il faudroit changer dans toutes les équations les signes des termes où b se rencontre avec une dimension impaire; & si le second terme manquoit, il faudroit effacer tous les termes où b se trouve. Il en est de même à l'égard des autres termes de l'egalité proposée par rapport aux lettres, c, d, f, qu'ils renferment. Mais l'on doit remarquer que dans tous les differens changemens qui peuvent arriver, le lieu de la premiere équation sera une Parabole, celui de la sixiéme une Hyperbole équilatere, & enfin celui de la derniere toûjours un cercle lorsque l'angle *APM* est droit.

REMARQUE II.

385. ON a choisi pour premiere équation $xx+bx=ay$, plûtôt que $xx-bx=ay$ ou simplement $xx=ay$; parce qu'en quarrant chaque membre de cette équation, les deux premiers termes du premier membre sont les mêmes que les deux premiers termes de l'égalité proposée x^4+2bx^3 &c, & qu'ainsi on peut les faire évanoüir tout d'un coup. Ce qui donne une nouvelle equation dont le lieu n'est que du second degré, & qui étant combinée en differentes façons avec la premiere, sert à en trouver (comme l'on vient de voir) plusieurs autres, dont les lieux n'étant que du second degré, se construisent aisément, parce qu'elles ne renferment point le plan xy; & entre lesquels le lieu de la derniere équation est toûjours un cercle, en supposant que les inconnuës x & y fassent entr'elles un angle droit.

PROPOSITION IV.

Problême.

386. TROUVER *les racines de l'égalité proposée* $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$, *par le moyen d'une Parabole & d'un cercle.*

FIG. 217. Ayant pris pour les inconnuës & indéterminées x & y, les deux lignes droites AP, PM, qui fassent entr'elles un angle droit APM; je construis * d'abord la Parabole qui est le lieu de la premiere équation du Lemme, & ensuite le cercle qui est le lieu de la septiéme : & leurs intersections me servent à découvrir les differentes valeurs de l'inconnuë x qui seront les racines de l'égalité proposée. Cela se fait en cette sorte.

* Art. 310.

Ayant pris sur la ligne AP prolongée de l'autre côté de A la partie $AD = \frac{1}{2}b$, on menera par le point D une parallele à PM, sur laquelle on prendra la partie $DC = \frac{bb}{4a}$ du côté opposé à PM; & on décrira de l'axe CD qui ait son origine en C, & dont le parametre soit égal à la donnée a, une Parabole MCM. Cela fait on menera par le point fixe A une parallele AQ à PM, sur laquelle ayant pris la partie $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}c = \mp g$ pour abreger, on tirera parallelement à AP la droite $BE = \frac{1}{2}d \pm \frac{bg}{a}$ sçavoir $-\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = +g$ c'est à dire lorsque la valeur de AB est positive, & $+\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = -g$; en observant de prendre ou mener ces deux lignes AB, BE, du côté de PM lorsque leurs valeurs sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. Nommant enfin EA, m; on décrira du centre E, & du rayon $EM = \sqrt{mm + af}$ un cercle; & menant des points M où il coupe la Parabole des perpendiculaires MP sur la ligne AP: les par-

ties AP de cette ligne marqueront les racines de l'égalité, sçavoir les vraies lorsque les points P tombent du côté où l'on a supposé PM en faisant la construction, & les fausses lorsqu'ils tombent du côté opposé.

Car prolongeant MQ parallele à AP, & qui rencontre l'axe CG au point L, on aura ML ou $AP + AD = x + \frac{1}{2}b$, CL ou $MP + DC = y + \frac{bb}{4a}$; & par la proprieté de la Parabole $\overline{ML}^2 = CL \times a$, c'est à dire $xx + bx + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + ay$, ou $xx + bx = ay$ qui est la premiere equation du Lemme. Maintenant si l'on prolonge EB jusqu'à ce qu'elle rencontre PM en R, & qu'on tire le rayon EM, on aura à cause du triangle rectangle ERM le quarré $\overline{EM}^2 = \overline{ER}^2 + \overline{RM}^2 = \overline{EB}^2 + 2EB \times BR + \overline{BR}^2 + \overline{PM}^2 - 2AB \times PM + \overline{AB}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BA}^2 + af$ par la construction; c'est à dire en effaçant de part & d'autre les quarrés $\overline{EB}^2$ $\overline{BA}^2$, & mettant pour $2AB$ sa valeur $a + \frac{bb}{a} - c$, & pour $2BE$ sa valeur $\frac{2bg}{a} - d$ ou $b + \frac{b^3}{aa} - \frac{bc}{a} - d$, & pour BR ou AP & PM leurs valeurs x & y, la septiéme équation $yy + cy - ay - \frac{bb}{a}y + xx + bx + \frac{b^3}{aa}x - \frac{bc}{a}x - dx = af$, dans laquelle si l'on met à la place de y sa valeur $\frac{xx+bx}{a}$ trouvée par la premiere équation, & à la place de yy le quarré de cette valeur; on retrouve l'equation même proposée $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$. D'où l'on voit que la ligne AP exprime une racine vraie de cette égalité.

Si l'on observe de prendre $-x$ pour AP & $-y$ pour PM, lorsque ces lignes tombent du côté opposé où on les a supposées en faisant la construction; on trouvera toûjours par la proprieté de la Parabole la premiere équation, & par la proprieté du cercle la septiéme. Donc &c.

COROLLAIRE I.

387. Il est visible qu'on rendra la construction precedente generale pour toutes les égalités du troisiéme & du quatriéme degré, & qu'on y employera toûjours une Parabole qui ait pour le parametre de son axe une ligne donnée a; si l'on observe 1°. De multiplier par sa racine x l'égalité lorsqu'elle n'est que du troisieme degré; & de prendre
* Art. 376. une ligne * $2b$ egale à toutes celles qui multiplient x^3, un
* Art. 377. plan * ac égal à ceux qui multiplient xx, un solide aad égal aux solides qui multiplient x, & enfin un sursolide a^3f égal aux termes entierement connus de l'égalité donnée. 2°. De changer dans les valeurs des lignes AD, DC, AB, BE, EM, qui déterminent la construction de la Parabole & du cercle, les signes des termes où b se rencontre avec une dimension impaire s'il y a $-2bx^3$ dans l'égalité donnée, parce qu'il y avoit $+2bx^3$ dans celle du Problême; & d'effacer tous les termes où b se trouve si le terme $2bx^3$ manque, parce qu'alors $b=0$: comme aussi de faire la même chose à l'égard des termes où c, d, f, se rencontrent. 3°. De prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorsqu'elles sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. On aura donc $AD = \mp \frac{1}{2}b$, sçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorsqu'il y a $+2bx^3$, & $+\frac{1}{2}b$ lorsqu'il y a $-2bx^3$; $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \mp \frac{1}{2}c = \mp g$, sçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorsqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorsque c'est $-acxx$; $BE = \pm\frac{bg}{a} \mp \frac{1}{2}d$, sçavoir $-\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = +g$, & qu'il y a $+2bx^3$, ou bien lorsque $AB = -g$, & qu'il y a $-2bx^3$; & au contraire $+\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = +g$ & qu'il y a $-2bx^3$, ou bien lorsque $AB = -g$ & qu'il y a $+2bx^3$ (c'est à dire $-\frac{bg}{a}$ lorsque les valeurs de AB & AD sont l'une positive & l'autre negative, & $+\frac{bg}{a}$ lorsque ces valeurs sont toutes deux ou positi-

ves ou negatives) ; comme aussi $+\frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $-aadx$, & $-\frac{1}{2}d$ lorsque c'est $+aadx$: & enfin $EM = \sqrt{mm \mp af}$, sçavoir $+af$ lorsqu'il y a $-a^3f$, & $-af$ lorsque c'est $+a^3f$. D'où l'on tire cette construction geometrique qui est generale pour tous les cas.

Une Parabole MCM qui a pour axe la ligne CG dont le parametre est égal à la ligne a, étant donnée, & ayant reduit l'égalité proposée sous cette forme $x^4 \mp 2bx^3 \mp acxx \mp aadx \mp a^3f = 0$; on menera une ligne AB parallele à l'axe CG qui en soit distante de $\frac{1}{2}b$, du côté droit de cet axe lorsqu'il y a $+2bx^3$ dans l'égalité donnée, & du côté gauche lorsqu'il y a $-2bx^3$. On tirera par le point A où la ligne AB rencontre la Parabole, une perpendiculaire AD sur l'axe CG ; & on prendra sur cet axe les parties $DF = \frac{1}{2}a$, $FG = 2CD$ toûjours du côté opposé à son origine C, & la partie $GK = \frac{1}{2}c$ vers son origine C lorsqu'il y a $+acxx$, & du côté opposé lorsqu'il y a $-acxx$. On menera ensuite par les points déterminés A, F, une ligne droite indéfinie AF, & par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre AF en H ; & on prendra sur cette perpendiculaire la partie $HE = \frac{1}{2}d$ du côté droit lorsqu'il y a $-aadx$, & du côté gauche lorsqu'il y a $+aadx$. Cela fait, on décrira un cercle du centre E, & du rayon $EM = AE$, lorsque le terme a^3f manque dans l'égalité donnée, c'est à dire, lorsqu'elle n'est que du troisiéme degré : mais lorsqu'elle est du quatriéme, on prendra (après avoir nommé AE, m ;) le rayon $EM = \sqrt{mm \mp af}$, sçavoir $+af$ s'il y a $-a^3f$, & $-af$ s'il y a $+a^3f$. Enfin des points M où ce cercle rencontre la Parabole donnée, menant des perpendiculaires MQ sur la ligne AB ; elles seront les racines de l'égalité donnée ; sçavoir celles qui tombent du côté droit de cette ligne, les vraies, & celles qui tombent du côté gauche, les fausses. FIG. 217.

Car prolongeant HK jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne AB au point B, on a par la construction BK ou

$AD = \mp \frac{1}{2}b$, sçavoir $- \frac{1}{2}b$ lorsqu'il y a $+ 2bx^3$, & $+ \frac{1}{2}b$ lorsque c'est $- 2bx^3$; & par la proprieté de la Parabole, $CD = \frac{bb}{4a}$. Donc DG ou $DF + FG = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{4a}$, & DK ou $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$, sçavoir $- \frac{1}{2}c$ lorsqu'il y a $+ acxx$, & $+ \frac{1}{2}c$ lorsqu'il y a $- acxx$; & l'on doit observer que le point B tombe du côté de PM lorsque $AB = + g$, c'est à dire lorsque sa valeur est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative. Or à cause des triangles semblables ADF, ABH, on aura $DF\ (\frac{1}{2}a)$. $DA\ (\pm \frac{1}{2}b) :: AB\ (\mp g)$. $BH = \pm \frac{bg}{a}$, sçavoir $+ \frac{bg}{a}$ lorsque les valeurs de AD & de AB sont toutes deux positives ou negatives, & $- \frac{bg}{a}$ lorsque l'une d'elles est positive & l'autre negative. Et partant $BE = \pm \frac{bg}{a} \pm \frac{1}{2}d$, sçavoir $- \frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $- aadx$, & $+ \frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $+ aadx$; & l'on doit encore observer que le point E tombera du côté de PM lorsque la valeur de BE est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative. D'où il est évident que par le moyen de cette construction on déterminera dans tous les cas possibles, toûjours comme il est requis, le centre E du cercle.

Si le second terme $2bx^3$ manquoit dans l'égalité donnée, il est clair que les lignes AB, AF, tomberoient sur l'axe CG, ensorte que les points A, D, se confondroient avec l'origine C; puisque $b = o$. Et par consequent le point G tomberoit sur le point F, & les points H, B, sur le point K: ce qui rend la construction generale beaucoup plus simple. Car il ne faudroit alors que prendre sur l'axe la partie $CF = \frac{1}{2}a$ toûjours vers le dedans de la Parabole, & la partie $KF = \frac{1}{2}c$ vers l'origine C lorsqu'il y a $+ acxx$, & du côté opposé lorsqu'il y a $- acxx$; mener $KE = \frac{1}{2}d$ perpendiculaire à l'axe, du côté gauche lorsqu'il y a $+ aadx$; & du côté droit lorsqu'il y a $- aadx$; & achever le reste comme dans la construction generale, en observant qu'ici $EC = m$.

FIG. 218.

De même si le terme $acxx$ manque, le point K tombera sur le point G; & si c'est le terme $aadx$, le centre E du cercle tombera en H. FIG. 217.

COROLLAIRE II.

388. On peut encore trouver une construction plus simple pour les égalités du troisiéme degré qui ont un second terme, en les multipliant par l'inconnuë plus ou moins la quantité connuë du second terme, sçavoir plus cette quantité quand le second terme est affecté du signe $-$; & moins cette quantité lorsqu'il y a le signe $+$; ce qui donne une équation du quatriéme degré où le second terme est évanoüi. Qu'il faille, par exemple, trouver les racines de l'égalité du troisiéme degré, $x^3 - bxx + apx + aaq = o$: je la multiplie par $x + b$ pour avoir l'égalité du quatriéme degré,

$$x^4 \begin{array}{l} + apxx \\ - bbxx \end{array} \begin{array}{l} + aaqx \\ + abpx \end{array} + aabq = o,$$

dans laquelle le second terme est évanoüi; je me sers à present de la construction que l'on vient de donner pour ces sortes d'égalités où le second terme manque, & j'ai $CK\ (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c) = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$, $KE\ (\frac{1}{2}d) = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$, & le rayon du cercle $EM = \sqrt{mm - bq}$: ce qui donne cette construction.

Ayant mené une parallele à l'axe CD qui en soit distante vers le côté gauche d'une ligne égale à b, & qui rencontre la Parabole au point A, je tire par l'origine C de l'axe la droite CA, sur laquelle j'éleve par son point de milieu O une perpendiculaire indéfinie OG qui rencontre l'axe au point G. Je prends sur l'axe vers son origine C la partie $GK = \frac{1}{2}p$, & ayant tiré par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre la ligne OG au point H, je prends sur cette perpendiculaire prolongée du côté de H la partie $HE = \frac{1}{2}q$, & je décris du centre E & du rayon EA un cercle. Je dis qu'il coupera la Parabole en des points M, d'où ayant abaissé sur l'axe des perpendiculaires MQ; celles qui seront FIG. 219.

à droit, marqueront les vraies racines; & celles qui seront à gauche, les fausses de l'égalité proposée $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$.

Car ayant mené les perpendiculaires AD, OL, sur l'axe; on aura par la construction $AD = b$, & par la proprieté de la Parabole $CD = \frac{bb}{a}$. Donc puisque CA est divisée par le milieu en O, les triangles semblables CAD, COL, donneront $OL = \frac{1}{2}b$, $CL = \frac{bb}{2a}$; & à cause des triangles rectangles semblables CLO, OLG, on aura $CL\ (\frac{bb}{2a}) \cdot LO\ (\frac{1}{2}b) :: LO\ (\frac{1}{2}b) . LG = \frac{1}{2}a$, & par consequent CK ou $CL + LG - GK = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$. De plus à cause des triangles semblables GLO, GKH, on trouve $KH = \frac{bp}{2a}$, & $KH + HE$ ou $KE = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$ qui tend du côté gauche de l'axe, comme il est prescrit dans la construction lorsqu'il y a $+ aadx$. Le point E est donc le centre du cercle lequel doit déterminer par ses intersections avec la Parabole donnée toutes les racines de l'égalité du quatriéme degré $x^4 + apxx$ &c. Or comme les racines de cette égalité sont celles de la proposée $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$, avec une fausse AD (b); il s'ensuit que ce cercle doit passer par le point A. Donc &c.

On peut encore s'assurer par le calcul que EA est le rayon du cercle cherché. Car menant EB parallele à l'axe, on aura (à cause des triangles rectangles EBA, EKC) les quarrés des hypothenuses $\overline{EA}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BA}^2$ & $\overline{EC}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{KE}^2$ & par consequent il s'agit de prouver que $\overline{EB}^2 + \overline{BA}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{KC}^2 - bq$, puisqu'on doit prendre $EM = \sqrt{mm - bq}$. Or en mettant à la place de ces lignes de part & d'autre leurs valeurs analytiques, on trouvera les mêmes quantités. Et c'est ce qui doit arriver, si le rayon cherché $EM = EA$.

Pour rendre cette construction generale, il faut observer 1°. De mener du côté gauche de l'axe la parallele qui en est distante d'une ligne égale à b, lorsqu'il y a $-bxx$ dans l'égalité proposée, & du côté droit lorsqu'il y a $+bxx$. 2°. De prendre sur l'axe $GK=\frac{1}{2}p$ du côté de son origine C lorsqu'il y a $+apx$, & du côté opposé lorsqu'il y a $-apx$. 3°. De prendre $HE=\frac{1}{2}q$ du côté gauche lorsqu'il y a $+aaq$, & du côté droit lorsqu'il y a $-aaq$. Tout cela est trop évident pour m'arrêter à le démontrer en détail.

REMARQUE I.

389. Il est à propos de remarquer, 1°. Que si le cercle ne coupe la Parabole donnée qu'en deux points, il s'ensuivra que l'égalité proposée n'aura que deux racines réelles lorsqu'elle est du quatriéme degré, & qu'une seule lorsqu'elle est du troisiéme, & les deux autres imaginaires : comme dans la figure 219. où le cercle ne coupe la Parabole qu'en deux points A, M; l'égalité $x^4+apxx-bbxx$ &c. n'a que deux racines réelles AD, MQ, qui sont toutes deux fausses, parce qu'elles tombent du côté gauche de l'axe. 2°. Que si le cercle ne coupoit ni ne rencontroit la Parabole en aucun point (ce qui ne peut arriver lorsque l'égalité est du troisiéme degré comme l'on voit par les constructions precedentes) les quatre racines seroient imaginaires. 3°. Que s'il la touchoit en un point l'égalité proposée auroit deux racines égales chacune à la perpendiculaire menée de ce point ; ce qui vient de ce qu'on peut considerer un cercle qui touche une Parabole, comme s'il coupoit en deux points infiniment proches l'un de l'autre, qui sont regardés comme réunis dans le point touchant : mais alors l'égalité proposée se pourroit abaisser à une du second degré par les regles de l'Algebre ordinaire, de sorte qu'on n'auroit point besoin d'une Parabole pour en trouver les racines.

REMARQUE II.

390. Si l'on fait attention à ce qu'on démontre en Algebre qu'en toute égalité où le second terme manque, & qui a toutes ses racines réelles, la somme des vraies est égale à la somme des fausses; on verra naître ce Theorême.

FIG. 218. S'il y a un cercle qui coupe une Parabole en quatre points M d'où l'on abaisse des perpendiculaires MQ sur l'axe CF: je dis que la somme des perpendiculaires qui tombent du côté droit de l'axe, sera égale à la somme de celles qui tombent du côté gauche.

Car si l'on prend vers le dedans de la Parabole sur l'axe depuis son origine C la partie CF égale à la moitié de son parametre que j'appelle a, & qu'ayant tiré du centre E du cercle la perpendiculaire EK sur l'axe, on fasse $FK = \frac{1}{2}c$, $KE = \frac{1}{2}d$, $\overline{EC}^2 - \overline{EM}^2 = af$; il est clair

* Art. 387. par la construction qui est à la fin * du Corollaire premier, que les perpendiculaires MQ seront les racines de cette égalité $x^4 - acxx + aadx + a^3f = 0$ dans laquelle le second terme manque; sçavoir celles qui tombent du côté droit de l'axe, les vraies; & celles qui tombent du côté gauche, les fausses. Donc &c.

Si le cercle passoit par l'origine C de l'axe, il est visible que l'une des perpendiculaires MQ deviendroit nulle ou zero; & qu'ainsi il y auroit alors une perpendiculaire d'une part de l'axe égale aux deux autres de l'autre part.

Si le cercle touchoit la Parabole en un point & la coupoit en deux autres, il faudroit prendre le double de la perpendiculaire menée du point touchant; puisque

* Art. 389. (comme l'on vient * de dire) on peut regarder ce cercle comme s'il coupoit la Parabole en deux points infiniment proches l'un de l'autre, lesquels se réünissent au point touchant.

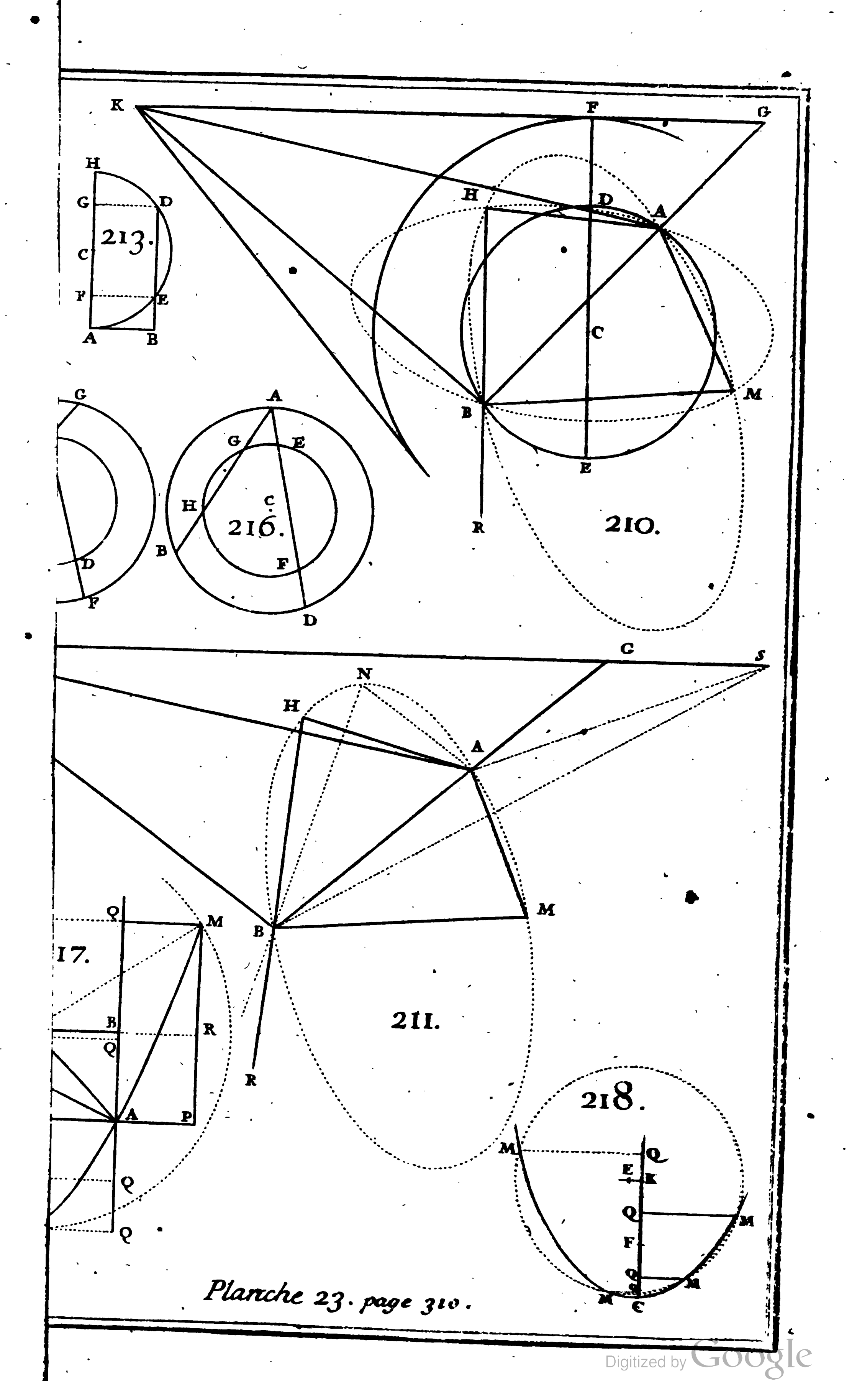


Planche 23. page 310.

REMARQUE III.

391. COMME l'on ne peut imaginer en Geometrie des produits qui ayent plus de trois dimensions ; puisque le solide, qui est la quantité la plus composée, n'en a que trois ; on pourra diviser, si l'on veut, tous les termes d'une égalité proposée qui passe le troisiéme degré, par telle ligne donnée qu'on voudra, élevée à une puissance moindre d'une unité que chacun de ses termes n'a de dimensions : ce qui ne troublera point l'égalité, & fera que chacun de ses termes, n'exprimera plus que des lignes droites. Soit, par exemple, l'égalité du quatriéme degré $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$; je la divise par a^3, ce qui donne $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{a} - f = 0$, dont chaque terme n'a qu'une dimension, & n'exprime par consequent que des lignes droites. On choisit ordinairement la ligne qui se trouve repetée le plus souvent dans tous les termes de l'équation proposée, comme est ici la ligne a, & même quelquefois on la sousentend, en la regardant comme l'unité dans les nombres, qui ne change rien aux quantités qu'elle multiplie ou qu'elle divise : ainsi en faisant $a = 1$, on écrira $x^4 + 2bx^3 + cxx - dx - f = 0$, au lieu de $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$ ou de $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{a} - f = 0$. Il en est de même des égalités du cinquiéme & du sixiéme degré, &c.

REMARQUE. IV.

392. SI après avoir construit le cercle qui est le lieu de la derniere équation du Lemme, on construit une Section conique qui soit le lieu de telle autre de ses équations qu'on voudra ; ces deux lieux détermineront par leurs intersections les racines de l'égalité proposée ; dont la raison est que faisant évanoüir par le moyen de leurs équations l'inconnuë y, on retrouve l'égalité même proposée.

De-là il est évident qu'on peut construire cette égalité, 1°. Par le moyen d'un cercle & d'une Hyperbole équilatere, en se servant de la septiéme & de la sixiéme équation du Lemme. 2°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipse dont l'axe parallele à *AP* est à son parametre comme *a* est à *c*, en se servant de la septiéme & de la troisiéme équation. 3°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Hyperbole dont l'axe parallele à *AP* est à son parametre comme *aa* est à *bb*, en se servant de la septiéme & de la quatriéme équation. Or comme la ligne *a*, dont on se sert pour reduire sous l'expression *ac* toutes les quantités qui multiplient *xx*, sous l'expression *aad* celles qui multiplient *x*, & enfin sous l'expression a^3f les quantités entierement connuës, est arbitraire; il s'ensuit qu'en prenant pour cette ligne *a* une infinité de differentes grandeurs, on pourra construire l'égalité proposée par le moyen d'une infinité de cercles, & d'Ellipses, ou d'Hyperboles équilateres & non équilateres, toutes differentes entr'elles.

On a vû dans l'article 387. qu'en prenant pour l'unité arbitraire *a* le parametre de l'axe d'une Parabole donnée, on peut en se servant de la premiere & de la septiéme équation construire l'égalité proposée par le moyen d'un cercle & de la Parabole donnée: & je vais faire voir qu'en déterminant cette ligne *a* d'une certaine maniere, on peut construire l'égalité par le moyen d'un cercle & d'une Ellipse ou d'une Hyperbole semblable à une Ellipse ou à une Hyperbole donnée. Car la raison de ses axes étant donnée par la supposition, la raison de l'axe parallele à *AP* avec son parametre sera aussi donnée. Si donc l'on nomme cette raison donnée $\frac{n}{m}$; on aura lorsqu'il s'agit de l'Ellipse $\frac{c}{a} = \frac{n}{m}$, & partant $aa = \frac{acm}{n}$; d'où il suit que si l'on prend pour l'unité arbitraire *a*, la racine d'un quarré *aa* égal * à une quantité connuë *ac* qui multiplie *xx* dans l'égalité donnée

* *Art.* 378.

donnée, & eſt multipliée par $\frac{m}{n}$, on conſtruira l'égalité en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la troiſiéme équation, par le moyen d'un cercle & d'une Ellipſe dont l'axe parallele à *AP*, ſera à ſon parametre comme *m* eſt à *n*, puiſque $\frac{n}{m} = \frac{e}{a}$. Mais lorſqu'il s'agit de l'Hyperbole ; on aura $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$, & partant $a = b\sqrt{\frac{m}{n}}$; d'où l'on voit que ſi l'on prend pour l'unité *a* cette valeur, & qu'on conſtruiſe l'égalité en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la quatriéme équation, l'axe parallele à *AP* de l'Hyperbole qui eſt le lieu de la quatriéme, ſera à ſon parametre comme *m* eſt à *n*, puiſque $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

REMARQUE V.

393. LA ligne *a* qui fait l'office de l'unité, & qui eſt arbitraire, ſuffit comme l'on vient de voir pour conſtruire l'égalité propoſée, par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée, ou bien par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole ſemblable à une donnée. Mais lorſqu'il eſt queſtion de la conſtruire par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole donnée, une ſeule ligne arbitraire ne ſuffit pas ; il faut en introduire d'autres dans l'égalité propoſée, afin de pouvoir les déterminer enſuite de la maniere que la Section donnée ſerve. C'eſt ce que l'on va executer dans le Lemme ſuivant.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des Egalités du troiſiéme & du quatriéme degré, avec un cercle, & une Ellipſe, ou une Hyperbole donnée.

394. SOIT l'égalité du quatriéme degré $z^4 + abzz - aacz + a^3d = 0$, dans laquelle les lettres *a*, *b*, *c*, *d*,

marquent des lignes données, & la lettre z exprime les racines inconnuës de l'égalité. Je prends une autre inconnuë $x = \frac{fz}{a}$ (la lettre f marque une ligne prise à volonté), & substituant à la place de z, zz, & z^4 leurs valeurs $\frac{ax}{f}$, $\frac{aaxx}{ff}$, & $\frac{a^4x^4}{f^4}$ dans l'égalité precedente, je la change en cette autre $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = 0$; je prends une troisiéme inconnuë y telle qu'étant multipliée par f son produit fy soit égal au quarré xx de la seconde; ce qui donne les équations suivantes.

1e. $xx - fy = 0$; & substituant à la place de xx, & de x^4 leurs valeurs fy & $ffyy$ dans l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx$ &c, j'ai pour seconde équation.

2e. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = 0$, laquelle étant ajoûtée à la premiere, donne pour troisiéme équation.

3e. $yy + \frac{bf}{a}y - fy + xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = 0$, dont le

* Art. 324. & 329. lieu est * un cercle lorsque les inconnuës & indéterminées x & y font entr'elles un angle droit. Je multiplie la premiere équation par la fraction $\frac{g}{a}$ dans laquelle g exprime une ligne telle qu'on veut de même que f, & j'ai $\frac{g}{a}xx - \frac{fg}{a}y = 0$; Et ajoûtant cette équation avec la seconde, & l'en ôtant ensuite, je forme la quatriéme & la cinquiéme équation.

4e. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{gf}{a}y + \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = 0$, dont

* Art. 324. le lieu est * une Ellipse.

5e. $yy + \frac{bf}{a}y + \frac{gf}{a}y - \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = 0$, dont

* Art. 332. le lieu est * une Hyperbole ou les Hyperboles opposées.

REMARQUE.

395. S'il arrive que quelques termes de l'égalité proposée ayent des signes differens de celle-ci, ou qu'ils

manquent ; les lieux de ces cinq équations seront toûjours neanmoins des Sections coniques de même nom : c'est à dire que les lieux de la premiere & de la seconde équation seront toûjours des Paraboles, celui de la troisiéme, un cercle, &c.

PROPOSITION V.

Problême.

396. CONSTRUIRE *l'égalité du quatriéme degré* $z^4 + abzz - aacz + a^3d = 0$, *avec un cerle donné & une Hyperbole semblable à une donnée ; ou avec une Hyperbole donnée & un cercle.*

Je construis separément * les lieux de la troisiéme & de la cinquiéme équation, en prenant pour les inconnuës & indéterminées x & y les mêmes lignes AP, PM, qui fassent entr'elles un angle droit APM ; & les intersections de ces deux lieux me servent à déterminer les valeurs de l'inconnuë z, de la maniere qui suit. * *Art.* 314. & 332. FIG. 220. & 221.

Soit menée par le point A origine des x, la ligne $AD = \frac{af - bf}{2a}$ parallele à PM, & du même côté lorsque a surpasse b, & au contraire du côté opposé lorsqu'il est moindre. Et ayant tiré la droite indéfinie DG parallele à AP, soient prises sur cette ligne du côté de PM la partie $DC = \frac{cf}{2a}$, & soit décrit du centre C & du rayon CF ou $CG = \frac{f}{2a}\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$, un cercle. Maintenant ayant mené $AH = \frac{bf + af}{2a}$ parallele à PM & du côté opposé, soit tirée la droite indefinie HK parallele à AP, sur laquelle soient prises la partie $HI = \frac{cf}{2g}$ du côté opposé à PM, & de part & d'autre du point I les parties IK, IL, égales chacune à $\frac{f}{2g}\sqrt{cc - bg + 4dg}$ ou $\frac{f}{2g}\sqrt{bg - 4dg - cc}$ (on a

pris pour abreger $h=\frac{\overline{b+g}^2}{a}$). Soit enfin décrite de l'axe LK (qui doit être le premier lorſque $cc+4dg$ eſt plus grand que bg, & le ſecond lorſqu'il eſt moindre) qui ſoit à ſon parametre KO comme a eſt à g, une Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées qui rencontrent le cercle en des points M, M, d'où ſoient abaiſſées des perpendiculaires MP, MP, ſur la ligne AP. Je dis que les parties AP, AP, de cette ligne ſeront les racines de l'égalité $x^4+\frac{bff}{a}xx-\frac{cf^3}{a}x+\frac{df^4}{a}=o$; en obſervant qu'elles ſont vraies lorſque les points P tombent du côté où l'on a ſuppoſé PM en faiſant la conſtruction, & fauſſes lorſqu'ils tombent du côté oppoſé.

Car on trouvera par la proprieté du cercle la troiſiéme équation; & par la proprieté de l'Hyperbole, la cinquiéme; & ôtant la troiſiéme de la cinquiéme, on aura $\frac{gf}{a}y+fy-\frac{g}{a}xx-xx=o$, d'où l'on tire $y=\frac{xx}{f}$; & mettant dans l'une ou dans l'autre de ces deux équations à la place de y cette valeur $\frac{xx}{f}$, & à la place de yy ſon quarré $\frac{x^4}{ff}$, on trouvera l'égalité x^4 &c. Mais ayant les valeurs de x, on a celles de z; puiſque $z=\frac{ax}{f}$.

Maintenant pour ſatisfaire à la premiere demande du Problême, je nomme le rayon du cercle donné CF, r; & j'ai par conſequent $r=\frac{f}{2a}\sqrt{cc+aa-2ab+bb-4ad}$; d'où il ſuit que ſi l'on prend $f=\frac{2ar}{\sqrt{cc+aa-2ab+bb-4ad}}$, le rayon CF ou CG du cercle qui eſt le lieu de la troiſiéme équation, ſera égal à la donnée r. Il reſte à faire que l'Hyperbole ſoit ſemblable à une donnée, c'eſt à dire, que ſon premier ou ſecond axe LK ſoit à ſon parametre KO en raiſon donnée de m à n; & il eſt viſible qu'il ne faut pour cela que prendre $g=\frac{an}{m}$, puiſque LK. KO :: a. g :: m. n.

Enfin pour faire en sorte que l'Hyperbole soit donnée, ou, ce qui est la même chose que son premier ou second axe LK & le parametre KO de cet axe soient égaux à des lignes données; je nomme d'abord le premier axe LK, $2t$; son parametre KO, p; & j'ai $KO\,(p) = \frac{2gt}{a}$, & $LK\,(2t) = \frac{f}{g}\sqrt{cc+4dg-hg}$ (il faut ressouvenir que $h = \frac{b+g}{a}$); ce qui donne $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg-hg}}$: d'où l'on voit que si $cc+4dg$ surpasse hg, & qu'on prenne pour g & pour f ces valeurs, on trouvera dans la construction de la cinquiéme équation pour le premier axe LK & son parametre KO les lignes données $2t$ & p. Mais s'il arrive que $cc+4dg$ soit moindre que hg, il faudra nommer le second axe LK, $2t$; & son parametre KO, p; ce qui donne comme ci-dessus $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{hg-cc-4dg}}$; où l'on doit observer que $2t$ & p ne marquent plus à present les mêmes lignes qu'auparavant: & s'il arrive que hg, dans cette derniere supposition où $2t$ marque le second axe; surpasse $cc+4dg$, il est visible qu'en prenant pour g & f ces valeurs dans la construction de la cinquiéme équation, on trouvera pour le second axe LK & son parametre KO les lignes données $2t$ & p.

Il faut bien remarquer qu'il peut arriver que la valeur de f soit imaginaire dans l'une & dans l'autre de ces suppositions; & alors on voit que la construction devient impossible du moins par cette methode. Or comme tous les Auteurs qui s'en sont servis après M. Sluze, qui en est l'inventeur, la donnent pour generale; j'en ferai une remarque à part, où je ferai voir en examinant par ordre tous les cas qui peuvent arriver, que dans cet exemple même il peut y en avoir une infinité où cette methode ne réüssit point.

Si c'étoient deux Hyperboles conjuguées qui fussent données, la construction seroit toûjours possible; car si

après avoir nommé le premier axe d'une de ces Hyperboles LK, $2t$; & son parametre KO, p; il se trouvoit que la valeur de $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc+4dc-bg}}$ fût imaginaire, c'est à dire, que bg surpassât $cc+4dg$; il n'y auroit qu'à se servir dans la construction à la place de cette Hyperbole de sa conjuguée & de son second axe, puisque le second axe de celle-ci étant le même que le premier axe de l'autre, la valeur de f ne renfermeroit plus aucune contradiction. Je dois encore avertir que s'il arrive que $cc+4dg=bg$, l'equation du quatriéme degré s'abaisse à une du second.

REMARQUE.

397. 1°. Si l'Hyperbole donnée est équilatere. On aura $g=a$, & on se servira dans la construction du Problême de son premier axe, lorsque $cc+4dg$ surpasse bg, c'est à dire, en mettant pour b sa valeur $\frac{\overline{b+g}^2}{4}$, & pour g sa valeur a, lorsque $cc+4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$; & du second lorsqu'il est moindre. Et la construction sera toûjours possible.

2°. Si le premier axe de l'Hyperbole donnée surpasse son parametre. On se servira dans la construction du Problême de son premier axe, lorsque $cc+4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$; car il suit de là que $cc+4dg$ surpasse bg, c'est à dire (en multipliant par $\frac{a}{g}$ & mettant pour b sa valeur $\frac{\overline{b+g}^2}{a}$) que $\frac{acc}{g}+4ad$ surpasse $\overline{b+g}^2$, puisque dans cette supposition g $(\frac{ap}{2t})$ étant moindre que a, la quantité $\frac{acc}{g}+4ad$ sera plus grande que $cc+4ad$, & $\overline{b+g}^2$ sera moindre que $\overline{b+a}^2$. Au contraire lorsque $cc+4ad$ est moindre que $\overline{b+a}^2$, il faudra se servir du second axe; car il suit de là que $cc+4dg$ est moindre que bg, ou que $\frac{acc}{g}+4ad$ est moindre que $\overline{b+g}^2$

puisque $2t$ marquant à present le second axe qui est moindre que son parametre p la quantité $\frac{ap}{2t}$ est ici plus grande que a. D'où l'on voit que la construction est toujours possible, non seulement lorsque l'Hyperbole donnée est équilatere, mais encore lorsque le premier axe est plus grand que son parametre.

3°. Si le premier axe est moindre que son parametre. Il faudra necessairement lorsque $cc + 4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$, se servir du premier axe ; car si l'on employoit le second, il faudroit que $cc + 4dg$ fût moindre que bg, ou que $\frac{acc}{g} + 4ad$ fût moindre que $\overline{b+g}^2$; ce qui ne peut être, puisque $2t$ qui exprimeroit alors le second axe étant plus grand que p, la quantité g $(\frac{ap}{2t})$ seroit moindre que a. Mais en se servant du premier axe, il peut arriver que $\frac{acc}{g} + 4ad$ soit moindre que $\overline{b+g}^2$ puisque g $(\frac{ap}{2t})$ est plus grand que a ; & alors il est évident que la construction du Problême devient impossible, parce que la valeur de f $\left(\frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg-bg}}\right)$ renferme une contradiction. De même lorsque $cc + 4ad$ est moindre que $\overline{b+a}^2$, il faut necessairement se servir du second axe ; & comme alors la valeur de g $(\frac{ap}{2t})$ est moindre que a, il peut arriver que $\frac{acc}{g} + 4ad$ soit plus grand que $\overline{b+g}^2$, & qu'ainsi la valeur de f $\left(\frac{2gt}{\sqrt{bg-cc-4dg}}\right)$ soit imaginaire.

Il est donc évident qu'il peut arriver une infinité de cas, où la construction de l'égalité proposée dans le Problême devient impossible ; & cela lorsque le premier axe de l'Hyperbole donnée est moindre que son parametre, car autrement elle reussira toûjours.

COROLLAIRE I.

398. Si l'on prenoit dans le Problême precedent la quatriéme équation au lieu de la cinquiéme, & qu'on fit la construction de même en se servant de l'Ellipse qui est le lieu de cette équation, au lieu de l'Hyperbole qui est le lieu de la cinquiéme : il est visible que l'on construiroit l'égalité proposée z^4 &c. par le moyen d'un cercle donné & d'une Ellipse semblable à une donnée ; ou avec une Ellipse donnée & un cercle.

COROLLAIRE II.

399. Il est évident qu'on peut rendre la construction precedente generale pour toutes sortes d'égalités du troisiéme & du quatriéme degré, en observant 1°. De faire évanoüir le second terme de l'égalité donnée, lorsqu'elle en a un ; de la multiplier ensuite par sa racine z lorsqu'elle n'est que du troisiéme degré ; & de prendre un plan ab égal à tous les plans qui multiplient zz, un solide aac égal à tous les solides qui multiplient z, & enfin un sursolide a^3d égal à tous les sursolides donnés. 2°. D'effacer dans les valeurs de AD, DC, CF, AH, IH, LK, les termes où se trouve b lorsque zz ne se rencontre point dans l'égalité donnée, ceux dans lesquels se rencontrent c ou d lorsque le quatriéme ou le cinquiéme terme manquent : & de changer de signes tous les termes où b se rencontre avec une dimension impair, si le troisiéme terme de l'équation donnée a un signe different du troisiéme de la precedente ; comme aussi ceux dans lesquels c ou d se rencontrent avec une dimension impaire lorsque le quatriéme ou le cinquiéme terme ont des signes differens des quatriéme & cinquiéme de l'égalité precedente. 3°. De prendre du côté de PM ces lignes lorsque leurs valeurs sont positives, & du côté opposé lorsquelles sont negatives.

REMARQUE.

400. On peut toûjours rendre la construction precedente plus simple dans les égalités particulieres qu'on se propose de construire, en faisant en sorte que a soit égal à b; car il n'y a qu'à reduire l'égalité donnée sous cette forme $z^4 \mp aazz \mp aacz \mp a^3 d = o$, au lieu de cette autre $z^4 \mp abzz \mp aacz \mp a^3 d = o$. Ce qui a empêché de le faire d'abord, c'est qu'on avoit en vûë de rendre la construction du Problême generale pour tous les cas, comme l'on vient de faire dans le Corollaire precedent, & que pour cet effet il falloit que chaque terme de l'égalité renfermât des lettres differentes b, c, d, au premier degré.

PROPOSITION VI.

Problême.

401. TROUVER *les racines de l'égalité* $z^4 - bz^3 - aczz + aadz + aahh = o$, *par le moyen d'une Hyperbole donnée entre les Asymptotes, & d'un cercle.* FIG. 222.

Ayant fait $z = \frac{ax}{f}$, on transformera l'égalité donnée en cette autre $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{cff}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{hhf^4}{aa} = o$. Ayant mené d'un point quelconque M de l'Hyperbole donnée qui a pour centre le point A, une parallele MP à l'une des Asymptotes AQ, & qui rencontre l'autre au point P, on nommera les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y; lesquelles font entr'elles un angle donné APM, & on aura par la proprieté de l'Hyperbole $xy = mm$, en supposant que mm en soit la puissance. Maintenant si l'on prend $f = m\sqrt{\frac{a}{h}}$, on aura $hff = amm$, & $\frac{hhf^4}{aa} = m^4 = xxyy$: & mettant à la place de $\frac{hhf^4}{aa}$ qui est le dernier terme de l'égalité precedente sa valeur

$xxyy$, & divisant ensuite par xx, on trouvera $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df^3}{ax} + yy = 0$, qui se change (en mettant dans le terme $\frac{df^3}{ax}$ à la place de x sa valeur $\frac{bff}{ay}$ trouvée par le moyen de l'équation $xy = mm = \frac{bf}{a}$) en cette autre $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df}{b}y + yy = 0$, dont le lieu est * un cercle lorsque l'angle APM est droit.

* Art. 328. & 329.

Mais lorsque l'angle APM n'est pas droit, ou (ce qui revient au même) lorsque l'Hyperbole donnée n'est pas équilatere, il est évident que le lieu de la derniere équation n'est plus un cercle, mais une Ellipse. C'est pourquoi afin de trouver une équation dont le lieu soit un cercle, je prens sur l'Asymptote AP la partie $AB = 2a$: & ayant mené BE parallele à l'autre Asymptote AQ, je tire du centre A la perpendiculaire AE sur BE: & nommant les données BE, g; AE, e; je multiplie l'équation $xy - mm = 0$, dont l'Hyperbole donnée est le lieu, par $\frac{g}{a}$; & j'ai $\frac{gxy}{a} - \frac{gmm}{a} = 0$. J'ajoûte ensuite cette équation à la precedente lorsque l'angle fait par les Asymptotes est aigu, & je l'en retranche lorsqu'il est obtus comme je le suppose dans cette figure: cela me donne $yy - \frac{g}{a}xy + \frac{df}{b}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff+gmm}{a} = 0$, dont le lieu est un cercle * qui se construit ainsi.

* Art. 327. & 329.
FIG. 222.

Soit prise sur l'Asymptote AQ la partie $AD = \frac{df}{2b}$ du côté opposé à PM: soit tirée parallelement à AE, la ligne $DC = \frac{bf}{e} - \frac{dgf}{2eb}$ du côté de PM lorsque cette valeur est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative: Enfin du centre C & du rayon $CM = \sqrt{\overline{AC}^2 + \frac{cff-gmm}{a}}$ soit décrit un cercle. Je dis qu'il coupera l'Hyperbole donnée & son opposée en des points M, d'où ayant mené des paralleles MP à l'Asymptote

AQ; les parties AP de l'autre Asymptote exprimeront les racines de l'égalité $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{eff}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{bbf^4}{aa} = 0$: sçavoir celles qui sont du côté de PM, les vraies; & celles qui sont du côté opposé, les fausses.

Car par la proprieté du cercle, on trouve cette équation $yy - \frac{g}{a}xy + \frac{df}{b}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{eff + gmm}{a} = 0$ qui se reduit (en mettant pour xy sa valeur mm) à cette autre $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{eff}{a} + \frac{df}{b}y + yy = 0$, dans laquelle mettant enfin pour y sa valeur $\frac{mm}{x}$ ou $\frac{bff}{ax}$, & pour yy le quarré de cette valeur, on trouve l'égalité même proposée $x^4 - \frac{bf}{a}x^3$ &c.

Si l'angle fait par les Asymptotes étoit aigu; il faudroit changer dans les valeurs de AD & de CM, les signes des termes où g se rencontre, dont la raison est que BB (g) devient negative de positive qu'elle étoit. Mais lorsque l'Hyperbole est équilatere, il faut effacer les termes où g se rencontre & mettre pour e sa valeur $2a$ parce que AE tombe alors sur AB: ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

Lorsqu'on a les differentes valeurs de x, il est évident qu'on a aussi celles de z, en faisant $z = \frac{ax}{f}$. Et c'est ce qui etoit proposé.

COROLLAIRE I.

402. Si le dernier terme de l'égalité proposée du quatriéme degré, avoit le signe —, il est clair qu'en operant comme ci-dessus, on trouveroit une équation dans laquelle le terme yy auroit le signe —, & dont le lieu par consequent ne seroit pas un cercle, mais * une Hyperbole. D'où l'on voit que cette methode ne peut servir que pour les égalités du quatriéme degré qui ont leur dernier terme avec le signe +. * Art. 332.

COROLLAIRE II.

403. ON pourra toûjours en se servant de la methode precedente, resoudre toute égalité donnée du troisiéme degré $x^3 \mp nxx \mp apx \mp aaq = 0$; par le moyen d'une Hyperbole donnée entre ses Asymptotes, & d'un cercle. Car la multipliant par $x + r$ lorsqu'il y a $+ aaq$, & par $x - r$ lorsque c'est $- aaq$, on la changera toûjours en cette autre du quatriéme degré.

$$\begin{array}{llllll} x^4 & \mp nx^3 & \mp apxx & \mp aaqx & + aaqr & = 0. \\ & \mp r & \mp nr & \mp apr & & \end{array}$$

dont le dernier terme $aaqr$ aura toûjours le signe $+$, & qui sera par consequent du nombre de celles qu'on peut construire de la maniere precedente.

Mais on abregera beaucoup la construction en observant 1°. De prendre pour l'unité arbitraire a la ligne m racine de la puissance de l'Hyperbole donnée, qui est le lieu de l'équation $xy = mm = aa$, puisque $m = a$. 2°. De profiter de l'indéterminée r pour égaler le dernier terme $aaqr$ avec $a^4 = xxyy$: ce qui donne $r = \frac{aa}{q}$. 3°. Que le cercle qui doit déterminer par ses intersections les racines de l'égalité coupera necessairement l'Hyperbole lorsqu'il y a $- aaq$, & son opposée lorsque c'est $+ aaq$, en un point K, d'où ayant mené une parallele KH à l'Asymptote AQ, la partie AH de l'autre Asymptote doit être égale à r, puisque l'égalité du quatriéme degré a pour une de ses racines $x = \mp r$. De là on tire cette construction qu'il est facile de rendre generale pour toutes les égalités du troisiéme degré.

FIG. 223. Je suppose que l'angle fait par les Asymptotes de l'Hyperbole donnée soit aigu, & qu'ayant pris pour l'unité arbitraire a la racine de la puissance de l'Hyperbole donnée, on ait réduit l'égalité donnée du troisiéme degré sous cette expression $x^3 - nxx - apx - aaq = 0$. Ayant pris sur l'Asymptote AP la partie $AB = 2a$, & mené BE parallele à l'autre Asymptote AQ, on tire

du centre A la perpendiculaire AE ſur BE; & ayant pris ſur AQ la partie $AL = q$ du côté de PM, parce qu'il y a $-aaq$ dans l'égalité donnée, on tirera LK parallele à AP, & qui rencontre l'Hyperbole au point K. Cela fait, on nommera les données BE, g; AE, e; LK, r; & on prendra ſur l'Aſymptote AQ la partie $AD = \frac{fr}{2a} - \frac{1}{2}q = \mp d$ pour abreger, & on tirera $DC = \frac{an + ar \mp dg}{e}$ parallele à AE, en obſervant de prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorſque leurs valeurs ſont poſitives & du côté oppoſé lorſqu'elles ſont negatives. On décrira enfin du centre C, & du rayon CK, un cercle qui coupera les Hyperboles oppoſées en des points M, d'où ayant mené des droites MP paralleles à l'Aſymptote AQ; les parties AP de l'autre Aſymptote ſeront les racines de l'égalité propoſée $x^3 - nxx - apx - aaq = 0$.

Car prolongeant les droites MP, KH, juſqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne DC auſſi prolongée, s'il eſt neceſſaire aux points G, F; on aura (à cauſe des triangles rectangles CFK, CGM) ces deux égalités $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{CM}^2$, & $\overline{FK}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{CK}^2$: & par conſequent $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$, puiſque les lignes CM, CK, ſont rayons d'un même cercle. Or par la conſtruction (je ſuppoſe ici pour éviter l'embarras des ſignes $+$ & $-$, que $\frac{fr}{2a} - \frac{1}{2}q = + d$, c'eſt à dire, que cette valeur eſt poſitive) GM ou $PM + PG = y + \frac{g}{2a}x + d$, CG ou $DG - DC = \frac{ex}{2a} - \frac{an - ar - dg}{e}$, FK ou $KH + HF = q + \frac{g}{2a}r + d$, CF ou $CD - DF = \frac{an + ar + dg}{e} - \frac{er}{2a}$. C'eſt pourquoi mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques dans l'égalité precedente $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$ on en formera d'abord celle-ci $yy + \frac{g}{a}xy + 2dy + \frac{gg + ee}{4aa}xx$

$-nx-rx=qq+\frac{g}{a}rq+2dq+\frac{gg+ee}{4aa}rr-nr-rr$, en s'épargnant la peine d'écrire de part & d'autre les quarrés de d & de $\frac{an+ar+dg}{e}$ qui se détruisent mutuellement. Si l'on considere à present qu'à cause de l'Hyperbole, le rectangle $xy=rq$, & qu'à cause du triangle rectangle AEB le quarré $4aa=gg+ee$, on changera l'équation precedente en celle-ci $yy+2dy+xx-nx-rx=qq+2dq-nr$, dans laquelle mettant d'abord à la place de $2d$ sa valeur $\frac{pr}{a}-q$, & ensuite à la place de y & yy leurs valeurs $\frac{aa}{x}$ & $\frac{a^4}{xx}$, & ordonnant l'égalité il vient

$$\begin{array}{l} x^4-nx^3-apxx-aaqx+a^4=0, \\ \quad\;\; -r \quad\;\; +nr \quad\;\; +apr \end{array}$$

qui étant divisé par $x-r$, donne enfin $x^3-nxx-apx-aaq=0$, qu'il falloit construire.

Pour rendre cette construction generale il faut observer, 1°. De prendre la partie AL sur l'Asymptote AQ du côté opposé à PM lorsqu'il y a $+aaq$ dans l'égalité donnée; & de changer de signes les termes où q & r se rencontrent dans les valeurs de AD, DC, 2°. De changer de signes le terme où p se rencontre dans la valeur de AD lorsqu'il y a $+apx$ dans l'égalité donnée, & de l'effacer lorsque ce terme y manque : il faut faire la même chose à l'égard du terme où n se rencontre dans la valeur de DC, lorsqu'il y a $+nxx$. 3°. De changer de signe le terme où g se rencontre dans la valeur de DC, lorsque l'angle fait par les Asymptotes est obtus, & de l'effacer lorsqu'il est droit, en observant alors que $e=2a$.

REMARQUE.

404. L'ALGEBRE nous fournit des moyens faciles pour transformer toute égalité du quatriéme degré, en une autre du même degré dont les signes des termes soient alternatifs. Or comme alors son dernier terme

aura toûjours le signe +, il est visible qu'en se servant de cette preparation lorsque le dernier terme de l'égalité qu'on veut construire a le signe —, on rend la methode du Problême generale pour toutes sortes d'égalités du quatriéme degré. Mais parce que toutes les racines réelles d'une égalité, sont vraies, lorsque les signes de ses termes sont alternatifs; il s'ensuit qu'on n'a besoin alors que de l'Hyperbole donnée, puisque son opposée qui ne sert que pour les racines fausses devient inutile.

PROPOSITION VII.

Problême.

405. SOIT *proposée à construire l'égalité du sixiéme degré* $x^6 - bx^5 + acx^4 \mp aadx^3 + a^3exx - a^4fx + a^5g = 0$, *ou* $x^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + exx - fx + g = 0$ *(en sousentendant la ligne a qui rend le nombre des dimensions égal dans chaque terme, & que l'on regarde comme l'unité)*; *par le moyen d'un cercle, & d'un lieu du troisiéme degré.*

Je prends pour le lieu du troisiéme degré $x^3 - mxx - nx + = q - pxy$, dans lequel les quantités m, n, p, q, que l'on regarde comme données, se doivent determiner d'une maniere convenable pour satisfaire au Problême; ce que je fais en cette sorte: en quarrant chaque membre, j'ai

$$x^6 - 2mx^5 + mmx^4 + 2mnx^3 + nnxx - 2nqx + qq = ppxxyy,$$
$$\qquad\qquad - 2n \qquad + 2q \qquad - 2mq$$

& comparant les termes $-2mx^5$, $-2nqx$, $+qq$, avec leurs correspondans dans la proposée $-bx^5$, $-fx$, $+g$, je trouve $m = \frac{1}{2}b$, $q = \sqrt{g}$, $n = \frac{f}{2\sqrt{g}}$; & par consequent $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq = x^6 - bx^5 - fx + g$. Si l'on met à present à la place de $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq$ sa valeur $ppxxyy - mmx^4$ &c. trouvée par le moyen de l'équation precedente, & à la place de $x^6 - bx^5 - fx + g$ sa valeur $-cx^4 - dx^3$ &c. trouvée par le moyen de l'égalité donnée, & qu'ayant divisé par xx, on transf-

pose toutes les quantités du même côté, on formera cette équation

$$\begin{array}{llll} ppyy & - mmxx & - 2mnx & - nn = o, \\ & + 2n & - 2q & + 2mq \\ & + c & + d & + e \end{array}$$

* Art. 318. & 329. dont le lieu sera * un cercle si la quantité $c + 2n - mm$ (qui multiplie le quarré xx) est positive, & qu'on prenne $pp = c + \frac{f}{\sqrt{g}} - \frac{1}{4}bb$; car divisant par pp, & faisant pour abreger $2r = \frac{2mn+2q-d}{pp}$ & $ss = \frac{2mq+e-nn}{pp}$ ou $\frac{nn-2mq-e}{pp}$, on aura $yy + xx - 2rx \mp ss = o$: sçavoir $+ ss$ lorsque $2mq + e$ surpasse nn, & $- ss$, lorsqu'il est moindre.

Pour construire la ligne courbe qui est le lieu de la premiere équation $x^3 - xx - nx + q = - pxy$, je suppose à l'ordinaire deux lignes droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y) qui fassent entr'elles un angle droit APM; & je tire par l'origine A des x, une ligne droite indéfinie AQ parallele à PM, sur laquelle ayant pris du côté de PM la partie $AG \frac{n}{p}$, & du côté opposé la partie $GB = \frac{q}{mp}$, je mene du côté de PM la droite $BC = m$, perpendiculaire à AQ. Cela fait, je décris sur un plan separé une Parabole MEM qui ait pour parametre de son axe la ligne $p = \sqrt{c + 2n - mm}$, & ayant placé ce plan sur celui-ci en sorte que l'axe de la Parabole se confonde avec la ligne AQ & que la Parabole s'étende vers le côté opposé à PM, je prends sur cet axe depuis son origine E vers le dedans de la Parabole la partie $EF = BG = \frac{q}{mp}$.

Fig. 224.

Je me sers enfin d'une longue regle indéfinie CF mobile autour du point fixe C, & qui passe toûjours par le point F, & la faisant tourner autour du point C, en sorte qu'elle fasse glisser la partie EF de l'axe de la Parabole le long de la ligne AQ. Je dis que les deux intersections continuelles M, M, de cette regle avec la Parabole MEM décriront dans ce mouvement deux lignes courbes qui seront le lieu qu'on

qu'on demande. Car par la construction AB ou $AG - GB = \frac{n}{p} - \frac{q}{mp}$, & par la proprieté de la Parabole $EQ = \frac{xx}{p}$ puisque AP ou $MQ = x$. Or les triangles semblables FQM, MDC, donnent FQ ou $EQ - EF$ $\left(\frac{xx}{p} - \frac{q}{mp}\right)$. $QM\,(x)$ :: DM ou $PM - AB \left(y + \frac{q}{mp} - \frac{n}{q}\right)$. $CD\,(m - x)$. Donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$. Et si l'on prend successivement les points M dans les trois angles qui suivent celui-ci, on trouvera toûjours la même équation, en observant de faire $AP = -x$ & $PM = -y$ lorsque les points P & M tombent du côté opposé à celui-ci : de sorte que ces deux lignes courbes, qu'on peut appeller *conchoïdes paraboliques*, seront le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y, qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x, dans l'égalité $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$.

Pour construire le cercle qui est le lieu de la seconde équation $yy + xx - 2rx \mp ss = 0$, il n'y a qu'à prendre sur la droite indéfinie AP la partie $AH = r$ du côté de PM lorsque la valeur de r est positive ; & du côté opposé lorsqu'elle est negative ; ensuite du centre H & du rayon $HM = \sqrt{rr \pm ss}$, sçavoir $-ss$, lorsqu'il y a $+ss$ dans l'équation, & $+ss$ lorsque c'est $-ss$, décrire un cercle ; car à cause du triangle rectangle HPM, on aura toûjours $\overline{HM}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{PM}^2$, c'est à dire en mettant les valeurs analytiques, & transposant tous les termes d'un côté $yy + xx - 2rx \mp ss = 0$.

Je dis maintenant que si des points M où ce cercle rencontre les conchoïdes paraboliques on mene des perpendiculaires MQ sur la droite indéfinie AQ ; ces lignes seront les racines de l'égalité proposée : sçavoir celles qui tombent à droit, les vraies ; & celles qui tombent à gauche, les fausses. Car menant des paralleles MP à AQ, on trouve par la proprieté des conchoïdes cette équation

$x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, c'est à dire, en quarrant chaque membre, $ppxxyy = -x^6 - 2mx^5$ &c; & par la proprieté du cercle, cette autre $yy + xx - 2rx \mp ss = o$, laquelle étant multipliée par $ppxx$ donne $ppxxyy = -ppx^4 + 2pprx^3 \pm ppssxx$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $ppxxyy$, on formera une égalité dans laquelle si l'on met à la place de $2r$, ss, pp, m, n, q, leurs valeurs, on retrouvera l'égalité proposée $x^6 - bx^5$ &c.

S'il y avoit dans l'égalité proposée $-dx^3$ au lieu de $+dx^3$, il est visible qu'en prenant alors $2r = \frac{2mn + 2q + d}{pp}$, le reste de la construction ne changeroit point, puisque d ne se rencontre que dans la valeur de r. Et comme alors tous les signes des termes de l'égalité proposée sont alternatifs; c'est une maxime reçûë en Algebre que toutes ses racines réelles seront vraies; c'est à dire, que si cette égalité a deux racines réelles & quatre imaginaires, les deux réelles seront vraies; si elle en a quatre réelles & deux imaginaires, les quatre seront vraies; & enfin si toutes les six sont réelles, elles seront toutes vraies. D'où l'on voit qu'on n'a besoin alors que de la conchoïde qui est décrite par la moitié de la Parabole qui tombe du côté du point fixe C, puisque l'autre ne sert que pour les racines fausses.

S'il arrivoit que la valeur du rayon du cercle fût nulle ou imaginaire, ou enfin si petite qu'il ne touchât, ni ne coupât les deux conchoïdes en aucun point; ce seroit une marque infaillible que toutes les racines de l'égalité seroient imaginaires. S'il les coupoit en six points, toutes les racines seroient réelles. Et enfin s'il ne les coupoit qu'en quatre ou en deux, il n'y auroit que quatre ou deux racines réelles, & les autres seroient imaginaires. Il faut toûjours prendre garde que si le cercle touchoit l'une des conchoïdes en quelque point, on doit regarder ce point comme s'il réünissoit deux points infiniment proches, en sorte que l'égalité proposée auroit deux racines égales à la perpendiculaire menée de ce point sur BE.

REMARQUE I.

406. Il suit de la description des deux conchoïdes paraboliques, 1°. Qu'elles ont pour Asymptote commune la droite BE infiniment prolongée de part & d'autre. 2°. Qu'une des conchoïdes passe par le point fixe C, & qu'alors la regle CF la touchera en ce point ; puisque le point M se reünissant au point C, la regle passe par deux points infiniment proches de cette ligne courbe. 3°. Que lorsque le point F tombe sur B, la regle CF qui décrit par les intersections M, M, avec la Parabole les conchoïdes, tombe sur CB ; & qu'ainsi la ligne MFM devient la double ordonnée qui part du point F : c'est à dire que la ligne CB rencontre les conchoïdes en deux points K, L, tels que BK & BL sont égales chacunes à l'ordonnée à l'axe de la Parabole qui part du point F. D'où il est clair que si BC étoit égale à cette ordonnée, le point K tomberoit alors sur le point C ; & qu'ainsi la ligne BC qui passeroit par deux points infiniment proches K, C de la conchoïde la toucheroit en se réünissant toute entiere dans le seul point C.

Il n'est pas necessaire de se servir de la Parabole MEM FIG. 225. pour trouver les points des conchoïdes ; car ayant pris sur BE la partie BO égale au parametre de la Parabole, & décrit d'un diametre quelconque OR plus grand que OB un cercle qui coupe BC aux points D, D ; on prendra sur ce diametre la partie RS égale à EF, & on tirera par le point fixe C les deux droites CM, CM, paralleles à DS, DS, qui rencontreront les paralleles DM, DM, à EB en des points M, M, qui seront aux deux conchoïdes. Car ayant prolongé CM jusqu'à ce qu'elle rencontre l'Asymptote BE au point F ; & mené MQ parallele à BC ; il est clair que les triangles rectangles MQF, DBS, seront égaux, & qu'ainsi FQ est égale à BS. Or ayant pris RS égale à EF ; on aura $EF + FQ$, ou $EQ = RS + SB$ ou RB ; & la Parabole EM qui a pour sommet le point E, & pour

parametre une ligne égale à BO, passera par le point M; puisque par la proprieté du cercle le quarré de BD ou MQ, est égal au rectangle de BR ou EQ par le parametre de BO; ce que donne aussi la proprieté de la Parabole. D'où il suit que le point M trouvé par cette construction, n'est pas different de celui que donneroit l'intersection de la regle CF avec la demie Parabole EM. *Et c'est ce qu'il falloit démontrer.*

Si le point D étoit donné, il ne faudroit pour avoir le point R, que mener DR perpendiculaire à OD; & le reste de la construction ne changeroit point.

J'avertirai ici en passant, 1°. Que si l'on prend sur BC du côté du point C, une partie BD égale à la vraie racine de l'egalité du troisiéme degré $x^3 - \frac{2}{3}mxx - \frac{1}{3}mnp = o$ (les données $BC = m$, $Et = n$, $BO = p$); & qu'on trouve ensuite le point M comme l'on vient d'enseigner: ce point sera plus éloigné de la droite BC que tous les autres points de la portion KMC, de sorte que la tangente qui passe par ce point sera parallele à BC. 2°. Que si l'on prend sur BC prolongée de l'autre côté du point B, une partie BD égale à la vraie racine de l'egalité $x^3 - mnp = o$; le point M de la conchoïde, qui repond au point D, en sera le point d'inflexion : c'est à dire le point où de concave elle devient convexe. Comme ceci dépend des principes que j'ai établis dans mon Livre des Infiniment petits, on doit le supposer comme vraie, & remetre à en chercher la raison après avoir lû ce Livre ou quelque chose d'équivalent, d'autant plus que cela est inutile pour la resolution des égalités du sixiéme degré dont il est ici question.

REMARQUE II.

407. Il est visible que pour décrire les deux conchoïdes paraboliques, il faut 1°. Que la ligne BC ($\frac{1}{3}b$) ait quelque grandeur, & qu'ainsi l'egalité proposée doit avoir un second terme. 2°. Que le terme q ne peut être

nul dans l'équation $x^3 - mxx - nx + q = - pxy$, puisqu'en divisant par x, elle deviendroit cette autre $xx - mx - n = - py$, dont le lieu est une Parabole ; d'où il est clair que le dernier terme g se doit trouver dans l'égalité proposée avec le signe $+$, puisque $q = \sqrt{g}$.

De plus si le terme fx avoit le signe $+$, on lui donneroit le signe $-$ en changeant aussi les signes du deuxiéme & du quatriéme terme ; ce qui ne troubleroit point l'égalité, mais changeroit seulement les racines fausses en vraies & les vraies en fausses. Et afin que le lieu de la deuxiéme équation pût être un cercle, il faudroit que $\frac{f}{\sqrt{g}} \mp c$ (sçavoir $+ c$ lorsqu'il y a $+ cx^4$, & $- c$ lorsqu'il y a $- cx^4$) surpassât $\frac{1}{4}bb$. D'où l'on voit que le terme fx manquant, il faut que le terme cx^4 ait le signe $+$, & que c surpasse $\frac{1}{4}bb$; & que si le terme cx^4 manque, $\frac{f}{\sqrt{g}}$ doit surpasser $\frac{1}{4}bb$.

Il est donc évident que ce sont là les conditions que doit avoir necessairement l'égalité proposée du sixiéme degré, afin qu'on la puisse construire immediatement par le moyen des conchoïdes paraboliques, & du cercle, comme l'on vient de faire la precedente.

REMARQUE III.

408. LORSQUE l'égalité donnée n'est què du cinquiéme degré, on peut souvent en l'élevant au sixiéme, lui donner en même temps toutes les conditions necessaires pour être construite immediatement. En voici quelques exemples.

Soit 1°. $x^5 - a^4b = 0$, où l'on suppose que a surpasse b. Je multiplie cette égalité par $x - b$, pour avoir celle du sixiéme $x^6 - bx^5 - a^4bx + a^4bb = 0$, qui a toutes les conditions requises dans la remarque precedente.

Soit 2°. $x^5 - 5aax^3 + 5a^4x - a^4b = 0$, dans laquelle a surpasse b. Je multiplie cette égalité par $x - b$, & j'ai $x^6 - bx^5 - 5aax^4 + 5aabx^3 + 5a^4xx - 6a^4bx + a^4bb = 0$, qui a toutes les conditions necessaires.

Soit 3°. $x^5 - ax^4 - 4aax^3 + 3a^3xx + 3a^4x - a^5 = 0$. Je multiplie cette égalité par $x - 4a$; ce qui me donne $x^6 - 5ax^5 + 19a^3x^3 - 9aaxx - 13a^5x + 4a^6 = 0$, qui est une égalité du sixiéme degré, dans laquelle toutes les conditions necessaires se rencontrent.

Il est bon d'avertir que la premiere égalité $x^5 - a^4b = 0$, sert à trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux extrêmes A, B; que la seconde $x^5 - 5aax^3$ &c. sert à diviser un angle donné en cinq parties égales; & enfin que la troisiéme $x^5 - ax^4$ &c. sert à inscrire dans un cercle donné un Polygone regulier de onze côtés: & c'est ce qu'on verra dans les articles du Livre suivant. Je vais donner la construction de la premiere de ces égalités, afin qu'on la puisse comparer avec celle qu'on trouve à la fin du troisiéme Livre de la Geometrie de M. Descartes.

FIG. 226. Ayant décrit une Parabole ME qui ait pour le parametre de son axe une ligne $p = \sqrt{aa - \frac{1}{4}bb}$, & pris du côté que l'on voit dans la figure les lignes $AG = \frac{aa}{2p}$, GB ou $EF = 4AG$, $BC = \frac{1}{2}b$, $AH = \frac{5aab}{4pp}$, & une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$; on décrira d'abord une conchoïde parabolique COM (comme l'on a enseigné dans l'article 404) à l'aide de la Parabole ME, & d'une longue regle CF qui tourne librement autour du point fixe C, & qui passe toûjours par le point F, pendant que la partie EF de l'axe de la Parabole glisse le long de la ligne AQ; & ensuite un cercle du centre H & du rayon $HM = \sqrt{\overline{AH}^2 \mp ss}$, sçavoir $+ss$ lorsque $4bb$ surpasse aa, & $-ss$ lorsqu'il est moindre. Je dis que si des points O, M, où ce cercle rencontre la conchoïde, on mene des perpendiculaires OR, MP, sur AP; les parties AR, AP, seront les racines de l'égalité $x^6 - bx^5 - a^4bx + a^4bb = 0$. Cela se prouve comme dans l'article 404.

On peut s'épargner la peine de trouver une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb-aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa-4bb}$; si l'on fait attention que le cercle décrit du centre *M*, doit couper la conchoïde *COM* en un point *O*, tel qu'ayant mené *OR* perpendiculaire sur *AP*, on a la partie $AR = b$; puisque l'une des racines de cette égalité est $x = b$. C'est pourquoi ayant pris sur *AP* la partie $AR = b$, & tiré *RO* perpendiculaire à *AP* & qui rencontre en *O* la conchoïde *COM*; il n'y a qu'à décrire du centre *H* & du rayon *HO* un cercle. Car il la coupera en un autre point *M*, tel, qu'ayant mené *MP* perpendiculaire sur *AP*, la ligne *AP* sera la plus grande des quatre moyennes proportionnelles qu'on demande. Comme le cercle décrit du centre *H* ne coupe la conchoïde qui passe par le point *C* qu'en deux points *O*, *M*, & ne rencontre point l'autre; il s'ensuit que l'égalité proposée $x^6 - bx^5$ &c. n'a que deux racines vraies *AR*, *AP*, & les quatre autres imaginaires.

Remarque. IV.

409. Lorsque l'égalité donnée du sixiéme degré n'a point les conditions necessaires pour être construite immediatement par la methode que l'on vient d'expliquer, ou bien qu'étant du cinquiéme degré, la remarque precedente se trouve inutile, on pourra se servir de la preparation qu'enseigne M. Descartes dans le troisiéme Livre de sa Geometrie. On y trouve la maniere de transformer toute égalité du cinquiéme ou du sixiéme degré en une autre du sixiéme, dans laquelle tous les termes se rencontrent avec des signes alternatifs, & où la quantité connuë du troisiéme terme surpasse le quarré de la moitié de la quantité connuë du second : ce qui rend la construction du Problême generale pour toutes sortes d'égalités du cinquiéme & du sixiéme degré. Je ne m'arrêterai point ici à expliquer cette preparation, parce qu'elle dépend de l'Algebre pure dont je n'ai point

entrepris de parler, & que d'ailleurs je vais donner dans la proposition suivante une construction generale pour toutes sortes d'égalités du cinquiéme & du sixiéme degré, qui ne suppose point d'autre preparation que celle de faire évanoüir le second terme.

PROPOSITION VIII.

Problême.

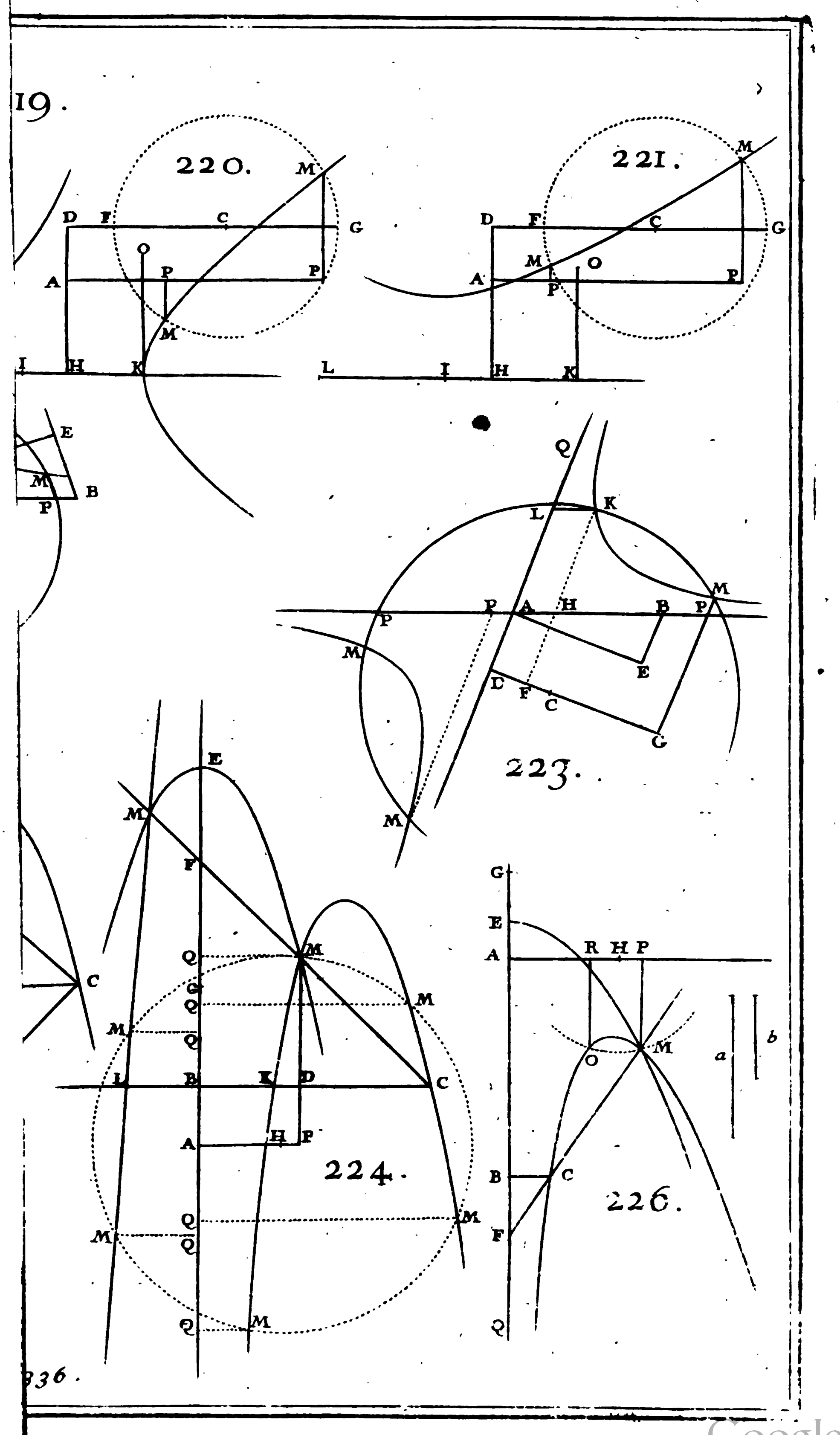
410. TROUVER *les racines de l'égalité* $x^6 - bx^4 - cx^3 + dxx - fx + g = 0$, *par le moyen d'une premiere Parabole cubique donnée, & d'une Section conique.*

FIG. 227. Soit $aay = x^3$ l'équation dont le lieu est la premiere Parabole cubique MAM ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$). Je mets dans l'égalité proposée à la place de x^6 sa valeur $a^4 yy$, à la place de x^4 sa valeur $aaxy$, & à la place de x^3 sa valeur aay; ce qui la change en cette équation du second degré $yy - \frac{b}{aa}xy - \frac{c}{aa}y + \frac{d}{a^4}xx - \frac{f}{a^4}x + \frac{g}{a^4}$ $= 0$, dont le lieu est une Ellipse * lorsque d surpasse $\frac{1}{4}bb$, c'est à dire, lorsque la quantité connuë qui multiplie xx surpasse le quarré de la moitié de la quantité connuë qui multiplie x^4, comme je le suppose ici. Et si l'on veut que la ligne qui fait l'office de l'unité dans l'égalité proposée, & qui y est sousentenduë, soit égale au parametre a de la Parabole cubique donnée; cette équation se changera en celle-ci $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = 0$, dont voici la construction.

* Art. 323.

Ayant pris sur la droite indéfinie AP la partie $AB = a$, on tirera parallelement à PM & du même côté les droites $BE = \frac{1}{2}b$, $AD = \frac{1}{2}c$: & on menera par le point A la droite AE (e), & par le point D une parallele DG à AE, sur laquelle on prendra du côté de PM la partie DC (s) $= \frac{2afe + bce}{4ad - bb}$, & de part & d'autre du point C les

parties



19.
220.
221.
223.
224.
226.
336.

parties CK, CL, égales chacune à $t = \sqrt{ss + \frac{ccee - 4agee}{4ad - bb}}$. Cela fait, du diametre LK ($2t$) qui ait pour parametre une ligne $KH = \frac{4adt - bbt}{2ee}$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM, on décrira l'Ellipse cherchée.

Maintenant si des points de rencontre de cette Ellipse avec la Parabole cubique donnée, on abaisse des lignes MP qui fassent avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, les parties AP de la droite indéfinie sur laquelle s'étend l'indéterminée x seront les racines cherchées, sçavoir celles qui tombent du côté où l'on a supposé PM en faisant la construction, les vraies ; & celles qui tombent du côté opposé, les fausses. Car par la proprieté de la Section conique il vient $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = o$, & par la proprieté de la Parabole cubique, $y = \frac{x^3}{aa}$; & mettant cette valeur à la place de y & son quarré à la place de yy dans l'équation precedente, on retrouve l'égalité donnée $x^6 - abx^4 - aacx^3$ &c. $= o$.

REMARQUE I.

411. TOUTE égalité du cinquiéme ou du sixiéme degré étant donnée, si l'on en fait évanoüir le second terme, & qu'après l'avoir multipliée par l'inconnuë x lorsqu'elle n'est que du cinquiéme degré, on se serve du parametre a de la Parabole cubique donnée pour reduire sous l'expression ab les quantités connuës qui multiplient x^4, sous l'expression aac celles qui multiplient x^3 &c ; il est visible qu'en faisant la substitution comme ci-dessus, on transformera toûjours l'égalité donnée en un lieu du second degré. D'où l'on voit qu'ayant une fois décrit avec exactitude une Parabole cubique qui ait pour parametre une ligne quelconque a, & dont l'angle APM que font les appliquées PM avec le diametre AP, peut être pris à volonté ; on pourra toûjours par

ſon moyen, en décrivant de plus une Section conique convenable, reſoudre toutes ſortes d'égalités du cinquiéme & du ſixiéme degré.

REMARQUE II.

412. LORSQU'APRÉS avoir fait évanoüir le ſecond terme d'une égalité donnée du cinquiéme & du ſixiéme degré, & l'avoir multipliée par l'inconnuë x ſi elle n'eſt que du cinquiéme ; la quantité connuë qui multiplie le quarré xx eſt poſitive, & ſurpaſſe le quarré de la moitié de celle qui multiplie x^4 : on arrivera toûjours en faiſant la ſubſtitution par le moyen de $aay = x^3$, à une équation du ſecond degré dont le lieu eſt une Ellipſe, comme l'on a vû dans ce Problême. Or l'on pourra toûjours faire en ſorte que cette Ellipſe devienne un cercle, mais alors la Parabole cubique ne peut plus être donnée. Voici comment il s'y faudra prendre.

* Art. 378. Ayant trouvé une ligne a * dont le quarré de quarré a^4 ſoit égal à la quantité connuë qui multiplie xx, on ſe ſervira de cette ligne a pour reduire ſous l'expreſſion ab toutes les quantités connuës qui multiplient x^4, ſous l'expreſſion aac celles qui multiplient x^3 &c ; ce qui reduira l'égalité donnée ſous cette forme $x^6 \pm abx^4 \pm aacx^3 + a^4xx \pm a^4fx \pm a^5g = o$. Et mettant a^4yy, $aaxy$ & aay à la place de x^6, x^4 & x^3, on trouvera cette équation du ſecond degré $yy \pm \frac{b}{a}xy \pm cy + xx \pm fx \pm ag$

* Art. 327. & 329. $= o$, dont le lieu ſera * un cercle, ſi l'on fait en ſorte que l'angle AEB ſoit droit ; ce qui eſt facile en cette maniere.

FIG. 228. Ayant pris ſur la droite indéfinie AP la partie $AB = a$, on décrira de cette ligne comme diametre un demi cercle AEB, du côté où l'on ſuppoſe que PM doit tomber, lorſqu'il y a $- \frac{b}{a}xy$, & du côté oppoſé lorſqu'il y a $+ \frac{b}{a}xy$. On portera ſur la demi circonfe-

rence de B en E, une ligne $BE = \frac{1}{2}b$; & ayant tiré AE (e), la ligne PM doit être parallele à BE, & on achevera le reste de la construction comme pour l'Ellipse, qui deviendra alors un cercle ; puisque l'angle CGM sera droit, & qu'à cause du triangle rectangle AEB il vient $ee = aa - \frac{1}{4}bb$, qui doit exprimer la raison du diametre LK à son parametre. La figure qui est ici à côté represente la construction de l'équation $yy - \frac{b}{a}xy - cy + xx - fx - ag = o$, qui n'est differente de celle du Problême qu'en ce que $d = a$.

Maintenant ayant pris sur la ligne AB autant de parties AP, AP, &c. qu'on voudra, & mené des paralleles PM, PM, &c. à BE; on prendra chaque PM égale à la quatriéme proportionnelle à sa correspondante AP & la donnée AB. Et faisant passer une ligne courbe MAM par tous les points M ainsi trouvés, il est évident qu'elle sera le lieu de l'équation $x^3 = aay$, & par consequent la premiere Parabole cubique qui par ses points d'intersection M, M, avec le cercle, servira à découvrir les racines AP, AP, de l'égalité proposée.

REMARQUE III.

413. COMME l'on a parlé souvent dans ce Livre des Paraboles de tous les degrés, & qu'on vient même d'employer la premiere Parabole cubique pour resoudre les égalités du cinquiéme & du sixiéme degré ; je crois qu'il n'est pas hors de propos d'examiner les differentes figures qu'elles peuvent avoir. Soient donc données de position deux lignes droites indéfinies BC, DE, qui s'entrecoupent au point A, & soit dans l'angle BAD une Parabole AM de tel degré qu'on voudra, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M une parallele MP à DE, qui rencontre BC au point P; & ayant nommé les indéterminées AP, x; PM, y; la donnée AB, 1; on ait toûjours $x^m = y^n$ (les lettres m & n marquent les exposans des puissances de FIG. 229.

x & y qui peuvent être tels nombres positifs entiers qu'on voudra ; & l'on suppose seulement que m surpasse n). Il est évident 1°. Que AP (x) étant nulle ou zero, PM (y) l'est aussi, & que plus AP (x) croît, plus aussi PM (y) augmente ; & cela à l'infini. 2°. Que la soutangente PT*
* Art. 237.
($\frac{n}{m}x$) est toûjours moindre que AP (x), puisque l'on suppose ici que n soit moindre que m. D'où il suit que la Parabole AM de tel degré qu'elle puisse être, passera toûjours par le point A ; qu'elle s'éloignera de plus en plus à l'infini de la droite BC que l'on regarde comme son diametre ; & enfin qu'elle tournera sa convexité du côté de ce diametre. Mais comme la ligne courbe AM qui tombe dans l'angle DAB, n'est qu'une portion de cette Parabole, il reste à examiner dans lequel des angles DAC, CAE, EAB, elle doit se continuer ; & pour cela il faut distinguer trois differens cas.

Premier cas. Lorsque l'exposant m de la puissance de x est un nombre pair, & l'exposant n de la puissance de y un nombre impair. La racine m de x^m sera $\mp x$, & la racine n de y^n sera seulement $+y$; car soit par exemple, $m=4$, & $n=3$, il est clair que le quarré de quarré où la puissance quatriéme de $\mp x$ est toûjours x^4, & qu'il n'en est pas de même du cube de $\mp y$; puisque le cube de $+y$ est y^3, & celui de $-y$ est $-y^3$. De là il est évident que AP (x) peut être positive & negative, & PM (y) toûjours positive ; d'où l'on voit que la Parabole AM doit se continuer dans l'angle DAC, qui est à côté de l'angle BAD, en sorte que si par un point quelconque K de la ligne AD, on tire une parallele à BC elle rencontrera la Parabole MAM en deux points M, M, qui seront également éloignés du point K. Telle est la Parabole ordinaire qui est le lieu de l'équation $xx=ay$, ou $xx=y$ en faisant le parametre $a=1$.
FIG. 229.

Second cas. Lorsque les exposans m & n sont des nombres impairs. La racine m de x^m sera seulement $+x$, & de même la racine n sera $+y$; mais parce que l'équation

$-x^m = -y^n$ eſt la même que $x^m = y^n$, & que la racine m de $-x^m$ eſt $-x$, & la racine n de $-y^n$ eſt $-y$; il s'enſuit que *AP* (x) peut être poſitive & negative de même que *PM* (y), en obſervant que lorſque *AP* eſt poſitive, *PM* l'eſt auſſi, & au contraire. D'où l'on voit que la Parabole *AM* doit alors ſe continuer dans l'angle *CAE* oppoſé au ſommet à l'angle *BAD*, dans une poſition toute ſemblable, mais renverſée ; en ſorte que prenant *AP* égale à *AP*, & menant *PM* qui faſſe avec *AP* l'angle *APM* égale à l'angle *APM* ; cette ligne *PM* rencontre la portion *AM* qui tombe dans l'angle *CAE*, en un point *M* tel que *PM* eſt égal à *PM*. Telle eſt la premiere Parabole cubique $x^3 = aay$, ou $x^3 = y$ en faiſant $a = 1$. FIG. 230.

Troiſiéme cas. Lorſque l'expoſant m de la puiſſance de x eſt un nombre impair, & l'expoſant n de la puiſſance de y un nombre pair. La racine m de x^m ſera toûjours $+x$, & la racine n de y^n ſera $\mp y$; car ſoit par exemple, *AM* une ſeconde Parabole cubique qui eſt le lieu de l'équation $x^3 = ayy$, ou $x^3 = yy$, il eſt clair que la racine cubique de x^3 eſt ſeulement $+x$, & que celle de yy eſt $\mp y$. D'où il ſuit que la Parabole *AM* doit ſe continuer dans l'angle *BAE* qui eſt à côté de l'angle *BAD* ; en ſorte que ſi l'on mene par un point quelconque *P* de la ligne *AB* une parallele à *DE*, elle rencontrera la Parabole entiere *MAM* en deux points *M*, *M*, également éloignés du point *P*. FIG. 231.

Or l'équation generale $x^m = y^n$ appartient toûjours à l'un de ces trois cas ; car ſi m & n étoient deux nombres pairs, on extrayeroit de part & d'autre la racine quarrée autant de fois qu'il ſeroit poſſible ; ce qui la reduiroit à une équation dont l'un des expoſans ſeroit neceſſairement impair. Et l'on peut toûjours ſuppoſer que m ſurpaſſe n ; car s'il étoit moindre, & qu'on eût par exemple, $aax = y^3$, on trouveroit en rapportant les points de la Parabole *AM* à ceux de la ligne *DE*, & nommant alors *AK*, x ; *KM*, y ; cette autre équation $x^3 = aay$ FIG. 232.

qui exprimeroit aussi la nature de la même Parabole *AM*, & dans laquelle l'exposant de la puissance de x est plus grand que celui de la puissance de y; de sorte qu'on pourroit faire alors le même raisonnement par rapport à la ligne *DE*, qu'on vient de faire par rapport à la ligne *BC*. De là il est évident que toutes les Paraboles de tel degré qu'elles puissent être, auront toûjours l'une des trois figures precedentes.

PROPOSITION IX.

Problême.

414. SOIT *proposée à construire l'égalité du huitiéme degré* $x^8 - bx^7 + cx^6 - dx^5 + ex^4 - fx^3 + gxx - hx + l = 0$, *dans laquelle aucun terme ne manque, par le moyen de deux lieux geometriques; l'un du second degré, & l'autre du quatriéme.*

Ayant pris $xx = ay$ pour le lieu du second degré, on substituëra à la place de x^8, x^7, x^6, x^5, x^4, x^3, & xx, leurs valeurs a^4y^4, a^3y^3x, a^3y^3, $aayyx$, $aayy$, ayx, ay, & en prenant la droite donnée a pour l'unité, on aura cette autre équation $y^4 - \frac{b}{a}xy^3 + cy^3 - dxyy + aeyy - afxy + aagy - aahx + a^3l = 0$ dont le lieu est du quatriéme degré, & des plus simples; puisque l'une des inconnuës x n'étant qu'au premier degré, on pourra en déterminer tous les points en ne se servant que de cercles & de lignes droites.

Si l'on construit à present la Parabole qui est le lieu de la premiere équation $xx = ay$, & qu'ayant pris pour y autant de differentes grandeurs que l'on voudra; on détermine les valeurs de x qui leur répondent dans la seconde équation; le lieu qui passera par les extrêmités de toutes les y, & qui sera par consequent celui de la seconde équation, déterminera par le moyen des points où il rencontre la Parabole, les valeurs cherchées des racines de l'équation donnée. Ce qui est visible; puisque mettant dans cette seconde équation pour y sa valeur

$\frac{xx}{a}$, & pour les puiſſances de y les puiſſances de cette valeur, on trouve l'équation donnée $x^8 - bx^7$ &c $= 0$.

COROLLAIRE I.

415. COMME l'unité a eſt arbitraire, on peut ſuppoſer qu'elle eſt donnée, & qu'ainſi la Parabole qui eſt le lieu de la premiere équation $xx = ay$ eſt donnée. Or il eſt évident qu'on pourra toûjours par le moyen de cette équation transformer toute égalité du ſeptiéme ou huitiéme degré, en une autre équation du quatriéme, dans laquelle l'inconnuë x ne ſe trouve qu'au premier degré. D'où il ſuit que toute égalité du ſeptiéme ou du huitiéme degré, dans laquelle ou tous les termes ſe rencontrent ou ſeulement une partie, ſe pourra toûjours conſtruire par le moyen d'une Parabole donnée & d'un lieu du quatriéme degré, dans lequel l'une des inconnuës ne ſe trouvera qu'au premier ; & cela ſans autre preparation que de prendre pour l'unité le parametre a de la Parabole donnée, afin de reduire ſous l'expreſſion ac les quantités connuës qui multiplient x^6, ſous l'expreſſion aad celles qui multiplient x^5, &c.

COROLLAIRE II.

416. ON prouvera de même que toute égalité du neuviéme ou du dixiéme degré ſe pourra toûjours conſtruire par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du cinquiéme degré dans lequel l'une des inconnuës ne ſe trouvera qu'au premier degré : que les égalités de l'onziéme & du douziéme degré ſe conſtruiront encore par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du ſixiéme degré ; & ainſi de ſuite pour les autres à l'infini.

PROPOSITION X.

Problême.

417. CONSTRUIRE *l'égalité du neuviéme degré* $x^9 - bx^7 + cx^6$ &c $= o$, *dans laquelle tous les termes se rencontrent excepté le second; par le moyen de deux lieux geometriques chacun du troisiéme degré.*

Ayant pris $x^3 = aay$ pour l'un des lieux du troisiéme degré, on substituëra à la place de x^9, x^7, x^6, &c. leurs valeurs a^6y^3, a^4xyy, a^4yy, &c, & l'on aura pour l'autre lieu du troisiéme degré, en prenant a pour l'unité;

$y^3 - \frac{b}{a} xyy + cyy$ &c $= o$ dans lequel l'inconnuë x ne peut monter qu'au second degré, puisqu'on suppose que par tout où il y a x^3 dans la proposée, on substituë à sa place aay.

Or il est visible que si l'on construit ce lieu avec la Parabole cubique, qui est le lieu de l'autre équation $x^3 = aay$; leurs points de rencontre détermineront les racines de l'égalité donnée.

COROLLAIRE.

418. TOUTE égalité du sixiéme, du huitiéme ou du neuviéme degré étant donnée, il est visible qu'aprés avoir fait évanoüir son second terme, & l'avoir multipliée par sa racine x lorsqu'elle est du huitiéme degré, & par son quarré xx lorsqu'elle n'est que du septiéme, on la transformera toûjours en un lieu du troisiéme degré en se servant de l'équation $x^3 = aay$ dont le lieu est une Parabole cubique donnée, & faisant la substitution comme ci-dessus : de sorte que cette maniere est generale pour toutes les égalités du septiéme, du huitiéme & du neuviéme degré. On trouvera de même que toute égalité du douziéme degré dont le second terme est évanoüi, se transformera en un lieu du quatriéme, en se servant encore de l'équation $x^3 = aay$; comme aussi celles du

du dixiéme & du onziéme degré en les élevant au douziéme.

Mais si l'on propose une égalité du seiziéme degré dans laquelle tous les termes se rencontrent, excepté le deuxiéme, on trouvera qu'en se servant du lieu du quatriéme degré $x^4 = a^3 y$, on la transformera en un lieu du cinquiéme. On trouvera de même qu'une égalité du vingtiéme degré se transformera en un lieu du sixiéme; en se servant encore du lieu du quatriéme degré $x^4 = a^3 y$; comme aussi celles du dix-septiéme, dix huitiéme & dix-neuviéme degré: que les égalités du vingt-cinquiéme degré dans lesquelles tous les termes se rencontrent, excepté le deuxiéme, se transformeront en un lieu du sixiéme degré, en se servant du lieu du cinquiéme $x^5 = a^4 y$; comme aussi toutes les égalités du vingt-uniéme, vingt-troisiéme & vingt-quatriéme degré. Et l'on peut continuer cette recherche autant qu'on voudra.

REMARQUE I.

419. IL est à propos de remarquer que si dans une égalité du seiziéme degré non seulement le second terme manquoit, mais le troisiéme & le sixiéme; le lieu du cinquiéme degré lequel joint avec celui du quatriéme $x^4 = a^3 y$ sert à construire l'égalité se transformeroit en un du quatriéme, & on peut faire des remarques semblables sur les égalités des degrés plus élevés. Mais quoiqu'il soit vrai de dire qu'une égalité du seiziéme degré dans laquelle il n'y a que le deuxiéme terme qui manque, ne se peut transformer qu'en un lieu du cinquiéme, si l'on employe à cet effet le lieu du quatriéme $x^4 = a^3 y$ qui n'a que deux termes; on n'en doit pas conclure en general, que les lieux les plus simples pour resoudre une équation complette du seiziéme degré, doivent être; l'un du quatriéme & l'autre du cinquiéme. Car au contraire, il me paroît évident que si l'on se sert d'un lieu du quatriéme degré composé de plusieurs termes à la

place de $x^4 = a^3 y$ qui n'en a que deux, on pourra choisir ce lieu en sorte qu'il servira à transformer l'égalité complette du seiziéme degré en un autre lieu du quatriéme. En voici la raison. Si l'on prend deux lieux du quatriéme degré dans l'un desquels l'inconnuë x monte au quatriéme degré, & dans l'autre l'inconnuë y, il est constant par les regles de l'Algebre, qu'en faisant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de ces deux équations, on arrivera à une égalité dans laquelle l'inconnuë x montera au seiziéme degré. Or comme deux lieux du quatriéme degré, peuvent avoir ensemble plus de seize termes, puisque chacun en peut avoir quinze differens, il s'ensuit qu'ils peuvent contenir toutes les quantités connuës de l'égalité donnée : ce qui suffit pour faire voir la possibilité de construire une égalité complette du seiziéme degré par deux lignes du quatriéme.

On doit de même penser que les deux lieux les plus simples pour construire une égalité complette du vingtiéme, dix-neuviéme, & dix-septiéme degré, seront, l'un du quatriéme, & l'autre du cinquiéme, parce que la reduite de ces deux lieux montera au vingtiéme degré, & qu'ils pourront contenir ensemble plus de termes que la proposée, & renfermer par consequent toutes les quantités connuës qui s'y rencontrent. Et si l'inconnuë avoit 21, 22, 23, 24, ou 25 dimensions dans l'égalité proposée, il faudroit deux lieux de cinq degrés chacun. De là on forme la regle suivante, qui sert à trouver les degrés des deux lieux qui peuvent resoudre une égalité proposée ; en sorte qu'ils soient les plus simples qu'il est possible.

Il faut extraire la racine quarrée de la plus haute dimension de l'inconnuë. Si elle est exacte, chacun des deux lieux doit avoir autant de degrés que cette racine contient d'unités ; & si elle ne l'est pas, ou le reste est égal, ou moindre que la racine, & alors l'un des lieux aura pour degré le nombre de la racine, & l'autre ce même nombre augmenté de l'unité : ou le reste est plus grand que la racine, & alors chacun des deux lieux aura

pour degré le nombre de la racine augmenté de l'unité.

Soit proposé, par exemple, de trouver les deux lieux les plus simples, qui peuvent resoudre une égalité, dont la plus haute dimension de l'inconnuë soit de trente-sept degrés. Comme la racine quarrée de 37 est 6, & que le reste 1 est moindre que ce nombre 6, il faudra que l'un des lieux soit du sixiéme degré, & l'autre du septiéme; on trouvera la même chose, si la plus haute dimension est 38, 39, 40, 41 & 42. Mais si elle étoit 43, comme la racine quarrée de 43 est 6, & que le reste 7 est plus grand que cette racine, il faudroit deux lieux qui fussent chacun du septiéme degré; & il en est de même si la plus haute dimension étoit 44, 45, 46, 47, 48 & 49.

REMARQUE II.

420. Il arrive quelquefois qu'on peut construire une égalité donnée par le moyen d'une seule & même courbe mise en deux differentes positions; & c'est ce qu'on verra clairement dans cet exemple.

Soit proposée à construire l'égalité du neuviéme degré $x^9 + a^8 x - a^8 b = o$, dans laquelle tous les termes moyens manquent excepté le penultiéme. Je prends l'équation $x^3 = aay$, dont le lieu est une Parabole cubique MAM qui a pour parametre la ligne droite donnée $AB = a$, & pour appliquées des lignes droites PM (y) qui font avec les parties correspondantes AP (x) de son axe ou diametre un angle pris à volonté APM que je suppose ici droit; & en cubant chaque membre, j'ai $x^9 = a^6 y^3$: ce qui change par la substitution l'égalité proposée en cette équation $y^3 = aab - aax$, dont le lieu se construit ainsi.

Soit prise sur AP prolongée du côté de P la partie $AC = b$; & ayant mené par le point C la droite indefinie CK parallele à PM, soit décrite une autre Parabole cubique MCM qui ait pour axe CK, & pour appliquées des droites KM paralleles à AP, & dont le pa- FIG. 233.

rametre $CD = a$. Je dis qu'elle ſera le lieu requis.

Car par la conſtruction MK ou $CP = b - x$, & par la proprieté de la courbe $CK^3 = MK \times \overline{CD}^2$, c'eſt à dire en termes analytiques $y^3 = aab - aax$. Or il eſt évident 1°. Que ſi des points M où cette derniere Parabole cubique MCM rencontre l'autre MAM, on mene des paralleles MP à CE; les parties AP exprimeront les racines x de l'égalité propoſée $x^9 + a^8 x - a^8 b = 0$. 2°. Que les Paraboles cubiques MCM, MAM, ſont préciſément les mêmes; puiſque leurs parametres AB, CD, ſont égaux, & que les angles APM, CKM, que font leurs appliquées avec leurs axes le ſont auſſi.

La ſituation des deux Paraboles cubiques MAM, MCM, fait connoître que l'égalité propoſée $x^9 + a^8 x - a^8 b = 0$, n'a qu'une racine réelle AP (x), qui eſt toûjours vraie & moindre que AC (b); de ſorte que les huit autres ſont imaginaires.

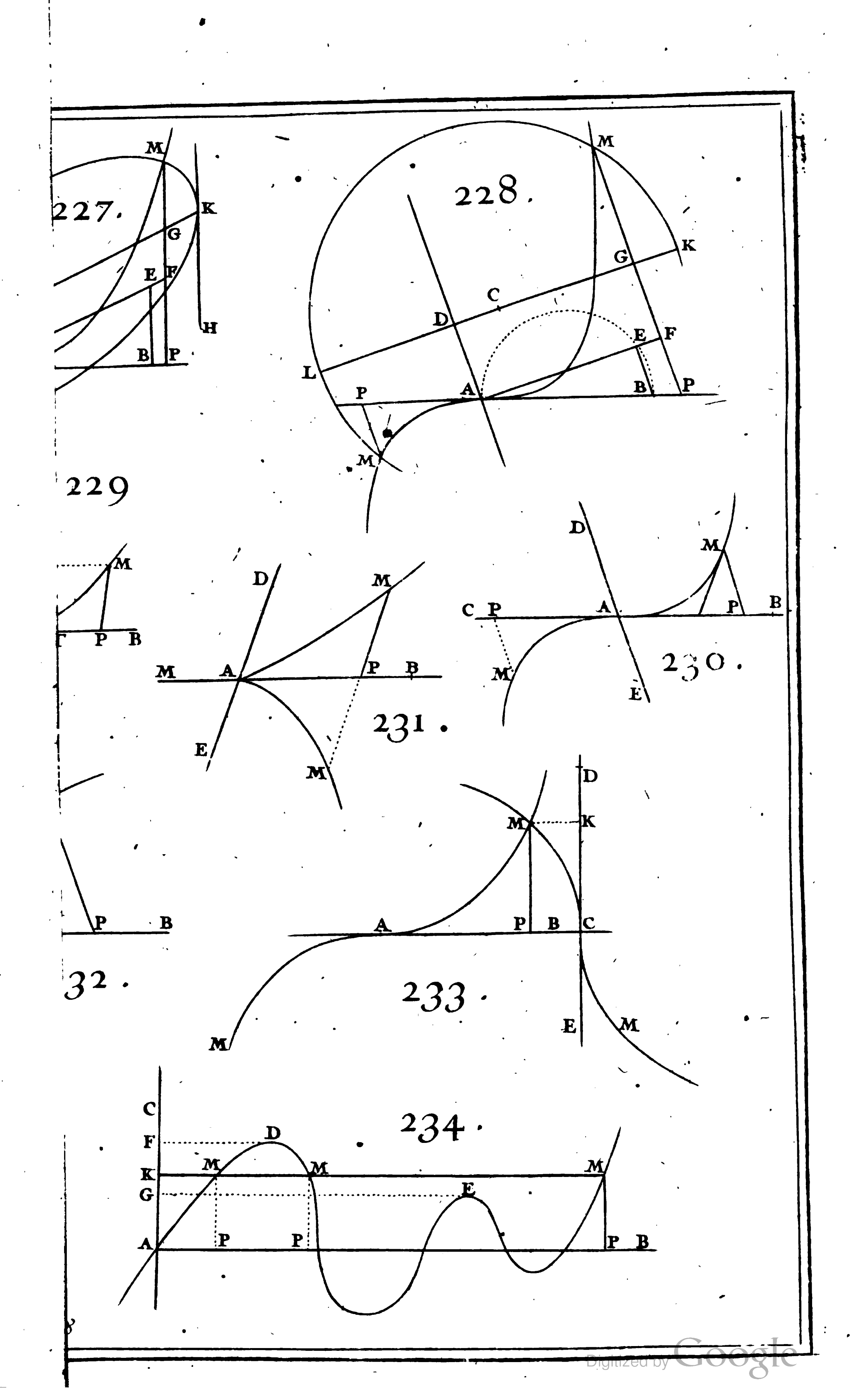
PROPOSITION XI.

Problême.

421. CONSTRUIRE *toute égalité de tel degré qu'elle puiſſe être, par le moyen d'une ligne droite, & d'un lieu du même degré, duquel lieu toutefois on puiſſe déterminer tous les points en n'employant que des lignes droites.*

Il faut mettre le dernier terme de l'égalité propoſée tout ſeul d'un côté en le rendant égal à tous les autres, & diviſer enſuite toute l'égalité par la ligne qui fait l'office de l'unité, repetée autant de fois qu'il ſera neceſſaire, afin que chaque terme n'exprime que des lignes: comme ſi l'on propoſoit $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3 ex - a^4 f = 0$, on auroit $f = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$.

FIG. 234. Cela fait, on prendra ſur une ligne droite indéfinie AB dont l'origine fixe ſoit au point A, une partie quelcon-



227.
M
K
G
E
F
H
B
P
228.
M
K
G
C
D
E
F
L
P
A
B
P
M
229
M
P
B
D
M
M
A
P
B
E
M
231.
D
M
C
P
A
P
B
M
E
230.
P
B
32.
D
M
K
A
P
B
C
233.
E
M
M
C
234.
F
D
K
M
M
M
G
E
A
P
P
P
B

que AP pour la valeur de x; & ayant mené parallelement à la ligne AC donnée de position une droite PM $= \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ (ce qui se peut toûjours faire * en n'employant que des lignes droites), son extremité M sera l'un des points d'une ligne courbe $ADEM$; dont les intersections M, M, M, &c. avec une ligne droite KM menée parallelement à AB par le point K tel que $AK = f$, détermineront des parties KM, KM, KM, &c. qui seront les valeurs cherchées de l'inconnuë x dans l'égalité donnée. * *Art.* 376.

Car menant les droites MP, MP, MP, &c. paralleles à AC, & nommant les indéterminées AP, x; PM, y; on aura par la proprieté de la courbe $ADEM$ cette équation PM $(y) = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ qui est un lieu du cinquiéme degré; & par la proprieté de la droite KM cette autre $y = f$. Ce qui, en substituant pour y sa valeur f, & multipliant par a^4, donne l'égalité même proposée $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3ex - a^4f = 0$.

Ces sortes de constructions peuvent être tres-utiles pour trouver les limites des égalités. Supposons, par exemple, qu'on ait une methode pour déterminer sur la ligne AC les parties AF, AG, telles que les droites FD, GE, paralleles à AB touchent la courbe en des points D, E; il est clair 1°. Que si AK (f) est moindre que AF & plus grande que AG, comme on le suppose dans cette figure, l'égalité proposée aura trois racines vraies KM, KM, KM, & les deux autres imaginaires; parce que la figure de la courbe est telle que la ligne KM la rencontrera en trois points, & jamais en davantage. 2°. Que si AK (f) est moindre que AG, la ligne KM coupera la courbe en cinq points; c'est à dire que l'égalité aura cinq racines vraies. 3°. Que si AK surpasse AF, l'égalité n'aura qu'une racine vraie, & les quatre autres imaginaires. 4°. Que si $AK = AF$, l'égalité aura trois racines vraies, dont il y en aura deux

égales entr'elles ; ſçavoir FD, FD. 5°. Et enfin que ſi $AK = AG$, l'égalité aura cinq racines vraies, dont il y en aura deux égales, ſçavoir GE, GE.

La même ligne courbe $ADEM$ étant continuée du côté du point A, ſervira à trouver les racines de l'égalité $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3ex + a^4f = 0$, qui ne differe de la précedente qu'en ce que le dernier terme a le ſigne $+$; ce qui fait voir qu'on doit mener alors la droite KM au deſſous de AB, puiſque ſon lieu doit être $y = -f$.

REMARQUE.

422. On peut varier la conſtruction précedente en differentes manieres ; car au lieu du dernier terme qu'on égale à tous les autres, on pourroit prendre tel autre des termes qu'on voudroit, ou même deux quelconques qui ſe ſuivent immediatement, & les diviſer enſuite d'une maniere convenable, afin que les égalant à l'inconnuë y, le lieu de l'équation ne fût que du premier degré. Soit par exemple, l'égalité du troiſiéme degré $x^3 - abx - aac = 0$; je fais $\frac{bx}{a} + c = \frac{x^3}{aa}$, & j'ai ces deux équations $x^3 = aay$, & $y = \frac{bx}{a} + c$, dont les lieux étant conſtruits ſeparement donneront les racines de l'égalité propoſée. Voici comment.

FIG. 235. Ayant pris à l'ordinaire pour inconnuës & indéterminées les deux droites AP (x). PM (y) qui font entr'elles un angle quelconque APM, ſoit décrite une premiere Parabole cubique MAM qui ſoit le lieu de la premiere équation $x^3 = aay$. Soit menée par le point A origine des x une ligne droite parallele à PM, ſur laquelle ſoient priſes les parties $AC = b$, $AD = c$, du côté où s'étend PM ; & ayant pris ſur AP prolongée du côté de A la partie $AB = a$, ſoit tirée par le point D une parallele indefinie à BC. Je dis que ſi des points M où elle rencontre la premiere Parabole cubique MAM, on mene des paralleles MP à AC ; les cou-

pées AP seront les racines de l'égalité donnée $x^3 - abx - aac = 0$.

Car menant DE parallele à AP, les triangles semblables BAC, DEM, donneront $BA(a)$. $AC(b)$ :: $DE(x)$. $EM = \frac{bx}{a}$, & par consequent $PM(y) = \frac{bx}{a} + c$, Or à cause de la premiere Parabole cubique MAM, l'on aura $x^3 = aay$. Si donc l'on met à la place de y sa valeur $\frac{bx}{a} + c$, on retrouvera l'équation donnée $x^3 - abx - aac = 0$.

S'il y avoit $+b$ dans l'égalité donnée, il faudroit prendre AC du côté opposé à PM, & il en est de même de AD lorsqu'il y a $+c$: de sorte que cette construction est generale pour toute égalité donnée du troisiéme degré. Car il est évident qu'après en avoir fait évanoüir le deuxiéme terme, on peut toûjours la reduire sous l'une de ces formes.

Il est visible qu'on peut se servir d'une Parabole cubique donnée, puisqu'il n'y a qu'à prendre l'unité arbitraire a égale à son parametre.

PROPOSITION XII.

Problême.

423. APPROCHER *de plus en plus à l'infini de la juste valeur des racines de toute égalité du troisiéme & du quatriéme degré ; & des égalités qui passent le quatriéme degré lorsqu'elles n'ont que deux termes : en ne se servant que de lignes droites & de cercles.*

Soit donnée l'égalité du troisiéme degré $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$; je la multiplie par x pour l'élever au quatriéme & transposant le terme $aaqx$, j'ai $x^4 \mp 2apxx = aaqx$; j'ajoûte de part & d'autre $aapp$ pour faire que le premier membre soit un quarré, ce qui me donne $x^4 \mp 2apxx + aapp = aapp + aaqx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $xx \mp ap$

$= a\sqrt{pp+qx}$; transposant enfin ap, & extrayant de nouveau la racine quarrée, je trouve $x = \sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp+qx}}$. Je considere à present que si au lieu de la juste valeur de la racine vraie x, je prends une grandeur qui l'excede, comme par exemple c ; il s'ensuit 1°. Que c surpasse $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp+qc}}$. 2°. Que $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp+qc}}$ sera encore plus grande que la juste valeur de x. Cette seconde proposition est visible, mais pour la premiere elle se prouve ainsi.

Si l'égalité du troisiéme degré a $+2apx$, il est clair que $c^4 + 2apcc$ * $> aaqc$, d'où il vient en ajoûtant de part & d'autre le quarré $aapp$, & achevant le calcul comme ci-dessus, $c > \sqrt{-ap + a\sqrt{pp+qc}}$. Mais lorsqu'il y a $-2apx$, on aura en transposant $2apx$ & divisant par x cette égalité $xx = 2ap + \frac{aaq}{x}$, d'où il suit que si l'on met dans $\frac{aaq}{x}$ pour x une valeur c plus grande que la racine vraie de l'égalité $x^3 - 2apx - aaq = 0$, la quantité $2ap + \frac{aaq}{c}$ sera moindre que le quarré xx (puisque $\frac{aaq}{c}$ est moindre que $\frac{aaq}{x}$) & à plus forte raison que le quarré cc. On aura donc $cc > 2ap + \frac{aaq}{c}$, & multipliant par cc, il vient $c^4 - 2apcc > aaqc$, d'où l'on tire (en operant comme l'on vient de faire) $c > \sqrt{ap + a\sqrt{pp+qc}}$. Or ceci supposé, je forme cette suite : $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp+qc}}$, $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp+qf}}$, $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp+qg}}$ &c, dans laquelle f exprime le terme $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp+qc}}$ qui le precede immediatement, & de même g exprime le terme $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp+qf}}$ &c.

* *Ce signe ainsi tourné veut dire, surpasse.*

Il est donc évident par ce que l'on vient de démontrer, que tous les termes de cette suite seront plus grands que la juste valeur de la vraie racine x, & qu'ils en ap-

prochent toûjours de plus en plus. Je dis à present que si on la continuë à l'infini, le terme infinitiéme (s'il est permis de s'exprimer ainsi) ou le dernier terme de cette suite, sera précisément égal à la valeur cherchée de l'inconnuë x. Car soit z ce dernier terme, il est certain par la nature de la suite qu'il approchera de plus près de l'inconnuë x que tous les autres termes, & qu'ainsi le terme $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qz}}$ qui le suivroit immédiatement, s'il n'étoit pas le dernier, ne peut être moindre que lui; puisque s'il étoit moindre il aprocheroit de plus près de l'inconnuë x, & seroit par consequent le dernier terme, ce qui est contre la supposition. Or il ne peut être plus grand, car on vient de démontrer que tous les termes de la suite vont en diminuant. Il faudra donc qu'il lui soit égal, & on aura par consequent $z = \sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qz}}$, c'est à dire en ôtant les incommensurables $z^4 \pm 2apz - aaq = 0$, d'où l'on voit que $z = x$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On prouvera par un raisonnement semblable, que si l'on prend une grandeur c plus petite que la juste valeur de x, tous les termes de cette suite iront toûjours en augmentant en sorte que le dernier sera précisément égal à la valeur cherchée de x. Voici maintenant comment on peut construire par Geometrie cette suite, en n'employant que des lignes droites & des cercles.

Ayant mené deux lignes droites indéfinies, BD, CP, FIG. 236. qui s'entrecoupent à angles droits au point A, on pren- 237. dra sur l'une d'elles les parties $AB = a$, $AD = p$, du même côté du point A lorsqu'il y a $+ 2apx$, & de part & d'autre lorsqu'il y a $- 2apx$, comme on le suppose dans ces deux figures; & sur l'autre les parties $AC = q$, $AP = c$, toûjours de part & d'autre du point A. Ayant décrit du diametre CP un demi cercle qui coupe AD en E, on prendra sur AC la partie AF égale à AE, & on portera sur AD depuis le point D vers le point A dans le premier cas, & vers le côté opposé dans le

second, la partie DG égale à DF. On décrira enfin du diametre BG un demi cercle qui coupe AP en Q, je dis que $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Car à cause du demi-cercle CEP la ligne AE ou $AF = \sqrt{qc}$, & à cause du triangle rectangle FAD l'hypothenuse FD ou $DG = \sqrt{pp + qc}$, & par consequent $AG = p + \sqrt{pp + qc}$, & à cause du demi-cercle BQG la ligne $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Nommant à present AQ, f; & reïterant la même operation en se servant de AQ au lieu de AP, on trouvera $AR = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qf}}$, & ensuite par le moyen de AR que j'appelle g, on trouvera $AS = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qg}}$ en reïterant encore la même operation : de sorte que la continuant autant que l'on voudra, on trouvera des lignes AP, AQ, AR, AS, &c qui approcheront de plus en plus à l'infini de la juste valeur de la vraie racine x de l'égalité proposée $x^3 - 2apx - aaq = 0$.

Il est à remarquer que l'on peut prendre d'abord pour AP (c) telle grandeur que l'on veut, car si cette grandeur se trouve plus grande que la racine x, les autres lignes AQ, AR, AS, &c. vont toûjours en diminuant; & au contraire si AP est moindre que x, elles iront en augmentant : de sorte que la vraie racine est renfermée entre AP de l'une de ces deux figures & AP de l'autre, AQ & AQ, AR & AR, AS & AS. D'où l'on voit qu'en formant deux suites convergentes, dans l'une desquelles le premier terme soit plus grand que la vraie racine, & dans l'autre plus petit, l'on aura toûjours en prenant les termes correspondans de ces deux suites, des limites entre lesquelles se doit trouver cette racine; de sorte que la difference de ces limites diminuë de plus en plus à l'infini.

Si l'on demandoit les deux autres racines de l'égalité proposée $x^3 - 2apx - aaq = 0$. Nommant m la racine approchée que l'on vient de trouver, on la regardera

comme étant exacte : c'est pourquoi divisant cette égalité par $x - m$, la division se fera au juste (car le reste $m^3 - 2apm - aaq = o$, puisqu'on suppose $x = m$), & on on aura pour quotient l'égalité $xx + mx + mm - 2ap = o$, dont la resolution fournira les deux racines qu'on demande.

Toutes les égalités du troisiéme degré peuvent se reduire à l'un ou l'autre de ces deux formes ; car après avoir fait évanoüir le second terme, s'il y avoit $+ aaq$ en mettant $- aaq$, on ne feroit que changer les racines vraies en fausses & les fausses en vraies. D'où l'on voit que les constructions précedentes suffisent pour trouver les racines approchées de toute égalité donnée du troisiéme degré. Passons maintenant au quatriéme.

Soit proposée l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 3apxx - aaqx - a^3r = o$, dont il faille trouver les racines approchées. Je cherche, comme l'on vient d'enseigner, les racines approchées de l'égalité du troisiéme degré

$$\begin{aligned} y^3 - 3ppy &+ 2p^3 = o \\ + 4ary &+ 8apr \\ &- aqq \end{aligned}$$

où l'on doit observer d'écrire $- 2p^3$ lorsqu'il y a dans la proposé $+ 3apxx$; $- 4ar$ lorsqu'il y a $+ a^3r$; & enfin $- 8apr$ lorsque les signes des termes $3apxx$ & a^3r sont differens. Je regarde ensuite l'une de ces racines approchées y comme étant exacte, & ayant trouvé une ligne $v = \sqrt{ay \mp 2ap}$, sçavoir $+ 2ap$ lorsqu'il y a $- 3apxx$, & $- 2ap$ lorsqu'il y a $+ 3apxx$; j'ai pour les quatre racines approchées de la proposée, celles de ces deux égalités du second degré $xx - vx + \frac{ay \mp ap}{2} - \frac{aaq}{2v} = o$ & $xx + vx + \frac{ay \mp ap}{2} + \frac{aaq}{2v} = o$ (en observant de prendre $- ap$ lorsqu'il y a $- 3apxx$ dans l'égalité proposée, & $+ ap$ lorsque c'est $+ 3apxx$) que l'on construira aisément en n'employant que des cercles & des lignes droites. Tout ceci n'est qu'une suite de la regle que donne M. Descartes dans le troisiéme Livre de sa

Geometrie pour reduire toute égalité du quatriéme degré à une du troisiéme, de laquelle connoissant une des racines, on a les quatre de la proposée ; & comme cela dépend de l'Algebre pure, je pourrois le supposer ici comme démontré. En voici cependant la raison en peu de mots.

On regarde l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 3apxx - aaqx - a^3r = o$, comme le produit des deux planes $xx - vx + ab - ac = o$ & $xx + vx + ab + ac = o$, dans lesquelles les lettres v, a, b, c, marquent des inconnuës qui doivent être déterminées dans la suite, en sorte que le produit de ces deux égalités qui est $x^4 \begin{matrix} -vvxx \\ \mp 2abxx \end{matrix} - 2acvx \begin{matrix} +aabb \\ -aacc \end{matrix} = o$, soit en effet l'égalité même proposée. Pour cela j'en compare les termes correspondans, & j'ai 1°. $c = \frac{aq}{2x}$. 2°. $b = \frac{vv - 3ap}{2a}$. 3°. $bb - cc = -ar$, ou $bb - cc + ar = o$; c'est à dire en mettant pour b & pour c les valeurs que l'on vient de trouver & ordonnant, l'égalité $v^6 - 6apv^4 \begin{matrix} +9aappvv \\ +4a^3rvv \end{matrix} - a^4qq = o$. Et si l'on fait $vv = ay + 2ap$, on trouvera par la substitution l'égalité du troisiéme degré

$$\begin{matrix} y^3 - 3ppy + 2p^3 \\ +4ary + 8apr \\ -aqq \end{matrix} = o,$$ de laquelle connoissant une racine y, on aura, en prenant la racine quarrée de $ay + 2ap$, la valeur de v, & ensuite celles de b & de c, lesquelles étant mises dans les deux égalités planes que l'on a supposées d'abord, on en formera deux autres dont le produit sera l'égalité même proposée, & dont la resolution par consequent fournira les quatre racines qu'on demande. S'il n'étoit question que de trouver une racine vraie d'une égalité du quatriéme degré, on pourroit la trouver immédiatement par une suite en cette sorte.

Soit $x^4 \pm 2apxx - aaqx - a^3r = o$, on trouvera en operant de même que pour le troisiéme degré $x = \sqrt{\mp ap + a\sqrt{qx + pp + ar}}$, ce qui donne, en faisant pour abreger $pp + ar = nn$, cette suite conver-

gente c, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qc}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qf}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qg}}$, &c, dont la construction n'est differente des précedentes qu'en ce qu'il faut prendre $AF = n$ & $DG = FE$.

Si l'on avoit $x^4 \pm 2apxx - aaqx + a^3r = 0$, on trouveroit $x = \sqrt{\mp ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$, & on formeroit lorsque pp surpasse ar (en faisant $pp - ar = nn$) la même suite convergente que ci-dessus. Mais il est à remarquer que lorsqu'il y a $+2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que $\sqrt{qx + pp - ar}$ surpasse p afin que $\sqrt{-ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de la racine x ne renferme point de contradiction ; ce qui donne $x > \frac{ar}{q}$, & par consequent il faudra prendre c plus grande que $\frac{ar}{q}$.

Si pp est moindre que ar, l'on formera alors, en faisant $ar - pp = qn$, cette suite convergente c, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qc - qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qf - qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qg - qn}}$, &c, l'on doit remarquer que lorsqu'il y a $-2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que x surpasse n ou $\frac{ar - pp}{q}$ afin que $\sqrt{ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de x ne renferme point de contradiction, & qu'ainsi on doit prendre c plus grand que n.

Il peut arriver lorsqu'il y a $+r$ dans l'égalité donnée que ces racines soient toutes quatre imaginaires, & alors on tombera infailliblement dans quelque contradiction en construisant la suite ; car on n'a démontré qu'elle est convergente qu'en supposant qu'il y eut une racine vraie dans l'égalité donnée. Au reste la construction de la derniere suite est un peu differente des autres, mais comme elle n'est pas plus difficile, je ne m'y arrêterai pas.

Cette methode devient embarrassée lorsqu'on la veut étendre à des égalités complettes qui passent le quatrié-

me degré ; c'eſt pourquoi je me contenterai de l'appliquer à une égalité du cinquiéme degré qui n'a que deux termes, & qui ſervira de methode pour les autres plus composées qui n'ont pareillement que deux termes.

Soit $x^5 - a^4 b = o$; multipliant par x, & tranſpoſant il vient $x^6 = a^4 bx$, & extrayant la racine quarrée on aura $x^3 = aa\sqrt{bx}$ ou $x^4 = aax\sqrt{bx}$, & extrayant de nouveau deux fois de ſuite la racine quarrée, on trouvera enfin $x = \sqrt{a\sqrt{x\sqrt{bx}}}$; ce qui fournit cette ſuite convergente, c, $\sqrt{a\sqrt{c\sqrt{bc}}}$, $\sqrt{a\sqrt{f\sqrt{bf}}}$, $\sqrt{a\sqrt{g\sqrt{bg}}}$, &c, dont voici la conſtruction geometrique.

FIG. 238. Ayant mené deux lignes droites indéfinies BD, CP, qui s'entrecoupent à angles droits au point A, on prendra ſur l'une d'elles la partie $AB = a$, & ſur l'autre, les parties $AC = b$, $AP = c$, de part & d'autre du point A. Du diametre PC ayant décrit un demi-cercle qui coupe BA prolongée du côté de A en D, & ayant pris ſur AC la partie $AF = AD$, on décrira du diametre PF un autre demi-cercle qui coupe AD en E. On décrira enfin du diametre BE un troiſiéme demi-cercle qui coupe AP en Q ; il eſt viſible que $AQ = \sqrt{a\sqrt{c\sqrt{bc}}}$. Nommant à preſent AQ, f ; & réïterant la même operation en ſe ſervant de AQ au lieu de AP, on trouvera $AR = \sqrt{a\sqrt{f\sqrt{bf}}}$, & de même $AS = \sqrt{a\sqrt{g\sqrt{bg}}}$. Et les droites AP, AQ, AR, &c. approcheront de plus en plus à l'infini de la juſte valeur de l'inconnuë x de l'égalité donnée $x^5 - a^4 b = o$. Cela ſe prouve de la meme maniere que pour les égalités du troiſiéme degré.

M. Bernoulli celebre Profeſſeur des Mathematiques à Bâle, eſt l'Auteur de ces ſuites. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipſic de l'année 1689. page 455.

PROPOSITION XIII.

Problême.

424. UNE *portion de Section conique étant donnée, trouver par son moyen les racines d'une égalité donnée du troisiéme ou du quatriéme degré.*

On a vû dans le Problême précedent qu'une égalité du quatriéme degré étant donnée, on en peut toûjours trouver une du troisiéme, de laquelle connoissant une racine on a les quatre de la proposée ; en ne se servant que de lignes droites, & de cercles. On sçait de plus que toute égalité du troisiéme degré se peut reduire sous cette forme $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, dont l'une des racines est vraie, & les deux autres ou fausses ou imaginaires. Cela posé ; soit $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, dont il faille trouver les racines, par le moyen de la portion donnée FIG. 239.
BD d'une Parabole qui a pour axe la ligne CH dont l'origine est au point C. Des points B, D, extremités de la portion donnée ayant mené les perpendiculaires BG, DH, sur l'axe, il est manifeste que si la vraie racine étoit plus grande que BG, & moindre que DH, le cercle décrit du centre E, trouvé comme l'on a enseigné à la fin de l'article 387. pour les égalités qui n'ont point de second terme, & du rayon EC, couperoit infailliblement la portion BD en quelque point M ; d'où menant la perpendiculaire MQ sur l'axe, cette ligne MQ en seroit la vraie racine. Il est donc question lorsque ce cercle ne coupe point la portion BD, de transformer cette égalité en une autre dont la vraie racine soit renfermée entre les limites BG, DH. Pour le faire, je nomme les données BG, f ; DH, g ; & je suppose que l'on ait deux limites m, n, entre lesquelles la vraie racine x soit resserrée (m est moindre que n, & f moindre que g). Ce qui donne x plus grand que m & moindre que n, & multipliant chaque terme par f & divisant

par m, il vient $\frac{fx}{m}$ plus grand que f & moindre que $\frac{fn}{m}$. Si l'on fait à present $z = \frac{fx}{m}$, & qu'on mette dans l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$, à la place de x sa valeur $\frac{mz}{f}$, on la transformera en celle-ci $z^3 \mp \frac{2apff}{mm} - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$, qui aura sa vraie racine $z = \frac{fx}{m}$ plus grande que f & moindre que $\frac{fn}{m}$. D'où il suit que si les limites m, n, étoient telles que $\frac{fn}{m}$ fût égale ou moindre que g, il n'y auroit qu'à construire cette derniere égalité selon l'article 387, pour avoir sa vraie racine MQ (z) par le moyen de la portion donnée BD. De là on tire la construction suivante.

On fera par le Problême précedent deux suites convergentes qui approcheront l'une en dessus & l'autre en dessous de la vraie racine x de l'égalité donnée $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$. On choisira deux termes correspondans dans ces deux suites m, n, qui soient tels que $\frac{fn}{m}$ soit égale ou moindre que g : ce qui se pourra toûjours faire, puisque f est moindre que g, & que la difference qui est entre m & n diminuë continuellement à l'infini. Cela fait, on transformera l'égalité donnée en une autre $z^3 \mp \frac{2apff}{mm} - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$, dont l'inconnuë sera $z = \frac{fx}{m}$; & en la construisant selon la fin de l'article 387. le cercle coupera infailliblement la portion donnée BD en un point M; duquel ayant mené sur l'axe la perpendiculaire MQ, elle sera la vraie racine z de cette seconde égalité : & faisant ensuite $x = \frac{mz}{f}$, cette ligne x sera la vraie racine de l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$.

Si l'on veut trouver les deux autres racines de cette égalité lorsqu'elles ne sont pas imaginaires; il n'y a qu'à

la

la diviser par l'inconnuë x moins celle que l'on vient de découvrir pour l'abaisser à une du second degré, dont on découvrira les deux racines par le moyen d'un cercle, en se servant de l'article 380.

Tout ceci est trop évident pour m'y arrêter davantage, je remarquerai seulement que si la portion donnée *BD* étoit d'une Ellipse ou d'une Hyperbole, il faudroit se servir de l'article 398. ou 403. & que toute la difficulté se reduiroit à transformer l'égalité donnée en une autre, dont la vraie racine eut des limites données : & c'est ce que l'on feroit comme dans la Parabole.



LIVRE DIXIE'ME.

Des Problêmes déterminés.

PROPOSITION GENERALE.

425. UN *Problême de Geometrie déterminé étant proposé, en trouver la solution.*

On regardera d'abord le Problême proposé comme s'il étoit resolu, & on tirera les lignes que l'on jugera les plus propres pour faire connoître ce qui n'est que supposé. On nommera ensuite toutes ces lignes (qui sont pour l'ordinaire des triangles rectangles ou semblables) par des lettres de l'Alphabet, sçavoir les lignes qui sont connuës par les premieres lettres, & les lignes inconnuës par les dernieres lettres; & on parcourra toutes les conditions du Problême, en comparant ces lignes entr'elles dans l'ordre le plus simple & le plus naturel qu'il sera possible : ce qui doit servir à former autant de differentes égalités qu'il y a d'inconnuës. On employera enfin les regles ordinaires de l'Algebre pour reduire ces differentes égalités à une seule dans laquelle il ne se trouve plus qu'une inconnuë, & pour l'abaisser s'il se peut à un moindre degré; & l'ayant resoluë par les regles prescrites dans le Livre precedent, on en tirera la solution cherchée du Problême. Ceci s'éclaircira parfaitement par les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

FIG. 240. 426. LA ligne droite AB étant donnée, trouver hors de cette ligne le point C tel qu'ayant mené les droites AC, CB; 1°. La somme de leurs quarrés soit au triangle ACB en la raison donnée de f à g, 2°. L'angle ACB qu'elles comprennent soit égal à l'angle donné GDK.

Je suppose que le point C soit celui qu'on cherche, &

je mene CH perpendiculaire sur AB que je divise par le milieu au point E. Je nomme la donnée AE ou EB, a; & les inconnuës EH, x; HC, y; & j'ai $AH = a - x$, $BH = a + x$. Donc à cause des triangles rectangles AHC, BHC, les quarrés des hypothenuses $\overline{AC}^2 = aa - 2ax + xx + yy$, & $\overline{BC}^2 = aa + 2ax + xx + yy$; & par consequent $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2aa + 2xx + 2yy$. Or puisque le triangle $ACB = AE \times CH\ (ay)$, il s'ensuit par la premiere condition du Problême que $2aa + 2xx + 2yy . ay :: f . g$; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens, & divisant par $2g$, cette équation $aa + xx + yy = \frac{af}{2g}y = 2my$ en prenant (pour ôter les fractions) une ligne $m = \frac{af}{4g}$.

Il reste maintenant à accomplir la seconde condition, sçavoir que l'angle ACB soit égal à l'angle donné GDK. Pour y réüssir, je mene d'un point G pris à discretion dans la droite GD, la perpendiculaire GF sur le côté DK, prolongé, s'il est necessaire, & du point A la perpendiculaire AL sur le côté BC prolongé aussi, s'il est necessaire, afin d'avoir deux triangles rectangles semblables ACL, GDF, dont l'un GDF est donné. Cela fait, je nomme les données DF, b; FG, c; & faisant, pour abreger, $BC = n$, je trouve à cause des triangles rectangles semblables BCH, BAL, ces proportions $BC\ (n) . CH\ (y) :: BA\ (2a) . AL = \frac{2ay}{n}$. Et $BC\ (n) . BH\ (a + x) :: BA\ (2a) . BL = \frac{2aa + 2ax}{n}$. Et par consequent CL ou $BL - BC = \frac{2aa + 2ax - nn}{n}$. Donc puisque l'angle ACL doit être égal à l'angle GDF, il faut que $CL\ (\frac{2aa + 2ax - nn}{n}) . AL\ (\frac{2ay}{n}) :: DF\ (b) . FG\ (c)$; d'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens $2aac + 2acx - cnn = 2aby$, c'est à dire, en mettant pour nn sa valeur $aa + 2ax + xx + yy$, cette seconde

équation $aac - cxx - cyy = 2aby$ qui renferme la seconde condition du Problême.

Comme l'on a trouvé autant d'égalités qu'il y avoit d'inconnuës, & que l'on a satisfait à toutes les conditions du Problême ; il ne faut plus que se servir des regles ordinaires de l'Algebre, pour reduire ces égalités à une seule qui ne renferme qu'une inconnuë y ou x : & c'est ce qu'on peut faire en cette sorte. J'ai pour premiere équation $aa + xx + yy = 2my$, & pour seconde, $aac - cxx - cyy = 2aby$ ou $aa - xx - yy = \frac{2aby}{c}$; c'est pourquoi ajoûtant ensemble d'une part les deux premiers membres, & de l'autre les deux seconds, je trouve $2aa = \frac{2aby}{c} + 2my$, d'où je tire $y = \frac{aa}{m+f}$ en prenant $f = \frac{ab}{c}$. Et mettant cette valeur à la place de y & son quarré à la place de yy dans l'une ou l'autre des équations precedentes, je trouve $xx = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm + 2mf + ff}$ & $x = \frac{a\sqrt{mm - ff - aa}}{m+f}$; d'où je connois que si mm étoit moindre que $aa + ff$ le Problême seroit impossible. En voici la construction.

FIG. 241. Par le point E milieu de AB ayant tiré une perpendiculaire indéfinie ON à AB, on menera par le point A la ligne AM qui fasse avec AB l'angle EAM égal à l'angle DGF qui est donné. Du point M où cette ligne rencontre la perpendiculaire ON, comme centre, & du rayon MA, on décrira un arc de cercle ACB. On prendra ensuite sur EM prolongée du côté de M la partie $MN = m$; & ayant joint NA, on lui menera la perpendiculaire AO qui rencontre NO au point O, par lequel on tirera une parallele à AB. Je dis que cette parallele rencontrera l'arc de cercle ACB au point cherché C.

Car ayant mené CH perpendiculaire sur AB, il est clair que $CH = EO = \frac{aa}{m+f}$, puisqu'à cause des triangles rectangles semblables NEA, AEO, il vient NE $(m+f)$. AE (a) :: AE (a). $EO = \frac{aa}{m+f}$. De plus à

cause du cercle $\overline{CM}^2 = \overline{AM}^2 = aa + ff$; & partant puisque $MO = f + \frac{aa}{m+f}$, il s'ensuit à cause du triangle rectangle MCO que $\overline{CO}^2$ ou $\overline{EH}^2$ $(xx) = aa + ff - ff - \frac{2aaf}{m+f} - \frac{a^4}{mm+2mf+ff} = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm+2mf+ff}$. Donc &c.

REMARQUE.

427. Lorsqu'après avoir satisfait à toutes les questions d'un Problême, on est arrivé à deux équations qui renferment chacune les deux mêmes inconnuës, il n'est pas necessaire, si l'on veut, de les reduire à une seule qui ne renferme plus qu'une inconnuë, comme il est prescrit dans la proposition generale: mais l'on peut resoudre le Problême, en construisant separément les lieux de ces deux équations, car leurs points d'intersection serviront à trouver les valeurs de ces deux inconnuës. C'est ce qui se voit clairement dans cet exemple, où l'on a pris pour inconnuës les droites EH (x), HC (y) qui font entr'elles un angle droit EHC; & où après avoir satisfait aux conditions requises, on est arrivé à ces deux équations $aa + xx + yy = 2my$, & $aa - xx - yy = 2fy$; car les cercles qui en sont les lieux étant décrits separément donneront par leurs intersections des points qui satisferont: voici comment.

Ayant décrit comme dans la premiere construction l'arc de cercle ACB, on décrira du centre A, & du rayon $AP = m$, un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire EM en P. On prendra sur cette perpendiculaire la partie $EQ = m$ du côte de l'arc ACB, & on décrira du centre Q & du rayon $QC = EP$, un cercle qui coupera l'arc ACB en des points C qui satisferont.

Car à cause de ce dernier cercle on aura $\overline{QC}^2$ ou $\overline{EP}^2$ $(mm - aa) = \overline{QO}^2$ $(mm - 2my + yy) + \overline{OC}^2$ (xx), c'est à dire la premiere équation $aa + xx + yy = 2my$;

& à cause de l'autre cercle ACB il vient $\overline{MC}^2$ ou $\overline{MA}^2$ $(ff+aa) = \overline{MO}^2 (ff+2fy+yy) + \overline{OC}^2 (xx)$, c'est à dire la seconde équation $aa-xx-yy=2fy$. D'où il suit que le point cherché C se doit trouver en même temps sur ces deux cercles, c'est à dire, qu'il doit se confondre avec leurs points d'intersection.

Il est visible qu'il y a deux differens points C qui satisfont à la question, lorsque ces deux cercles se coupent en deux points comme dans cette figure; qu'il n'y en a qu'un, lorsqu'ils se touchent; & qu'enfin il n'y en peut avoir aucun, lorsqu'ils ne se coupent ni ne se touchent.

Il faut bien prendre garde qu'en resolvant un Problême par le moyen de deux lieux, on ne tombe pas dans une construction plus composée, que si étant arrivé à une seule égalité qui ne renferme qu'une inconnuë x, on l'eut construite selon les regles du Livre precedent. Je m'explique: qu'il faille, par exemple, resoudre un Problême (c'est le troisiéme exemple qui sera proposé) dont les conditions soient renfermées dans ces deux équations $y=\frac{cd-ex}{b}$, & $\frac{bb}{ff}yy=aa+xx$; si l'on se servoit des lieux de ces deux équations, il est clair qu'il faudroit mener une ligne droite * qui seroit le lieu de la premiere équation, & décrire une Hyperbole * qui seroit le lieu de la seconde, pour avoir par leurs intersections les valeurs des deux inconnuës x & y. Mais parce qu'en réünissant ces deux équations en une seule, on trouve l'égalité du second degré $xx-\frac{2ccd}{cc+ff}x+\frac{ccdd-aaff}{cc-ff}=0$, qui se construit en n'employant que des lignes droites & des cercles; ce seroit une faute considerable de se servir d'une Hyperbole.

* Art. 306.
* Art. 330. & 332.

EXEMPLE II.

FIG. 242. 428. Le quarré $ABCD$ étant donné; il faut mener d'un de ses angles A la ligne droite AE, en sorte que sa partie FE comprise entre les côtés BC, CD, oppo-

sés à cet angle soit égale à une ligne donnée b.

Je suppose que le point E pris sur le côté DC prolongé, soit tel que la partie FE de la ligne AE soit égale à b, c'est à dire que je suppose la question resoluë ; & je nomme la donnée AB ou AD ou DC ou CB, a ; l'inconnuë DE, x. Cela fait, les triangles semblables EDA, ECF, donnent $ED(x). DA(a) :: EC(x-a). CF = \frac{ax-aa}{x}$, & le triangle rectangle ECF donne $\overline{FE}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CF}^2 = xx - 2ax + aa + \frac{aaxx - 2a^3x + a^4}{xx}$. Mais puisque par la condition du Problême FE doit être égale à b, on aura $xx - 2ax + aa + \frac{aaxx - 2a^3x + a^4}{xx} = bb$, ou $x^4 - 2a^3x + 2aaxx - bbxx - 2a^3x + a^4 = 0$. D'où l'on voit que la resolution de cette égalité doit fournir pour $DE(x)$, une valeur telle que menant la droite AE, sa partie FE comprise entre les côtés CB, DC, soit égale à la donnée b.

L'égalité que l'on vient de trouver étant du quatriéme degré, il faudroit employer pour la resoudre une Section Conique. C'est pourquoi je dois chercher auparavant par les regles que fournit l'Algebre, si elle ne se peut point abaisser à un degré plus simple, & je trouve en effet que si l'on prend $cc = aa + bb$, elle sera le produit des deux égalités $xx + aa - ax - cx = 0$, & $xx + aa - ax + cx = 0$, qui sont chacune du second degré, de sorte que pour avoir les quatre racines de l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 2a^3x$ &c, il ne faut que trouver les racines de chacune de ces deux égalités Je ne m'arrête point à chercher les racines de l'égalité $xx + aa - xx + cx = 0$; parce que c surpassant a, la disposition des signes me fait connoître qu'elles sont toutes deux fausses : mais je trouve celles de l'autre égalité $xx + aa - ax - cx = 0$, que je connois être toutes deux vraies, de la maniere qui suit.

Soit prise sur le côté AB prolongé la partie $BG = c$, & soit décrit du diametre AG un demi-cercle qui cou-

pe en E le côté DC prolongé. Je dis que ce point sera celui qu'on cherche.

Car nommant DE, x ; & menant la perpendiculaire EH, on aura $HG = a + c - x$, & par la proprieté du cercle $AH \times HG$ $(ax + cx - xx) = \overline{EH}^2$ (aa).

REMARQUE I.

429. LORSQU'APRE'S avoir satisfait aux conditions d'un Problême, on arrive à une égalité composée qui a plusieurs racines réelles, il est visible qu'il n'y a qu'une de ces racines qui exprime la valeur de l'inconnuë qu'on cherche : mais on doit bien remarquer que les autres peuvent aussi servir à la resolution de la question, dans un sens qui ne peut être different de celui qu'on s'est imaginé que dans quelques circonstances particulieres. Ainsi dans cet exemple la petite racine vraie DL (x) de l'égalité $xx - ax - cx + aa = 0$, donne sur le côté DC un point L tel qu'ayant mené la droite AL qui rencontre le côté BC prolongé en K, sa partie LK est égale à la donnée b. De même si l'on prend $Bg = c$ sur le côté BA prolongé vers A, & qu'on décrive du diametre Ag un demi-cercle, il coupera le côté CD prolongé vers D aux points e, l, en sorte que De, & Dl, seront les deux racines fausses de l'égalité $xx + cx - ax + aa = 0$: & si l'on mene les droites Ae, Al, qui rencontrent le côté CB prolongé aux points f, k ; les droites ef, lk, seront encore chacune égale à la donnée b. De là on peut voir que quoiqu'en resolvant le Problême on n'ait eu en vûë que de trouver la valeur de DE, on est cependant arrivé à une égalité dont les racines ont fourni d'autres valeurs DL, De, Dl, qui ont toutes servi à resoudre le Problême en quelque sens.

REMARQUE II.

430. S'IL y a lieu de croire que l'égalité qui renferme les conditions d'un Problême se peut abaisser à un moindre

moindre degré, il est à propos de tenter d'autres voies que celles qu'on a suivies quand même elles paroîtroient moins naturelles; parce qu'il arrive souvent qu'elles conduisent à des égalités plus simples, & que d'ailleurs il est assez difficile d'abaisser des égalités composées. Voici deux autres manieres de resoudre le Problême précedent qui pourront servir à faire comprendre cette remarque.

Ayant supposé le Problême resolu, je mene EG perpendiculaire sur AE qui rencontre le côté AB prolongé en G, & je prends pour inconnuës les deux droites AF & BG que je nomme y & z. Cela fait, les triangles rectangles semblables ABF, AEG, donnent AB (a). AF (y) :: AE ($y+b$). AG ($a+z$). Et partant $yy+by=aa+az$. Or comme j'ai deux inconnuës & que le Problême est déterminé, il faut encore chercher une autre égalité. Pour la trouver, je considere que $EG=AF$ (y); car menant EH perpendiculaire sur AG, le triangle rectangle EHG est semblable au triangle rectangle ABF, & de plus égal, puisque les côtés homologues AB, EH, sont égaux entr'eux. J'aurai donc (à cause du triangle rectangle AEG) cette autre égalité $aa+2az+zz=yy+2by+bb+yy=2yy+2by+bb$, dans laquelle mettant à la place de $2yy+2by$ sa valeur $2aa+2az$ trouvée par le moyen de la premiere égalité, il vient $aa+2az+zz=2aa+2az+bb$ qui se réduit à cette égalité tres-simple $z=\sqrt{aa+bb}$, qui fournit d'abord la même construction que ci-dessus. FIG. 242.

AUTRE MANIE'RE.

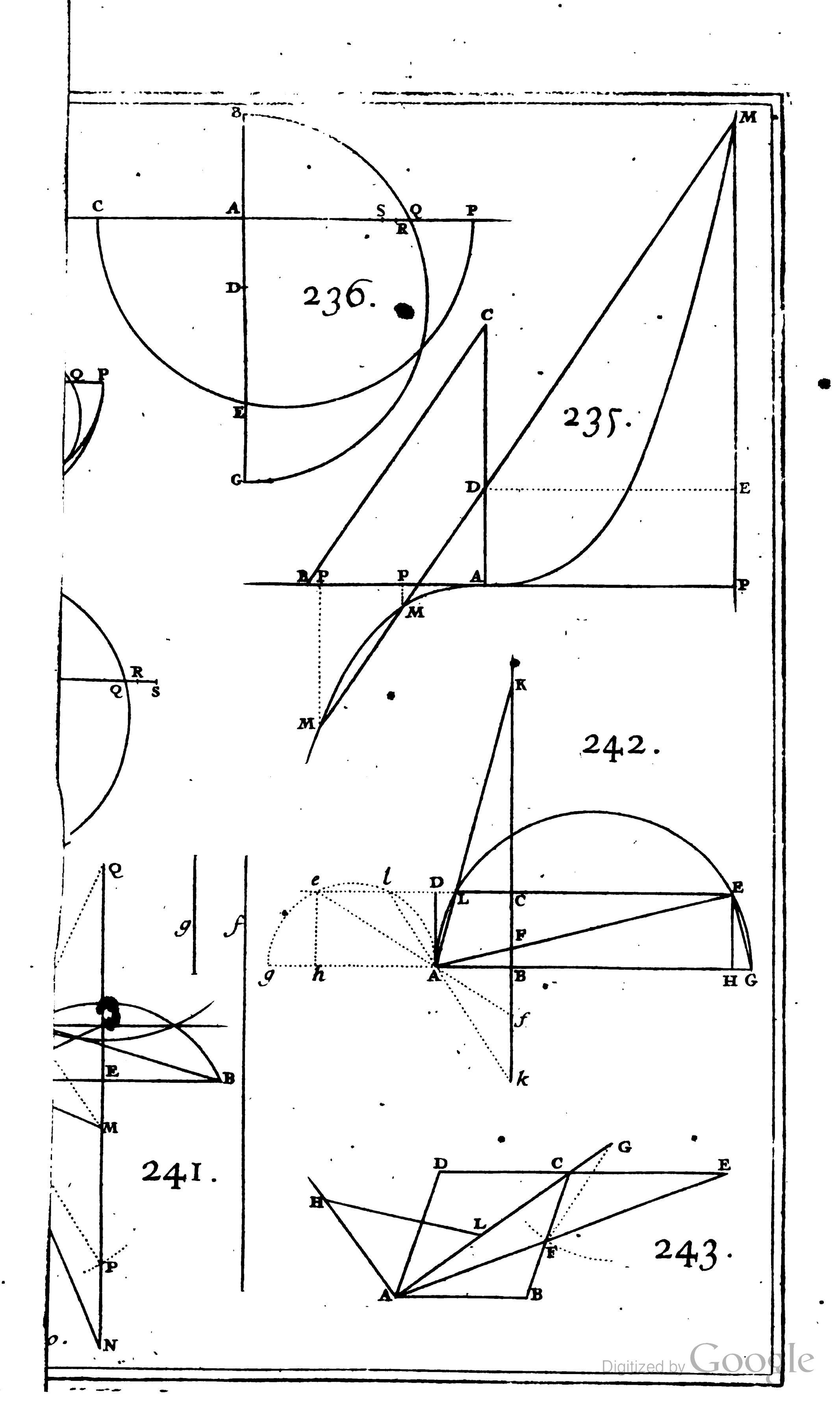
La maniere suivante a cela de particulier qu'elle réüssit également soit que la figure $ABCD$ soit un quarré, ou qu'elle soit un rhombe. Ayant mené par le point cherché F, que je regarde comme donné, la ligne FG qui fasse avec AF l'angle AFG égal à l'angle donné ACE & qui rencontre au point G la diagonale AC prolongée autant qu'il est necessaire; on aura trois triangles ACE, AFG, FIG. 243.

GCF, qui seront semblables entr'eux. Car 1°. L'angle en *A* étant commun aux deux triangles *ACE*, *AFG*, & les angles *ACE*, *AFG*, étant égaux par la supposition ; il est visible que ces deux triangles seront semblables 2°. Le triangle *ADC* étant isoscelle, l'angle *DCA* ou *ECG* sera égal à l'angle *DAC* ou *ACF*, & ajoûtant de part & d'autre le même angle *FCE*, l'angle *FCG* sera égal à l'angle *ACE* ou *AFG* ; & partant puisque l'angle en *G* est commun, les deux triangles *AGF*, *FGC*, seront semblables. Cela posé, soient les inconnuës $CE = x$, $AG = z$, & les données $DC = a$, $FE = b$, $AC = c$; on aura (à cause des paralleles *AD*, *CF*,) cette proportion: $CE (x). FE (b) :: CD (a). AF = \frac{ab}{x}$. Or à cause des triangles semblables *ACE*, *AFG*, *GCF*, on trouvera $AC (c). CE (x) :: AF \left(\frac{ab}{x}\right). FG = \frac{ab}{c}$. Et $AG (z). FG \left(\frac{ab}{c}\right) :: \frac{ab}{c}. CG (z-c)$. D'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens, l'égalité $zz - cz = \frac{aabb}{cc}$ qui fournit cette construction.

FIG. 243. Ayant mené du point *A* perpendiculairement sur *AC* la ligne $AH = \frac{ab}{c}$, on tirera par le point du milieu *L* de la diagonale *AC* la ligne *HL*, & on prendra sur cette diagonale prolongée du côté de *C* la partie *LG* égale à *LH*. On décrira ensuite du centre *G* & du rayon *GF* égal à *AH*, un arc de cercle qui coupera le côté *BC* au point cherché *F*. Cela est évident ; puisque par la construction $zz - cz = \frac{aabb}{cc}$, & que $GF = \frac{ab}{c}$.

EXEMPLE III.

FIG. 244. 431. TROUVER sur une ligne droite indéfinie *DE* donnée de position, deux points *D*, *E* ; desquels ayant mené à deux points donnés *O*, *C*, hors de cette ligne, les droites *DO*, *OE*, *DC*, *CE* ; l'angle *DOE* soit droit



236.
235.
242.
241.
243.

& l'angle DCE égal à un angle donne TPS.

Supposons la chose faite, je décris du diametre DE un demi cercle qui passera par le point O, puisque l'angle DOE est droit ; & sur la corde DE je décris un arc de cercle capable de l'angle donné, lequel passera par consequent par le point C. Du point H centre de cet arc, & des points donnés O, C, je mene sur DE les perpendiculaires HK, OA, CB, & je nomme les données OA, a ; CB, b ; AB, c ; les inconnuës AK, x ; KH, y. Cela posé, il est clair par les Elemens de Geometrie, 1°. Que le point K sera le milieu de la ligne DE ; & par consequent le centre du demi-cercle DOE. 2°. Que si par le sommet P de l'angle donné TPS on mene une perpendiculaire PQ à l'un des côtés PT, l'angle QPS qu'elle fait avec l'autre côté PS, sera égal à l'angle KEH. Or à cause du triangle rectangle KAO le quarré $\overline{KO}^2$ ou $\overline{KE}^2 = aa + xx$, & à cause du triangle rectangle HKE le quarré $\overline{HE}^2 = aa + xx + yy$: mais prolongeant HK jusqu'à ce qu'elle rencontre en R une parallele CR à DE, on aura (à cause du triangle rectangle CRH) le quarré $\overline{CH}^2 = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$. Donc puisque les lignes HE, HC, sont rayons du même cercle, on formera par la comparaison de leurs valeurs analytiques cette équation $aa + xx + yy = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$, qui, en effaçant de part & d'autre $yy + xx$, & pour abreger, faisant $\frac{aa - bb - cc}{2c} = d$, se reduit à celle ci ; $y = \frac{cd - cx}{b}$.

Si l'on considere le chemin qu'on a suivi pour arriver à l'équation précedente, on verra qu'elle renferme cette condition, sçavoir que les cercles décrits des centres K, H, & des rayons KO, HC, se rencontrent sur la ligne DE dans les mêmes points D, E ; de sorte qu'il ne reste plus qu'à faire que l'angle KEH soit égal à l'angle QPS. Pour en venir à bout.

Ayant pris sur la ligne PQ la partie PQ égale à CB, & tiré QS parallele au côté PT, & terminé en S par

l'autre côté PS ; il est évident que le triangle rectangle EKH doit être semblable au triangle rectangle PQS, & qu'ainsi, en nommant la donné QS, f, on aura cette proportion ; $EK(\sqrt{aa+xx}) . KH(y) :: PQ(b) . QS(f)$; d'où l'on tire $y = \frac{f}{b}\sqrt{aa+xx} = \frac{cd-cx}{b}$. Quarrant chaque membre pour ôter les incommensurables, & mettant par ordre l'égalité, on trouve $xx - \frac{2ccd}{cc-ff}x + \frac{ccdd-aaff}{cc-ff} = 0$, dont l'une des racines fournira pour $AK(x)$ une valeur telle que décrivant un cercle du centre K & du rayon KO, il coupera la ligne DE aux deux points cherchés D, E.

On peut trouver les racines de cette égalité, selon les articles 380. ou 382. (Liv. préced.) : mais quoique les methodes qu'on y explique soient tres-simples eû égard à leur generalité, il arrive neanmoins tres souvent qu'en considerant avec attention la nature d'une question particuliere, on trouve des constructions plus faciles. Par exemple ; on peut remarquer ici, 1°. Que si par le point de milieu F de la ligne OC qui joint les deux points donnés, on mene la perpendiculaire FG qui rencontre en G la ligne DE donnée de position, on aura $AG = d$; car nommant AG, z ; les triangles rectangles GAO, GBC, donneront $\overline{GO}^2 = zz + aa$ & $\overline{GC}^2 = zz + 2cz + cc + bb$, & comparant ensemble ces deux valeurs qui doivent être égales entr'elles, puisque le point G est dans la perpendiculaire FG qui divise par le milieu la ligne OC, il vient $zz + aa = zz + 2cz + cc + bb$, d'où l'on tire $AG(z) = \frac{aa-bb-cc}{2c} = d$. 2°. Que l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ qui renferme les conditions du Problême, se reduit à cette proportion ; $GK(d-x) . KO(\sqrt{aa+xx}) :: QS(f) AB(c)$: de sorte que si l'on

* Art. 350. décrit * le lieu de tous les points K tels qu'ayant mené aux deux points donnés G, O, les droites KG, KO, elle soient toûjours entr'elles en la raison donnée de

QS à AB ; ce lieu coupera la ligne DE au point cherché K. Ce qui donne la construction suivante qui est trés simple.

Par le point de milieu F de la ligne OC qui joint les deux points donnés ayant mené la perpendiculaire FG, qui rencontre en G la ligne DE donnée de position, on divisera la ligne OG au point M, en sorte que $GM. MO :: QS. AB$. Et on la prolongera du côté de G jusqu'au point N, en sorte que $GN. NO :: QS. AB$. Du diametre MN on décrira un cercle qui coupera la ligne DE en un point K, duquel point comme centre, & du rayon KO ayant décrit un cercle ; ce cercle rencontrera la ligne DE aux deux points cherchés D, E.

Comme le cercle qui a pour diametre la ligne MN, coupe la droite DE non seulement au point K, mais encore en un autre point L ; il s'ensuit qu'on peut se servir du point L de même que l'on a fait du point K, pour trouver sur la ligne DE deux autres poids qui satisferont également, & qu'ainsi cette question peut avoir deux differentes solutions.

Si l'angle DCE devoit être droit aussi bien que l'angle DOE, il est clair que QS (f) deviendroit nulle, & qu'ainsi l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ se changeroit en celle-ci $cd - cx = o$, d'où l'on tire $x = d$; c'est à dire que le centre K tomberoit alors sur le point G. Et si le point B tomboit sur le point A, l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ se changeroit en celle-ci $f\sqrt{aa+xx} = \frac{aa-bb}{2}$ en mettant pour cd sa valeur $\frac{aa-bb-cc}{2}$, & effaçant ensuite les termes où c (qui devient en ce cas nul) se rencontre ; d'où l'on voit que dans ce cas, si du point O comme centre, & du rayon $OK = \frac{aa-bb}{2f}$ on décrit un arc de cercle, il coupera la ligne DE au point cherché K. Ceci s'accorde parfaitement avec les articles 66. 67. 68. du Livre second, & la construction generale peut servir à trouver tout d'un coup dans une Ellipse dont

deux diametres conjugués ſont donnés, deux autres diametres conjugués qui faſſent entr'eux un angle donné; ce qui dans l'art. 65. avoit eté renvoyé ici.

EXEMPLE IV.

FIG. 245. 432. TROIS points A, B, C, étant donnés, en trouver un quatriéme, M, duquel ayant mené à ces points les droites MA, MB, MC; les differences de l'une d'elles aux deux autres ſoient données.

Cette queſtion eſt ſuſceptible de trois differens cas. Car ou les trois lignes MA, MB, MC, ſont toutes égales entr'elles; ou il y en a ſeulement deux qui ſoient égales entr'elles; ou enfin toutes les trois ſont inegales entr'elles.

Premier cas. Lorſque les trois lignes MA, MB, MC, ſont égales entr'elles; ou ce qui eſt la même choſe lorſque les deux differences données ſont nulles. Il eſt clair que le point cherché M ſera le centre du cercle qui paſſe par les points donnés A, B, C.

FIG. 246. *Second cas.* Lorſque deux des trois lignes MA, MB, MC, comme MA, MB, doivent être egales entr'elles; ou (ce qui eſt la même choſe) lorſqu'une des differences données eſt nulle.

Ayant tiré du point donné C, la perpendiculaire CO ſur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés A, B; du point M que l'on ſuppoſe être celui qu'on cherche, ayant mené les droites MP, MQ, paralleles à CO, OB; il eſt clair que AP ſera égale à PB, puiſque AM doit être égale à MB. Nommant donc les données AP ou PB, a; OP, b; OC, c; $AM - MC$, f; & les inconnuës AM, z; PM, y; les triangles rectangles APM, MQC, donneront ces deux egalités $zz = aa + yy$, & $zz - 2fz + ff = cc - 2cy + yy + bb$; d'où en retranchant par ordre chaque membre de la ſeconde de ceux de la premiere, il vient $2fz - ff = aa - cc + 2cy - bb$, qui ſe reduit à cette proportion $z \cdot y + \frac{aa - bb - cc + ff}{2c} :: c . f$. De là on tire la conſtruction ſuivante.

Soit menée par le point de milieu P de la ligne AB, la perpendiculaire $PD = \frac{aa - bb - cc + ff}{2c}$. Soit divisée l'hypothenuse AD prolongée du côté qu'il sera necessaire, aux points E, F; en sorte que $AE . ED :: c . f$, & $AF . FD :: c . f$. Du diametre EF soit décrit un cercle; il coupera la ligne PD au point cherché M.

Car ayant mené la droite MA, il est clair par la proprieté du cercle EMF, * que AM (z). MD ($y + \frac{aa - bb - cc + ff}{2c}$) $:: c . f$; & par la proprieté de la perpendiculaire PM, que $zz = aa + yy$. Or comme ces deux équations renferment les conditions du Problême, il s'ensuit &c. * *Art.* 550.

Si par l'autre point N, où la ligne DP rencontre la circonference, on mene les droites NA, NB, NC; les deux NA, NB, seront égales entr'elles, & la difference de chacune de ces deux droites à la troisiéme NC sera égale à la donnée f; de sorte que le point N satisfait aussi, mais avec cette difference que NC est la plus grande des trois droites NA, NB, NC, au lieu que MC est la plus petite des trois MA, MB, MC.

On peut encore resoudre ce second cas sans aucun calcul. Je suppose comme auparavant que M soit le point cherché, & ayant tiré les droites MA, MB, MC, je décris du centre C, & du rayon $CD = MA - MC$, un cercle $DEKFH$. Du point D où la ligne MC rencontre ce cercle, je mene aux deux points donnés A, B, les droites DA, DB qui rencontrent le cercle aux points E, F; par où je tire les rayons EC, CF, & la corde EF. Cela fait, puisque $MC + CD$ ou $MD = MA$, & que les lignes CD, CE, sont rayons d'un même cercle, les triangles DMA, DCE, seront isoscelles; & par consequent semblables parce que l'angle en D est commun : c'est pourquoi les lignes CE, MA, seront paralleles. On prouvera de même que les lignes CF, MB, seront aussi paralleles; ce qui donne $DA . DE :: DM . DC :: DB . DF$. Et de là on voit que toute la difficulté FIG. 247.

ſe reduit à trouver ſur la circonference du cercle $DEKFH$, le point D tel qu'ayant mené les droites DA, DB, qui rencontrent la circonference aux points E, F; la corde EF ſoit parallele à la ligne AB. Or cela ſe peut faire ainſi.

Ayant décrit du point C un cercle qui ait pour rayon une ligne $CD = AM - MC$, & tiré AC qui rencontre ce cercle aux points K, H; on prendra ſur AB la partie AG quatriéme proportionelle à AB, AH, AK, & on menera du point G la tangente GE au cercle $EDHFK$. Ayant mené par le point touchant E la ligne AE qui rencontre le cercle au point D, on tirera DC, ſur laquelle on prendra le point M tel que $DM.DC :: DA.DE$. Je dis qu'il ſera celui qu'on cherche.

Car par la proprieté du cercle $DEKFH$ le rectangle $HA \times AK = DA \times AE$; Et par conſequent $BA.AD :: AE.AG$: c'eſt pourquoi les triangles DAB, GAE, qui ont l'angle A commun, & les côtés autour de cet angle reciproquement proportionnels, ſeront ſemblables. L'angle AEG ſera donc égal à l'angle ABD; mais cet angle AEG étant fait par la tangente EG & par la corde DE prolongée du côté de E, a pour meſure la moitié de l'arc DE. Il ſera donc égal (en tirant par le point F où la ligne DB rencontre la circonference, la corde EF) à l'angle DFE; & par conſequent les lignes FE, AB, ſeront paralleles entr'elles. Or par la conſtruction $DC.DM :: DE.DA :: DF.FB$. Les triangles DMA, DMB, ſeront donc iſoſcelles; puiſque les triangles DCE, DCF, qui leur ſont ſemblables ſont iſoſcelles. Les lignes AM, MB, ſeront donc égales chacune à DM, & par conſequent entr'elles; & de plus AM où DM ſurpaſſera MC de la grandeur donnée CD. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

FIG. 248. *Troiſiéme cas.* Lorſque les trois lignes MA, MP, MC, ſont inégales entr'elles. Du point donné C, je mene la perpendiculaire CO ſur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés; & du point M, que je ſuppoſe

suppose être celui qu'on demande, les perpendiculaires *MP*, *MQ*, sur les lignes *AB*, *CO*. Je nomme les données *AO*, a; *OB*, b; *CO*, c; $AM-MB$, d; $AM-MC$, f; & les inconnuës *OP*, x; *PM*, y; *AM*, z: ce qui donne $AP=a+x$, $BP=b-x$, $CQ=c-y$, $BM=z-d$, $CM=z-f$. Par le moyen des triangles rectangles *APM*, *BPM*, *CQM*, je trouve les trois équations suivantes; la premiere, $zz=aa+2ax+xx+yy$; la deuxiéme, $zz-2dz+dd=bb-2bx+xx+yy$; la troisiéme, $zz-2fz+ff=cc-2cy+yy+xx$; & retranchant par ordre les membres des deux dernieres de ceux de la premiere, je forme une quatriéme, & une cinquiéme équation; sçavoir la quatriéme, $2dz-dd=aa-bb+2ax+2bx$, & la cinquiéme, $2fz-ff=aa-cc+2ax+2cy$. Je mets dans la premiere équation à la place de yy le quarré de la valeur de y trouvée par le moyen de la cinquiéme; & ensuite à la place de x sa valeur trouvée par le moyen de la quatriéme, & à la place de xx le quarré de cette valeur: ce qui donne enfin une égalité où il n'y a plus d'inconnuës que la seule z qui ne monte qu'au quarré. C'est pourquoi on la pourra toûjours resoudre en n'employant que des lignes droites & des cercles, comme l'on a enseigné dans les articles 380, ou 382. (Liv. preced.) Or ayant la valeur de l'inconnuë z, il est facile de trouver le point cherché *M*; car il sera dans l'intersection de deux arcs de cercle, dont l'un aura pour centre le point *A*, & pour rayon la ligne *AM* (z); & l'autre pour centre le point *B*, & pour rayon la ligne *BM* ($z-d$).

On voit assez qu'en achevant le calcul, on seroit arrivé à une égalité du deuxiéme degré qui auroit renfermé dans ses termes des quantités tres-composées; de sorte que pour les réünir sous des expressions simples, comme le demandent les articles 380, & 382, on auroit besoin d'un grand nombre d'operations; ce qui rendroit la construction tres-longue. C'est pourquoi on se servira de celle-ci par le moyen de laquelle on reduit ce cas au precedent.

Les deux droites *AB*, *AC*, qui joignent les points FIG. 248.

donnés étant divisées par le milieu aux deux points D, F, & ayant mené du point M que je suppose être celui qu'on cherche, les perpendiculaires MP, MQ, sur ces deux lignes ; on nommera les données AB, $2a$; BC, $2b$; $AM - MB$, $2c$; $AM - MC$, $2d$; & les inconnuës DP, x ; FQ, y. Cela posé, si l'on nomme $2t$ la somme inconnuë des deux droites AM, BM ; la plus grande AM sera $t + c$ & la moindre BM sera $t - c$. Or les triangles rectangles APM, BPM, donnent $\overline{PM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{BP}^2$ c'est à dire en termes analytiques $tt + 2ct + cc - aa - 2ax - xx = tt - 2ct + cc - aa + 2ax - xx$, d'où l'on tire $t = \frac{ax}{c}$; & par consequent AM $(t + c) = \frac{ax}{c} + c$. On trouvera de même par le moyen des deux triangles rectangles AQM, CQM, que $AM = \frac{by}{d} + d$; ce qui, en comparant ensemble les deux valeurs de AM, donne cette équation $\frac{ax}{c} + c = \frac{by}{d} + d$, ou $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + d - c = \frac{by}{d} + f$, en faisant pour abreger $d - c = f$. D'où il est clair que le point cherché M doit être tel qu'ayant mené les perpendiculaires MP, MQ, sur les deux droites AB, AC ; on ait cette équation $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + f$, ou ce qui revient au même cette proportion $x . y + \frac{df}{b} :: b . \frac{ad}{c}$. Or cela suffit pour trouver la construction suivante.

Ayant joint les points donnés par les deux droites AB, AC, & divisé ces droites par le milieu aux points D, F ; on prendra sur AC du côté du point A la partie $FK = \frac{df}{b}$; & ayant tiré sur AB, AC, les perpendiculaires DO, KS, qui se rencontrent au point H, on menera dans l'angle OHS la droite HM qui soit le lieu des points M, tels qu'ayant tiré de chacun d'eux

les perpendiculaires *MO*, *MR*, sur les côtés *HO*, *HS*; la droite *MO* soit toûjours à la droite *MR*, en la raison donnée de b à $\frac{ad}{c}$. Ensuite l'on tirera *AE* perpendiculaire sur *HM*, & l'ayant prolongée en *G* en sorte que *EG* soit égale à *AE*, on trouvera par le second cas le point *M*, tel qu'ayant mené les droites *MA*, *MG*, *MC*; les deux *MA*, *MG*, soient égales entr'elles, & la difference de *MA* à *MC* soit la donnée $2d$. Je dis qu'il satisfera à la question.

Car par la proprieté de la droite *HM*, on aura toûjours *MO* ou *DP* (x). *MR* ou *QK* $(y + \frac{df}{b})$ :: b. $\frac{df}{b}$; & par consequent le point *M* se doit trouver dans cette ligne. Il sera donc également éloigné des points *A*, *G*; mais de plus la difference de *AM* à *MC* doit être la donnée $2d$. Donc &c.

REMARQUE.

433. Si au lieu que dans cet exemple, les deux differences de l'une de ces trois droites *MA*, *MB*, *MC*, aux deux autres sont données; on vouloit à present que ce fussent les deux sommes de l'une de ces droites avec chacune des deux autres, ou bien la somme de l'une d'elles avec une autre & la difference de la même avec la troisiéme : la question n'en deviendroit pas plus difficile, & on pourroit toûjours la resoudre par les mêmes methodes. Ce que je n'expliquerai point en détail, afin de laisser quelque chose à l'industrie des Lecteurs.

COROLLAIRE I.

434. De-là on voit comment on peut décrire un cercle qui touche trois cercles donnés.

Car soient les points *A*, *B*, *C*, les centres des cercles donnés, & le point *M* celui du cercle qu'on cherche, lequel touche les cercles donnés aux points *D*, *E*, *F*. du côté que l'on voit dans la figure. Soient les rayons FIG. 250.

des cercles donnés $AD = a$, $BE = b$, $CF = c$; & le rayon du cercle qu'on cherche MD ou ME ou $MF = z$. Cela posé, on aura $AM = z + a$, $MB = z + b$, $MC = z - c$; & partant $AM - MB = a - b$, $MB - MC = b + c$, $AM - MC = a + c$. D'où il est evident que la question se reduit à trouver un point M, duquel ayant mené aux trois points donnés A, B, C, les droites MA, MB, MC, leurs differences soient données.

COROLLAIRE II.

FIG. 251. 252. 435. DE-LA on tire encore la maniere de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné F, qui passe par deux autres points donnés B, C, & qui touche une ligne droite DE donnée de position.

On doit distinguer ici deux differens cas, dont le premier est, lorsque les trois points donnés F, B, C, tombent du même côté de la droite indéfinie DE; & le second lorsqu'ils tombent de part & d'autre.

FIG. 251. *Premier cas.* Ayant mené FD perpendiculaire sur DE, & l'ayant prolongée en A en sorte que DA soit égale à DF; on tirera les droites FB, FC. On trouvera le point M tel que la difference de AM & BM soit égale à FB, & celle de AM & MC égale à FC. On décrira ensuite * une Section conique qui ait pour ses deux foyers les points F, M, & pour l'axe qui passe par les foyers une ligne égale à AM. Je dis qu'elle sera celle qu'on cherche.

* *Def.* 1. II. & 1. III.

Car 1°. Le point E où la ligne AM rencontre la droite DE est à la Section, puisque FE étant égale à AE, on aura dans l'Ellipse la somme des droites FE, EM, & dans l'Hyperbole la difference égale à l'axe qui passe par les foyers; & par la même raison les points B, C, seront aussi dans la Section. 2°. Par la construction les angles FED, DEA, sont égaux entr'eux; & par consequent la ligne ED est * tangente en E.

* *Art.* 60. & 123.

Il faut remarquer dans ce cas que lorsqu'on cherche

le foyer M du même côté du foyer donné F par rapport à la ligne DE, la Section qu'on trouve est une Ellipse ; au lieu qu'elle sera une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées, lorsqu'on le cherchera de l'autre côté.

Second cas. Il est évident que dans ce dernier cas il ne peut y avoir d'Ellipse qui satisfasse, mais seulement deux Hyperboles opposées. Pour les trouver ; ayant mené comme dans le premier cas FD perpendiculaire sur DE, & l'ayant prolongée en A en sorte que DA soit égale à DF ; on cherchera le point M tel que la somme de AM & BM soit égale à la donnée FB, & la difference de AM & MC soit égale à la donnée FC. On décrira enfin deux Hyperboles opposées qui ayent pour foyers les deux points F, M, & dont le premier axe soit égal à AM. Je dis qu'elles ont les conditions requises. FIG. 252.

Car 1°. Le point E, où la ligne AM rencontre la ligne DE, sera à l'une de ces deux Hyperboles, puisque FE étant égale à AE, la difference des droites FE, ME, sera égale à AM valeur du premier axe ; & par la même raison les points B, C, seront à ces Hyperboles. 2°. La ligne DE sera * tangente en E, puisque par la construction les angles AED, DEF, sont égaux entr'eux. * *Art.* 123.

Si le point C tomboit du même côté du point B par rapport à la ligne DE la somme des deux droites AM & MC seroit égale à la donnée FC ; au lieu que c'est la difference lorsque les points B, C, tombent de part & d'autre de la ligne DE, comme l'on a supposé dans cette figure.

Si l'on proposoit de décrire une Section conique qui eût pour foyer un point donné, pour tangentes deux lignes données de position, & qui passât par un autre point donné ; on trouveroit par le moyen de ces deux lignes deux points comme l'on vient de faire le point A, desquels ayant mené deux droites qui aboutissent à l'autre foyer qu'on cherche, elles doivent être égales entr'elles, & leur difference ou leur somme avec celle qui part du

point où doit passer la Section & qui aboutit au même foyer, sera toûjours donnée : de sorte qu'on pourra toûjours resoudre la question par le moyen de l'Exemple precedent & de sa Remarque. Enfin s'il falloit décrire une Section qui touchât trois lignes données de position, & qui eût pour foyer un point donné ; on trouveroit par le moyen de ces trois lignes trois points, comme l'on a fait le point *A* par le moyen de la ligne *DE* dans les deux cas precedens, & le centre du cercle qui passeroit par ces trois points, seroit l'autre foyer de la Section, laquelle auroit pour premier axe une ligne égale au rayon de ce cercle.

On doit observer dans tous ces differens cas, que si le point cherché *M* étoit infiniment eloigné du point *F* ; la Section deviendroit alors une Parabole dont les diametres seroient paralleles aux lignes, qui, continuées à l'infini, aboutiroient au point cherché.

EXEMPLE V.

FIG. 253. 436. UNE Parabole *NCS* étant donnée avec un de ses arcs *MN* ; trouver un autre arc *RS* qui soit à l'arc *MN*, en raison donnée de nombre à nombre.

Ayant prolongé l'axe de la Parabole du côté de son origine *C* jusques en *A*, en sorte que *CA* soit egal à la moitié de son parametre, & décrit une Hyperbole équilatere *EAF* qui ait pour centre le point *C* & pour la moitie de son premier axe la ligne *CA* ; on menera parallelement à l'axe *CA* les droites *MB*, *NE*, *RD*, *SF*, qui rencontrent le second axe aux points *H*, *L*, *K*, *O*, & l'Hyperbole aux points *B*, *E*, *D*, *F*, desquels on tirera sur les Asymptotes les perpendiculaires *BP*, *EQ*, *DG*, *FI*. Cela fait, il est visible que le rectangle $AC \times MN$ ou * le Trapese hyperbolique *HBEL* est egal au Secteur hyperbolique *CBE* plus le triangle *CLE* moins le triangle *CHB* ; & de même que $AC \times RS = CDF + COF - CKD$. Or supposant que la raison donnée de l'arc *MN* à l'arc *RS* soit comme *m* est à *n*, les lettres *m* & *n* expliquent des nombres entiers quel-

* Art. 246.

conques) on aura par la condition du Problême $AC \times MN$ ou $CBE + CLE - CHB$. $AC \times RS$ ou $CDF + COF - CKD :: m.n$, & par consequent $nCBE + nCLE - nCHB = mCDF + mCOF - mCKD$. Si donc l'on nomme les données CP, b; CQ, c; l'inconnuë CG, x; & qu'on prenne $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, il est clair * que le Secteur hyperbolique $CBE.CDF :: m.n$, & qu'ainsi $nCBE = mCDF$; d'où l'on voit que l'égalité precedente se change en celle-ci $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$ qui ne renferme plus d'espaces hyperboliques, mais seulement des triangles rectangles dont il s'agit maintenant de trouver les valeurs analytiques. * Art. 223.

Les droites CP, HB, forment en s'entrecoupant au point V deux triangles rectangles VHC, VPB, qui sont semblables; puisque les angles en V étant opposés au sommet sont égaux; ce qui donne $HV.CV :: VP.VB$, & en multipliant les extrêmes & les moyens $HV \times VB = CV \times VP$. De plus à cause de l'Hyperbole équilatere EAF, l'angle VCA ou CVH * est demi droit, & par consequent le triangle rectangle CHV est isoscelle, aussi-bien que son semblable VPB, ce qui donne $VP = PB$, $CH = HV$, & $\overline{CV}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HV}^2 = 2\overline{HV}^2$. Donc le quadruple du triangle rectangle CHB, c'est à dire $2CH \times HB = 2HV \times \overline{HV + VB} = 2\overline{HV}^2 + 2HV \times VB = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2 - \overline{VP}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{PB}^2$, puisque $\overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2$ est le quarré de $CV + VP$ ou de CP. Et par consequent le triangle $CHB = \frac{1}{4}\overline{CP}^2 - \frac{1}{4}\overline{PB}^2$. On prouvera de même que le triangle $CLE = \frac{1}{4}\overline{CQ}^2 - \frac{1}{4}\overline{QE}^2$, que le triangle $CKD = \frac{1}{4}\overline{CG}^2 - \frac{1}{4}\overline{GD}^2$, & enfin que le triangle $COF = \frac{1}{4}\overline{CI}^2 - \frac{1}{4}\overline{IF}^2$. C'est pourquoi nommant aa la puissance de l'Hyperbole, on aura le triangle $CHB = \frac{1}{4}bb - \frac{a^4}{4bb}$, le triangle * Def. 16. III.

$CLE = \frac{1}{4}cc - \frac{a^4}{4cc}$, le triangle $CKD = \frac{1}{4}xx - \frac{a^4}{4xx}$, le triangle $COF = \frac{xx}{4}\sqrt[m]{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{4xx}\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$; puisque * PB

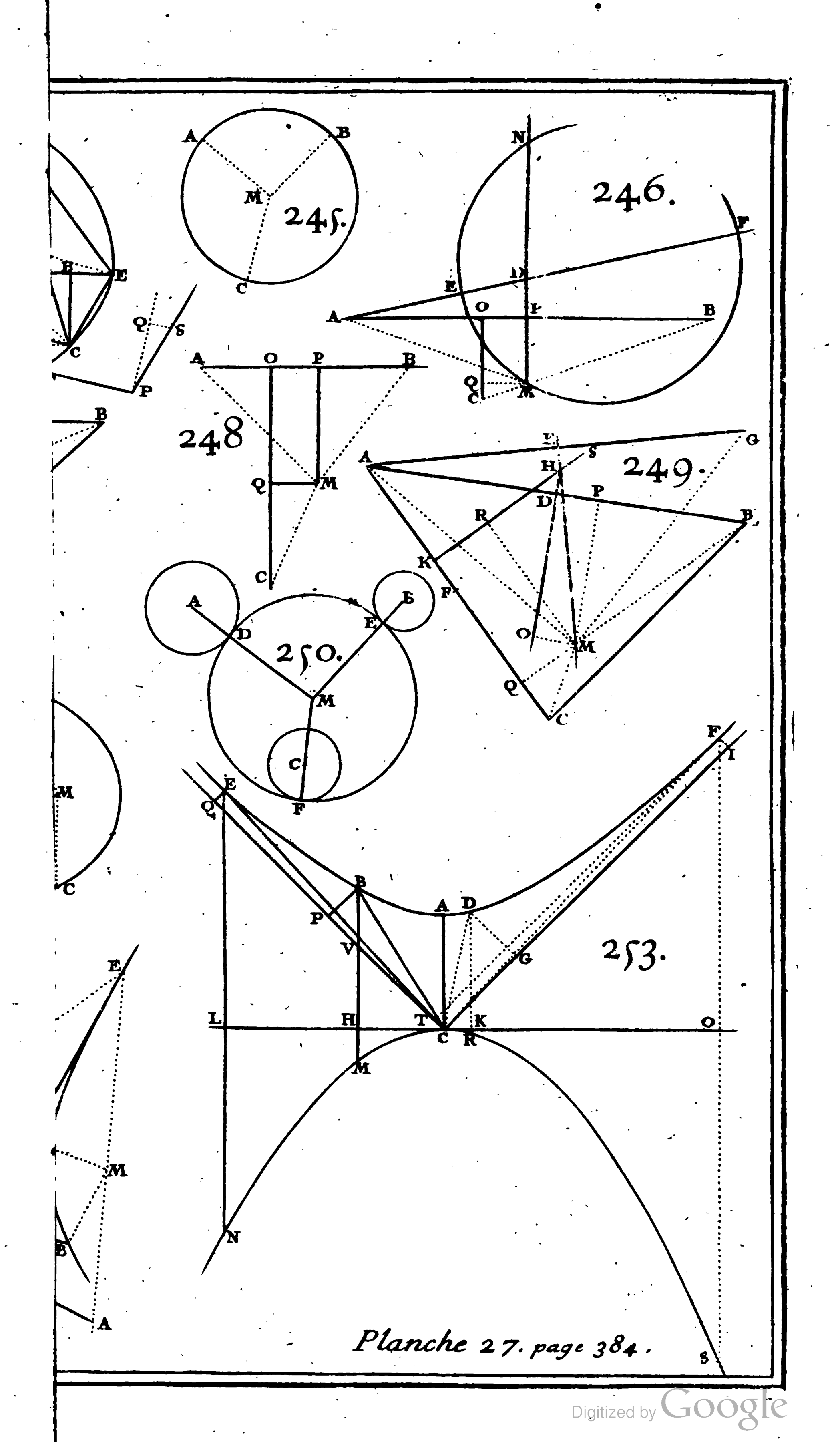
* Art. 101.

$= \frac{aa}{b}$, $QE = \frac{aa}{c}$, $IF = \frac{aa}{x}\sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$: & mettant ces valeurs à la place des triangles qu'elles expriment dans l'égalité $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$, on en formera celle-ci $\frac{1}{4}n \times cc - \frac{a^4}{cc} - bb + \frac{a^4}{bb} = \frac{1}{4}m \times xx\sqrt[m]{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{xx}\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}} - xx + \frac{a^4}{4xx}$ qui se reduit, en operant selon les regles ordinaires de l'Algebre, à cette égalité du deuxiéme degré $x^4 - \frac{na^4 - nbbcc \times cc - bb \times \sqrt[m]{b^{2n}}}{mbbcc \times \sqrt[m]{c^{2n}} - \sqrt[m]{b^{2n}}}xx + a^4\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}} = 0$, dont la resolution doit fournir pour CG (x) une valeur telle qu'en prenant $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, & tirant les perpendiculaires GD, IF, qui rencontrent l'Hyperbole équilatere aux points D, F; l'arc RS que les paralleles DR, FS à l'axe coupent sur la Parabole, sera à l'arc MN en la raison donnée de n à m.

Il est à propos de remarquer, 1°. Que le second terme de cette égalité est toûjours negatif, parce que CQ (c) surpasse CP (b); & qu'ainsi ces deux racines seront toutes deux vraies ou toutes deux imaginaires, selon que la moitié de la grandeur connuë au second terme est plus grande ou moindre que $aa\sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$ racine quarrée du dernier terme : ce qui est une suite de la resolution des égalités du second degré. 2°. Que $\overline{CG}^2$ (xx) étant une des racines de cette égalité, $\overline{IF}^2$ en sera l'autre. Car puisque $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, il s'ensuit * que $IF = \frac{aa}{x}\sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$. Or on sçait que le dernier terme d'une égalité, est le produit de ses racines. Si donc on divise le dernier terme $a^4\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$ de

* Art. 101.

l'égalité


245.
246.
248
249.
250.
253.
Planche 27. page 384.

l'égalité precedente, par le quarré $\overline{CG}^2$ (xx) que l'on suppose être l'une de ses deux racines; l'autre sera $\frac{a^4}{xx}\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$ qui est le quarré de FI. D'où l'on voit que si l'on prend sur les deux Asymptotes les parties CG, CT, égales aux deux racines de l'égalité precedente; & qu'ayant tiré les paralleles GD, TF, aux Asymptotes, on mene par les points D, F, où elles rencontrent l'Hyperbole équilatere EAF, les paralleles DR, FS, à l'axe: elles couperont sur la Parabole l'arc cherché RS.

Si $m = n$, l'équation generale se changera en celle-ci $x^4 - \frac{bbcc - a^4}{cc}xx + \frac{a^4bb}{cc} = 0$, dont les deux racines fournissent $CG(x) = b = CP$, & $CT(x) = \frac{aa}{c} = QE$; d'où il suit qu'on trouve par leur moyen un arc RS, semblablement posé de l'autre côté de l'axe, par rapport à l'arc MN. Or comme l'on sçait d'ailleurs * que les deux arcs RS, MN, étant semblablement posés de part & d'autre de l'axe sont égaux entr'eux, cela sert à confirmer les raisonnemens que l'on vient de faire. De là il est aisé de conclure qu'un arc parabolique MN étant donné, on n'en peut trouver aucun autre RS qui soit plus proche ou plus éloigné de l'origine C de l'axe & qui lui soit égal; sans supposer la quadrature de quelque Secteur hyperbolique, ou (ce qui revient au même) la rectification de quelque arc parabolique. * Art. 86.

Si $m = 1$ & $n = 2$, on aura $x^4 - \frac{2a^4bb - 2ccb^4}{c^4 + bbcc}xx + \frac{a^4b^4}{c^4} = 0$, & si $m = 2$ & $n = 3$, ou, ce qui est la même chose, si l'arc RS doit être à l'arc MN comme 3 est à 2, on trouvera $x^4 - \frac{\overline{3a^4 - 3bbcc} \times \overline{bcc - b^3}}{2b^5 - 2ccb^3}xx + \frac{a^4b^3}{c^3} = 0$; & la resolution de ces égalités fournira celle du Problême. Il en est de même des autres valeurs de m & n.

M. *Bernoulli*, celebre Professeur des Mathematiques à Groningue, a resolu le premier ce Problême d'une maniere differente de celle ci. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipsic de l'année 1698. p. 261.

EXEMPLE VI.

FIG. 254. 437. Un angle BAC étant donné avec un point D au dedans de cet angle ; décrire un cercle qui passe par le point donné D, qui touche le côté AB en quelque point P, & qui coupe sur l'autre côté AC une partie OC égale à une ligne donnée $2a$.

Ayant supposé le Problême resolu, on menera du point donné D, la ligne DA qui passe par le sommet A de l'angle donné, la ligne DP qui passe par le point touchant P & rencontre en H le côté AC prolongé, la ligne DE parallele à AC, & la perpendiculaire DB sur le côté AB : & ayant divisé la partie interceptée OC ($2a$) par le milieu en Q, on nommera les inconnuës AP, x; AQ, z; DH, t; & les données AE, m; AB, g; BD, b; DE, f; AD, n. Cela fait, on aura par la proprieté du cercle $\overline{AP}^2$ (xx) $= CA \times AO$ ou $\overline{AQ}^2$ (zz) $- \overline{QO}^2$ (aa), & partant $zz = xx + aa$. De plus les triangles semblables PED, PAH, donnent AE (m). AP (x) :: DH (t). $HP = \frac{tx}{m}$. Et PE ($m - x$). ED (f) :: AP (x). $AH = \frac{fx}{m-x}$. Donc $HQ = z + \frac{fx}{m-x}$ & $CH \times HO$ ou $\overline{HQ}^2 - \overline{QO}^2 = zz + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{\overline{m-x}^2} - aa = xx + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{\overline{m-x}^2}$ (en mettant pour zz sa valeur $xx + aa$) $= DH \times HP$ ($\frac{ttx}{m}$) par la proprieté du cercle ; c'est à dire qu'en divisant par x, on aura cette égalité $x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ffx}{\overline{m-x}^2} = \frac{tt}{m}$. Or PD ou $DH - HP = \frac{mt - tx}{m}$; & (à cause du triangle rectangle DBP) son quarré $\frac{mmtt - 2mttx + ttxx}{mm} = xx - 2gx + gg + bb = xx - 2gx + nn$ en mettant pour $bb + gg$ sa valeur nn ; d'où l'on tire $\frac{tt}{m} = \frac{mxx - 2gmx + mnn}{\overline{m-x}^2} = x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ffx}{\overline{m-x}^2}$, & multipliant par $m - x$, &

transposant le terme $\frac{ffx}{m-x}$, il vient $mx - xx + 2fz = \frac{mxx - 2gmx - ffx + mnn}{m-x} = \frac{mxx - mmx - nnx + mnn}{m-x}$, puisque à cause du triangle rectangle DEB on trouve $ff = bb + gg - 2gm + mm = nn - 2gm + mm$: c'est à dire, parce que la division se fait au juste, $mx - xx + 2fz = -mx + nn$ ou $2fz = xx - 2mx + nn$. Quarrant enfin chaque membre, & mettant pour zz sa valeur $xx + aa$ on aura cette égalité

$$\begin{array}{llllll} x^4 - 4mx^3 & + 4mmxx & - 4mnnx & + n^4 & = 0 \\ & - 4ff & & - 4aaff & \\ & + 2nn & & & \end{array}$$

qui est du quatriéme degré, & dont les racines que l'on trouvera par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée ou de telle autre Section conique qu'on voudra doivent fournir pour AP (x) des valeurs telles que menant PM perpendiculaire sur AP, tirant PD, & faisant l'angle PDM égal à l'angle DPM, le point M, où se rencontrent les côtés DM, PM du triangle isoscelle DPM, soit le centre du cercle cherché, qui aura pour rayon la droite MP ou MD. Où bien si l'on prend sur le côté AB la partie $AP = x$, & sur l'autre côté AC la partie $AQ = \sqrt{xx + aa}$, & qu'on mene sur ces côtés les perpendiculaires PM, QM ; le point M où elles se rencontrent, sera le centre du cercle qu'on demande.

Comme rien n'est plus propre à donner de l'ouverture à l'esprit, que de faire voir les differens chemins qu'on peut suivre pour arriver à la connoissance de la même verité ; je vais donner une autre maniere de resoudre cette question, qui me paroit encore plus naturelle que la precedente.

Ayant supposé que le point M soit le centre du cercle cherché, on menera les perpendiculaires MP, MQ, sur les côtés de l'angle donné BAC, & les paralleles MF, MG, à ces côtés ; & du point donné D, on tirera les paralleles DB, DE, DK, à MP, MF, AB. On nommera ensuite les données DB, b ; BE, c ; DE, f ; AB, g ;

Ccc ij

AE, m; AD, n; & les inconnuës AP, x; PM ou MD, y; & on aura PB ou $DK = g - x$, $MK = y - b$: ce qui donne (à cause du triangle rectangle MKD) l'équation $yy = gg - 2gx + xx + yy - 2by + bb$, d'où l'on tire $y = \frac{xx - 2gx + bb + gg}{2b} = \frac{xx - 2gx + nn}{2b}$ en mettant pour $bb + gg$ sa valeur nn. Or à cause des triangles semblables DBE, MPF, on a cette proportion $DB(b)$. $BE(c)$ :: $PM(y)$. $PF = \frac{cy}{b}$, & partant AF ou $MG = \frac{bx - cy}{b}$; & à cause des triangles semblables DBE, MQG, $DE(f)$. $DB(b)$ :: MG $(\frac{bx - cy}{b})$. $MQ = \frac{bx - cy}{f}$; Donc puisque par les conditions du Problême, il faut que QC moitié de la partie interceptée OC soit égale à la ligne donnée a, & que les droites MC & MP soient rayons d'un même cercle cherché; il vient $\overline{MC}^2 = \frac{bbxx - 2bcxy + ccyy}{ff} + aa = \overline{MP}^2 (yy)$, & multipliant par ff on aura $bbxx - 2bcxy + ccyy + aaff = ffyy = bbyy + ccyy$, en mettant pour ff sa valeur $bb + cc$, c'est à dire $ffxx + aaff = ccxx + 2bcxy + bbyy$, en effaçant de part & d'autre $ccyy$, & mettant pour $bbxx$ sa valeur $ffxx - ccxx$; ce qui donne par l'extraction de la racine quarrée, $f\sqrt{xx + aa} = cx + by = \frac{2cx - 2gx + xx + nn}{2b}$ en mettant pour y sa valeur $\frac{xx - 2gx + nn}{2b}$, & enfin si l'on met pour $g - c$ sa valeur m; on trouvera la même égalité que ci-dessus $2f\sqrt{xx + aa} = xx - 2mx + nn$.

Voici encore une nouvelle maniere de resoudre cette question, qui donne d'abord une construction fort aisée, mais qui demande la description de deux Paraboles. 1°. Je cherche le lieu des points M, tels qu'ayant mené de chacun de ces points au point donné D une ligne droite MD, & sur la ligne AB donnée de position la perpendiculaire MP; ces deux lignes MD, MP, soient toûjours égales entr'elles : & je vois sans aucun calcul que c'est* la Parabole qui a pour foyer le point D, & pour direc-

* Art. 1.

nide la ligne AB. 2°. Je cherche le lieu des points M, tels qu'ayant décrit de chacun de ces points un cercle qui passe par le point donné D; ce cercle coupe sur la ligne AL donnée de position, la partie QC égale à une ligne donnée $2a$. Je mène à cet effet du point donné D la perpendiculaire DL sur AL, & d'un des points cherchés M que je regarde comme donné, les perpendiculaires MR, MQ, sur DL, AL, & ayant nommé les inconnuës & indéterminées DR, x; RM, y; qui font entr'elles un angle droit DRM, & la connuë DL, b; j'ai à cause du triangle rectangle MRD le quarré $\overline{MD}^2 = xx + yy$, & à cause du triangle rectangle MQC le quarré $\overline{MC}^2 = \overline{MQ}^2$ $(bb - 2bx + xx) + \overline{QC}^2$ (aa). Or les lignes MD, MC, étant rayons du même cercle sont égales entr'elles, & par consequent $xx + yy = bb - 2bx + xx + aa$, ou $yy = bb + aa - 2bx$. Si donc l'on construit la Parabole qui est le lieu de cette équation, il est visible qu'elle passera par le centre M du cercle qu'on demande : mais la Parabole qui a pour foyer le point D & pour directrice la ligne AB devant aussi passer par ce centre, il s'ensuit que le centre du cercle cherché se trouvera dans l'intersection de ces deux Paraboles.

EXEMPLE VII.

438. Un cercle qui a pour centre le point A & pour rayon la droite AM, étant donné, avec deux points E, F, sur le même plan; trouver sur la circonference au dedans de l'angle EAF, le point M tel qu'ayant mené les droites AM, EM, FM; les deux angles AME, AMF, soient égaux entr'eux. Fig. 255.

Si les lignes AE, AF, étoient égales entr'elles, il est visible que la ligne qui diviseroit par le milieu l'angle EAF, couperoit la circonference dans le point qu'on demande. C'est pourquoi on supposera que ces deux lignes sont inégales, & même pour éviter la confusion

que c'est la ligne AE qui est moindre que la ligne AF. Or cela posé, je resouds ce Problême en deux differentes manieres.

PREMIERE MANIE'RE.

Ayant supposé que le point M soit celui qu'on cherche, on menera les droites MB, MD, qui fassent sur AF, AE, des angles MBA, MDA, égaux aux angles AMF, AME, & par consequent entr'eux ; & à cause des triangles semblables AFM, AMB, & AEM, AMD, on aura ces deux proportions $AF. AM :: AM. AB$. Et $AE. AM :: AM. AD$. Donc puisque les lignes AF, AE, sont données avec le rayon AM, les parties AB, AD, des droites AF, AE, le seront aussi. Maintenant, si l'on mene les droites MP, MQ, paralleles à AE, AF ; les triangles BPM, DQM seront semblables, puisque les angles APM, AQM, sont égaux, comme aussi les angles PBM, QDM, complemens à deux droits des angles égaux, MBA, MDA ; & partant si l'on nomme les données AB, a ; AD, b ; & les inconnuës AP ou QM, x ; PM ou AQ, y ; on aura BP $(x-a)$. PM (y) :: DQ $(y-b)$. QM (x) ce qui donne (en multipliant les extrêmes & les moyens) cette équation $xx - ax = yy - by$, ou $yy - by - xx + ax = 0$, dont le lieu
* Art. 336. est * une Hyperbole équilatere qui se construit ainsi.

Soient prises sur les lignes AF, AE, les parties AB, AD, troisiémes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM : soit tirée par le point C milieu de BD une ligne droite indefinie CH parallele à AB, sur laquelle soit prise la partie $CK = \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa}$ (la ligne AD (b) sera plus grande que BA (a), puisqu'on a supposé que AE est moindre que AF) : soit décrite une Hyperbole équilatere qui ait pour centre le point C, & pour la moitié d'un second diametre la droite CK, dont les ordonnées HM soient paralleles à AD. Je dis qu'elle rencontrera la circonference du cercle donné, au point cherché M.

Car menant CL parallele AD ; il est clair que les

lignes CH, CL, diviseront par le milieu les droites AD, AB, aux points O, L; puisque le point C coupe en deux parties égales la ligne BD, & qu'ainsi CH ou $AP - AL = x - \frac{1}{2}a$, HM ou $PM - AO = y - \frac{1}{2}b$. Or par la proprieté de l'Hyperbole équilatere, $\overline{HM}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CK}^2$, c'est à dire en termes analytiques $yy - by + \frac{1}{4}bb = xx - ax + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$; d'où l'on tire l'équation $yy - by = xx - ax$, qui étant reduite en proportion, donne $BP\ (x-a) . PM\ (y) :: DQ\ (y-b) . QM\ (x)$. Donc puisque les angles BPM, DQM, sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont proportionnels; les triangles BPM, DQM, seront semblables, & par consequent l'angle MBP sera égal à l'angle MDQ, & leurs complemens à deux droits ABM, ADM, seront égaux. Mais puisque $AB . AM :: AM . AF$, & $AD . AM :: AM . AE$, les triangles ABM, AMF, & ADM, AME, seront semblables. L'angle ABM sera donc égal à l'angle AMF, & l'angle ADM à l'angle AME; & par consequent les angles AMF, AME, seront égaux entr'eux, puisqu'on vient de prouver que les angles ABM, ADM, le sont.

On prouvera de même que l'Hyperbole opposée à celle ci coupera la circonference au dedans de l'angle opposé au sommet à l'angle EAF, en un point M tel qu'ayant mené les droites AM, ME, MF; les angles AME, AMF, seront égaux entr'eux : comme aussi que ces deux Hyperboles équilateres opposées couperont la circonference au dedans des angles qui sont à côté de ces deux ci, chacune en un point M tel qu'ayant mené les droites MA, ME, MF; l'angle AME sera égal au complement à deux droits de l'angle AMF.

Si l'on prend sur CL la partie CG égale à CK, il est clair * que CG sera la moitié du premier diametre conjugué à CK, & qu'ainsi * l'une des Asymptotes de ces deux Hyperboles sera parallele à KG. Or dans le triangle isoscelle GCK, l'angle externe GCO ou son égal BAD vaut les deux internes opposés, c'est à dire le dou-

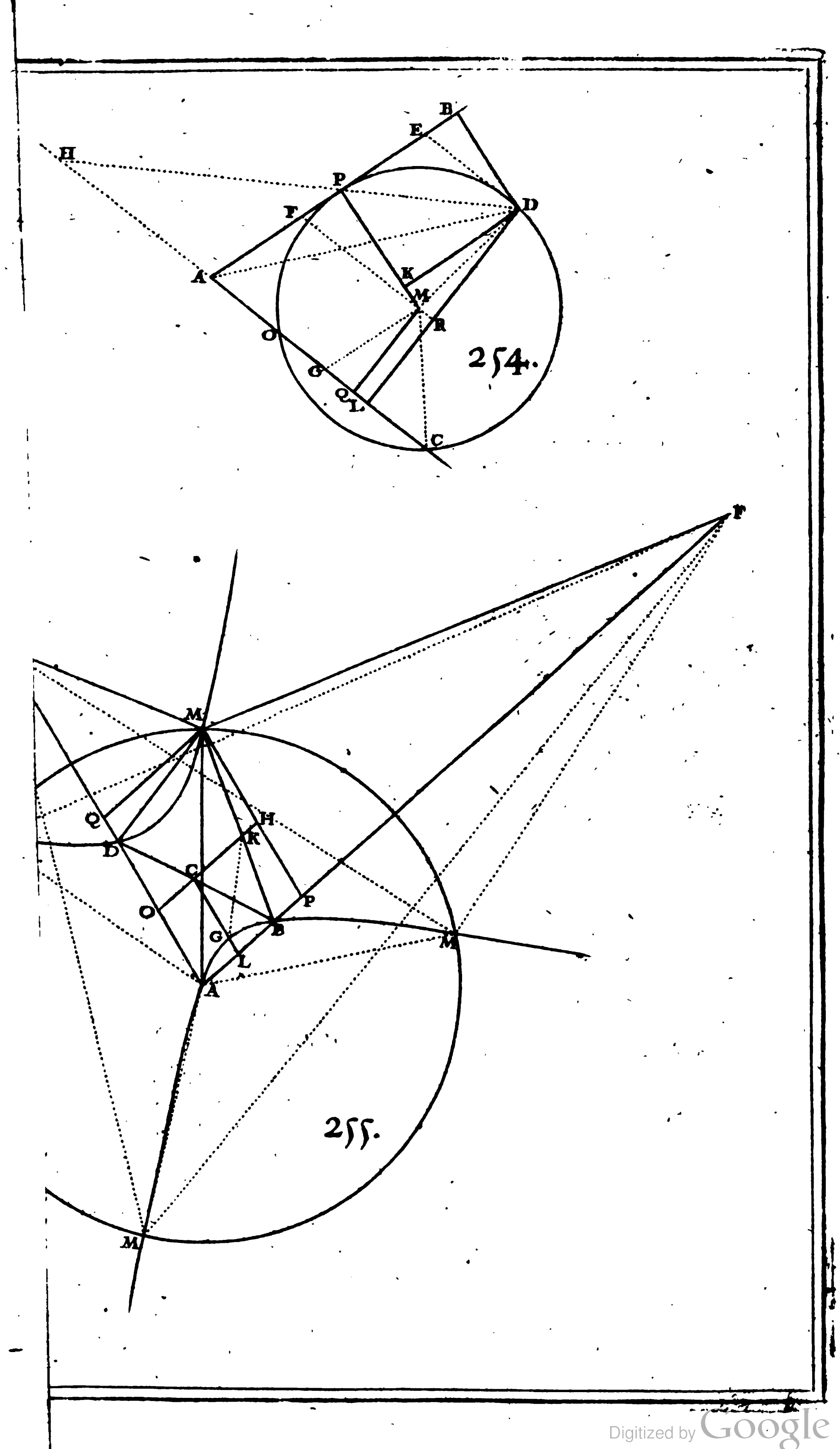
* Def. 16. III.

* Art. 114.

ble de l'angle CGK. Donc puiſque les lignes CG, AD, ſont paralleles, il s'enſuit que la ligne KG & par conſequent l'une des Aſymptotes ſera parallele à la ligne, qui diviſe par le milieu l'angle DAB. De plus il eſt évident que la ligne AD eſt une double ordonnée au ſecond diametre CK, puiſque $\overline{OD}^2$ ou $\overline{OA}^2$ $(\frac{1}{4}bb) = \overline{CO}^2$ $(\frac{1}{4}aa) + \overline{CK}^2$ $(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa)$; & qu'ainſi l'une des Hyperboles équilateres oppoſées paſſe par le point D, & l'autre par le point A. Ces deux remarques donnent lieu à une nouvelle conſtruction qu'il eſt plus ſimple que la precedente : la voici.

FIG. 256. Ayant pris ſur les lignes AF, AE, les parties AB, AD, troiſiémes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM; on menera par le point du milieu C de la ligne BD deux droites indéfinies GH, GK, l'une parallele & l'autre perpendiculaire à la ligne AP; qui diviſe par le milieu l'angle donné EAF. On décrira enſuite entre ces deux lignes comme Aſymptotes, par les points D, A, deux Hyperboles oppoſées, qui couperont la circonference du cercle donné en des points M tels qu'ayant mené les droites MA, ME, MF; les deux angles AME, AMF, ſeront égaux entr'eux lorſque le point d'interſection M tombe dans l'angle EAF ou dans ſon oppoſé au ſommet; & l'angle AME ſera égal au complement à deux droits de l'angle AMF lorſqu'il tombe dans l'un ou dans l'autre des angles à côté.

On n'eſt arrivé à cette derniere conſtruction qu'en ſuppoſant la premiere qui eſt fondée ſur le calcul, & en faiſant enſuite des remarques qui ſont aſſez recherchées. Il eſt cependant facile de la démontrer tout d'un coup, ſi l'on fait attention à une proprieté de l'Hyperbole équilatere qui ſe trouve dans l'article 361. (Liv. VIII.) & qui d'ailleurs ſe peut aiſément prouver. Car ſi l'on mene du point M où l'Hyperbole équilatere DM rencontre la circonference du cercle donné, aux deux extremités B, D, du premier diametre BD, les droites BM, DM,



254.
255.

BM, DM, qui rencontrent l'Asymptote CH aux points O, L, & la ligne AP qui lui est parallele aux points S, R; il est clair selon cet article, que MO est égal à ML, & qu'ainsi l'angle MOL ou MSR ou BSA est égal à l'angle MLO ou DRA. Mais par la construction l'angle BAS est égal à l'angle DAR, puisque la ligne AP divise par le milieu l'angle EAF. Partant les angles restans ABM, ADM, dans les deux triangles ABS, ADR, seront égaux entreux ; d'où il suit que les angles AMF, AME, le sont aussi. Et c'est ce qui étoit proposé.

On peut trouver facilement par le moyen de cette derniere construction, une égalité trés-simple qui ne renferme qu'une seule inconnuë, & dont la construction qui se pourra faire par telle Section conique qu'on voudra suivant les regles prescrites dans le Livre precedent, fournira la resolution du Problême. Soit menée à cet effet du point M la ligne MP parallele à l'Asymptote CK, & qui rencontre l'autre Asymptote CH au point H; & soient nommées les données AM, a; AK, b; CK, c; & les inconnuës AP, x; PM, y. Cela posé, on aura par la proprieté du cercle l'équation $xx + yy = aa$, & par la proprieté des Hyperboles opposées * l'autre équation $CH \times HM$ $(xy - cx - by + bc) = CK \times KA$ (bc); ce qui donne $xy - cx - by = o$, d'où l'on tire $y = \frac{cx}{x - b}$. Mettant le quarré de cette valeur à la place de yy dans la premiere équation $xx + yy = aa$, & operant à l'ordinaire on formera cette égalité du quatriéme degré

$$x^4 - 2bx^3 \begin{matrix} + bb \\ + cc \\ - aa \end{matrix} xx + 2aabx - aabb = o.$$

* Art. 100.

Or si l'on mene du centre C des Hyperboles, perpendiculairement à AC, la ligne CG qui rencontre la circonference au point G; les triangles rectangles ACG, AKC, donneront $\overline{CG}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AM}^2$ $(aa) - \overline{AK}^2$ (bb) $- \overline{CK}^2$ (cc). C'est pourquoi nommant la donnée CG, m,

on changera l'égalité precedente en celle-ci $x^4 - 2bx^3 - mmxx + 2aabx - aabb = 0$, dans laquelle les données sont le rayon *AM* (a), les lignes *AK* (b), *CK* (c), *CG* (m), & l'inconnuë x exprime des valeurs de *AP* telles que menant les perpendiculaires *PM*, elles rencontreront la circonference aux points cherchés.

Pour distinguer entre les deux points ou chaque perpendiculaire *PM* coupe la circonference du cercle, celui qui sert à la question presente; il faut observer de mener *PM* du côté où l'on a supposé que tomboit le point *M* par rapport à la ligne *AP* en faisant le calcul, lorsque sa valeur $\frac{cx}{x-b}$ qu'on a trouvé ci-dessus est positive, c'est à dire, lorsque x est en même temps vraie & plus grande que b, ou bien lorsqu'elle est fausse; & au contraire il la faut mener du côté opposé, lorsque sa valeur est negative, c'est à dire, lorsque x est en même temps vraie & moindre que b.

SECONDE MANIE'RE.

FIG. 257. Ayant mené par le point cherché *M* que l'on regarde comme donné la droite *MD* perpendiculaire au rayon *AM*, & par le point *D* où elle rencontre *AF* la droite *GH* parallele à *AM*, laquelle rencontre en *H* la ligne *MF*, & en *G* la ligne *EM* prolongée qui coupe en *C* la droite *AF*; on aura à cause des triangles semblables *FAM*, *FDH*, cette proportion : *AM*. *DH* :: *AF*. *FD*. Et à cause des triangles semblables *CAM*, *CDG*, cette autre, *AM*. *DG* :: *AC*. *CD*. Or la ligne *DG* est égale à *DH*, puisque par la condition du Problême les angles *AME*, *AMF*, devant être égaux, les angles *DMH*, *DMG*, le seront aussi. Donc *AF*. *FD* :: *AC*. *CD*, & *AF* + *FD*. *AF* :: *AC* + *CD* ou *AD*. *AC*. Cela posé, soient menées *EB*, *MP*, perpendiculaires sur *AF*, & *MQ* perpendiculaire sur *EB*: & soient nommées les données *AM*, a; *AB*, b; *EB*, c;

AF, d; & les inconnuës AP, x; PM, y. Les triangles rectangles ſemblables APM, AMD, donneront AP (x). AM (a) :: AM (a). $AD = \frac{aa}{x}$. Et partant $FD = d - \frac{aa}{x}$; & les triangles ſemblables EQM, MPC, donneront EQ ou $EB - MP$ $(c - y)$. QM ou $AP - AB$ $(x - b)$ :: MP (y). $PC = \frac{xy - by}{c - y}$. Donc AC ou $AP + PC = \frac{cx - by}{c - y}$, & mettant dans la proportion precedente $AF + FD$. AF :: AD. AC à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques, on formera (en multipliant les moyens & les extrêmes) cette équation $2cdxx - aacx - 2bdxy + aaby + aady = aadc$, qui ſe reduit en diviſant par $2cd$, & en faiſant (pour abreger) $b + d = f$, à cette autre $xx - \frac{b}{c}yx - \frac{aa}{2d}x + \frac{aaf}{2cd}y - \frac{1}{2}aa = 0$, dont le lieu qui eſt une Hyperbole entre ſes Aſymptotes étant conſtruit ſelon l'article 339. (Liv. VII.) coupera la circonference du cercle au point cherché M.

Si l'on veut avoir une égalité qui ne renferme que l'inconnuë x, on ſe ſervira de l'équation au cercle $xx + yy = aa$, dans laquelle mettant à la place de yy le quarré de y trouvé par le moyen de l'équation precedente, on arrivera à une égalité du quatriéme degré qui ne renfermera que l'inconnuë x, & dont l'une des racines exprimera la valeur de la cherchée AP.

EXEMPLE VIII.

439. Un cercle qui a pour centre le point A étant donné avec deux autres points E, F; trouver ſur la circonference le point M tel qu'ayant mené les droites AM, MF, ME; le ſinus droit de l'angle AMF ſoit au ſinus droit de l'angle AME, en la raiſon donnée de m à n. FIG. 258.

Je reſouds cette queſtion en trois differentes manieres.

PREMIERE MANIÈRE.

Ayant pris ſur les droites données AF, AE, les parties AB, AD, troiſiémes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM; on menera du point cherché M que l'on regarde comme donné les droites MB, MD, les perpendiculaires MG, MH, ſur AF, AE, & les paralleles MP, MQ, à AE, AF. Ayant pris ſur BM la partie BK égale à DM, on tirera du point K les droites KO, KL, paralleles à MG, MP, & du point donné D la perpendiculaire DC ſur AF. Cela fait, les triangles ſemblables BMG, BKO, donnent $BM.BK$ ou $DM :: MG.KO$. Or par la condition du Problême $m.n :: KO.MH$; puiſque prenant DM pour rayon ou ſinus total, les droites KO, MH, ſeront les ſinus droits des angles MBF, MDE, ou de leurs complemens à deux droits MBA, MDA, égaux par la conſtruction aux angles AMF, AME. Donc en multipliant par ordre les antecedens & les conſequens de ces deux proportions on aura $m \times BM.n \times MD :: MG \times KO.KO \times MH :: MG.MH :: MP.MQ$. à cauſe des triangles ſemblables MPG, MQH. Cela poſé.

On nommera les données AD, a; AC, b; CD, c; AB, d; AM, r; & les inconnuës AP ou MQ, x; PM ou AQ, y; & les triangles ſemblables ADC, PMG, QMH donneront $PG = \frac{by}{a}$, $MG = \frac{cy}{a}$, $QH = \frac{bx}{a}$, $HM = \frac{cx}{a}$, $AG = x + \frac{by}{a}$, GB ou $AB - AG = d - x - \frac{by}{a}$, DH ou $AQ + QH - AD = y + \frac{bx}{a} - a$: & à cauſe des triangles rectangles BGM, DHM, on aura $\overline{BM}^2$ ou $\overline{BG}^2 + \overline{GM}^2 = xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bbyy}{aa} - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd + \frac{ccyy}{aa} = xx + \frac{2b}{a}xy + yy - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd$ en mettant pour $bb + cc$ ſa valeur aa à cauſe du triangle rectangle ACD; & de même

$\overline{DM}^2 = yy + \frac{2b}{a}xy + xx - 2ay - 2bx + aa$. Or par la proprieté du cercle, le quarré $\overline{AM}^2$ $(rr) = \overline{AG}^2$ $(xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bbyy}{aa}) + \overline{GM}^2$ $(\frac{ccyy}{aa}) = xx + \frac{2b}{a}xy + yy$ en mettant pour $bb + cc$ sa valeur aa. Si donc l'on substituë dans les valeurs de $\overline{BM}^2$ & de $\overline{DM}^2$ à la place de $yy + \frac{2b}{a}xy + xx$ cette valeur rr, & que pour abreger on fasse $rr + dd = ff$ & $rr + aa = gg$, on trouvera $BM = \sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y}$, & $DM = \sqrt{gg - 2ay - 2bx}$. Substituant enfin ces valeurs à la place de BM & de DM dans la proportion $m \times BM . n \times DM :: MP(y) . MQ(x)$ que l'on a trouvée ci-dessus ; & multipliant les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $mx\sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y} = ny\sqrt{gg - 2ay - 2bx}$ de laquelle quarrant chaque membre, & faisant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de l'équation au cercle $xx + \frac{2b}{a}xy + yy = rr$, on arrivera à une égalité du sixiéme degré qui ne renfermera plus que l'inconnuë x, & qui étant resoluë selon les regles du Livre precedent, donnera pour $AP(y)$ une valeur telle que menant PM parallele à AE, le point M où cette ligne rencontrera la circonference, sera celui qu'on cherche.

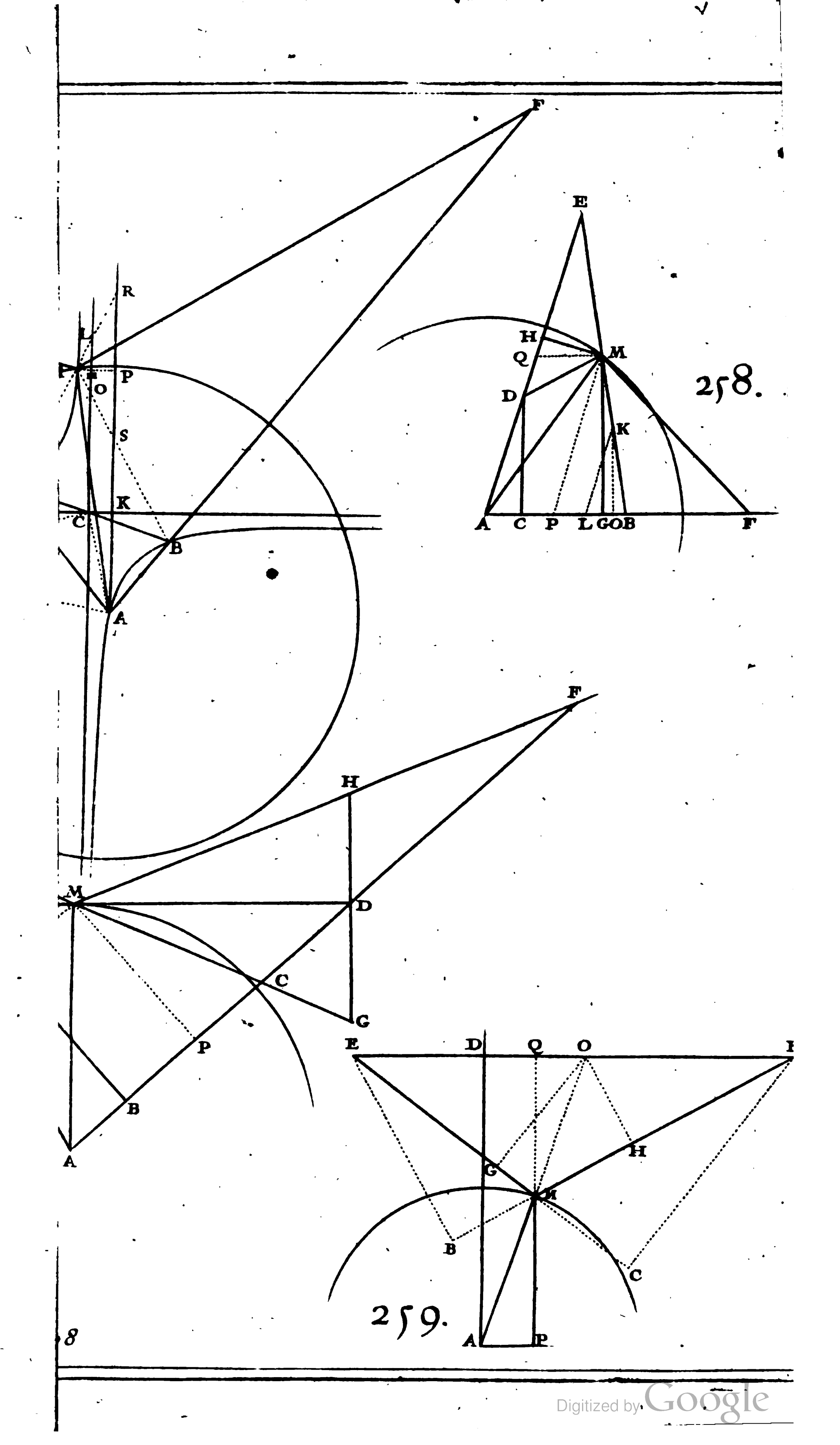
Si l'on suppose que $m = n$, il est évident que les angles MBF, MDE, seront égaux ; & qu'ainsi les angles ABM, ADM, ou AMF, AME, le seront aussi. D'où l'on voit que le Problême precedent n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

SECONDE MANIÉRE.

Ayant joint les deux points donnés E, F, par une FIG. 259.

ligne droite, on tirera du centre donné A les droites AD, AP, l'une perpendiculaire & l'autre parallele à cette ligne, & par le point cherché M que l'on regarde comme donné la parallele PQ à AD, on menera aussi du même point M, le rayon AM qui rencontre EF en O, & les droites EM, FM, sur lesquelles on abaissera des points O, F, E, les perpendiculaires OG, OH, & FC, EB. Cela fait, les triangles semblables EOG, EFC, & FEB, FOH, donneront $EO . EF :: OG . FC$. Et $EF . FO :: EB . OH$, & partant $EO \times EF . EF \times FO$ ou $EO . FO :: OG \times BE . CF \times OH$, c'est à dire, en raison composée de OG à OH, ou de m à n (puisqu'en prenant MO pour le rayon ou sinus total, les droites OG, OH, sont les sinus droits des angles EMO, FMO, complemens à deux droits des angles AME, AMF), & de BE à CF ou de EM à MF à cause des triangles rectangles semblables BME, CMF. On aura donc $EO . FO :: m \times EM . n \times MF$. Cela posé.

On nommera les données AD ou PQ, a; ED, b; DF, c; AM, r; & les inconnuës AP, x; PM, y; & on aura à cause des triangles semblables APM, ADO, cette proportion, $MP\ (y) . AP\ (x) :: AD\ (a) . DO = \frac{ax}{y}$. Et partant $EO = \frac{by+ax}{y}$, $FO = \frac{cy+ax}{y}$. Or les triangles rectangles EMQ, FMQ, donnent $\overline{EM}^2 = \overline{EQ}^2\ (bb+2bx+xx) + \overline{MQ}^2\ (aa-2ay+yy) = ff+2bx-2ay$ (en mettant pour $xx+yy$ sa valeur rr à cause du triangle rectangle APM, & faisant pour abreger $aa+bb+rr=ff$) & de même $\overline{FM}^2 = \overline{FQ}^2\ (cc-2cx+xx) + \overline{MQ}^2\ (aa-2ay+yy) = gg-2cx-2ay$ en mettant pour $xx+yy$ sa valeur rr, & faisant pour abreger $aa+cc+rr=gg$. Si dans la proportion precedente $EO . FO :: m \times EM . n \times MF$, on met à la place de ces lignes les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, & qu'on multiplie les extrêmes & les moyens,


F
R
L
P
O
S
K
C
B
A
E
H
Q
M
D
K
A
C
P
L
G
O
B
F
258.
F
H
M
D
C
G
P
B
A
E
D
Q
O
H
G
M
B
C
259.
A
P
8

on formera cette équation $\overline{bny + anx}\sqrt{gg - 2cx - 2ay}$ $= \overline{mcy - max}\sqrt{ff + 2bx - 2ay}$, de laquelle quarrant chaque membre & faisant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de l'équation au cercle $xx + yy = rr$, on arrivera encore à une égalité du sixiéme dégré, dont la resolution fournira pour AP (x) une valeur telle que menant la perpendiculaire PM, elle ira couper la circonference au point cherché M.

C'est à peu près de cette façon que M. Descartes resoud cette question dans la soixante-cinquiéme de ses Lettres, Tom. 3. Elle lui avoit été proposée par M. de Roberval, d'une maniere qui paroît differente de celle-ci, mais qui dans le fond revient à la même chose.

TROISIÉME MANIÉRE.

Soient décrits des diametres AE, AF, deux cercles ART, AST, sur lesquels soient portées depuis le point A deux cordes quelconques AR, AS, qui soient toûjours entr'elles en la raison donnée de m à n; & soient tirées les droites ER, FS, qui s'entrecoupent au point M. Je dis que la ligne courbe AM, qui est le lieu de tous les points M ainsi trouvés, coupera le cercle donné (dont le centre est en A) au point cherché M. FIG. 260.

Car tirant AM & le prenant pour rayon ou sinus total, il est clair que la corde AR est le sinus droit de l'angle AME, & la corde AS le sinus droit de l'angle AMF.

Il est à propos de remarquer 1°. Que cette construction a cela de particulier, qu'elle ne réüssit pas seulement lorsqu'il s'agit de trouver le point M sur la circonference d'un cercle dont le centre est en A, mais encore sur telle ligne courbe qu'on voudra. 2°. Qu'ayant trouvé deux points de ce lieu de la maniere que l'on vient d'enseigner, les plus proches que l'on pourra de la ligne courbe donnée, il suffit d'en tracer la portion qui joint ces deux points; ce qui rend la pratique de

cette construction fort aisée. 3°. Que le lieu de tous les points M ainsi trouvés est du quatriéme degré, comme il est facile de voir par le calcul de la seconde maniere, en observant de ne point substituer dans les valeurs de EM & FM à la place de $xx + yy$ le quarré rr que l'on trouve par le lieu au cercle ce qui donnera pour l'équation de ce lieu $\overline{nby + nax}\sqrt{\overline{c-x}^2 + \overline{a-y}^2} = \overline{mcy - max}\sqrt{\overline{b+x}^2 + \overline{a-y}^2}$, dont les inconnuës x & y montent au quatriéme degré, lorsqu'elle est délivrée d'incommensurables. 4°. Que ce n'est pas une faute legere en Geometrie, selon M. Descartes, d'employer une ligne courbe trop composée pour resoudre un Problême ; de sorte que selon lui, on doit preferer à cette derniere solution les deux precedentes, où les deux lieux qu'on a trouvés, & qui détermineroient par leur intersection avec la circonference donnée, le point cherché, ne sont que du troisiéme degré. Il me paroît neanmoins que la facilité d'une construction & sa simplicité peuvent récompenser en quelque sorte ce défaut, & c'est ce qu'on verra encore dans l'Exemple qui suit.

EXEMPLE IX.

Fig. 261. 440. DIVISER un triangle scalene donné ABC en quatre parties égales, par deux lignes droites DE, FG, qui s'entrecoupent à angles droits au point H.

Si l'on fait attention sur la nature de ce Problême, on verra 1°. Que deux des extremités D, F, des deux droites DE, FG, se trouvent necessairement sur l'un des côtés AC du triangle donné ABC, & que leurs deux autres extremités E, G, se trouvent chacune sur chacun des deux autres côtés BC, BA. 2°. Que les deux points cherchés D, F, doivent avoir deux conditions, dont la premiere est que les lignes DE, FG, qui divisent chacune le triangle ABC en deux parties égales, s'entrecoupent à angles droits en un point

H;

H ; & la seconde qu'elles forment avec les deux autres côtes du triangle donné, un quadrilatere $BGHE$ qui soit la quatriéme partie du triangle ABC. Cela posé.

Soient menées sur le côté AC les perpendiculaires GI, BK, EL, & soient nommées les données AC, $2a$; BK, b ; AK, c ; KC, d ; & les inconnuës AF, x ; CD, y. Puisque le triangle AGF, ou $GI \times \frac{1}{2} AF$ doit être la moitié du triangle ABC (ab), il s'ensuit que $GI = \frac{ab}{x}$; & par la même raison $EL = \frac{ab}{y}$. Or les triangles semblables CBK, CEL, & ABK, AGI, donnent BK (b). EL $(\frac{ab}{y})$ :: CK (d). $CL = \frac{ad}{y}$. Et BK (b). GI $(\frac{ab}{x})$ :: AK (c). $AI = \frac{ac}{x}$. Et partant DL ou $CD - CL = y - \frac{ad}{y}$, FI ou $AF - AI = x - \frac{ac}{x}$. Mais les triangles rectangles DEL, FGI, sont semblables entr'eux ; puisque chacun d'eux est semblable au même triangle FDH, qui est rectangle en H selon la condition du Problême qui demande que les deux lignes DE, FG, s'entrecoupent à angles droits. On aura donc EL $(\frac{ab}{y})$. LD $(\frac{yy-ad}{y})$ :: FI $(\frac{xx-ac}{x})$. IG $(\frac{ab}{x})$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, cette équation $xxyy - acyy - adxx + aacd = aabb$, ou $\overline{xx-ac} \times \overline{yy-ad} = aabb$, qui renferme la premiere condition du Problême ; de sorte qu'il ne reste plus qu'à accomplir la seconde ; sçavoir que le trapese $BGHE$ soit le quart du triangle donné ABC.

Pour en venir à bout. Du point d'intersection H des deux droites DE, FG, soient menées aux trois angles du triangle ABC, les lignes HA, HC, HB, & on aura 1°. FD $(x+y-2a)$. AF (x) :: FHD $(\frac{1}{4}ab)$. $FHA = \frac{abx}{4x+4y-8a}$. Et partant le triangle AHG ou le triangle FGA moins le triangle $FHA = \frac{1}{2}ab - \frac{abx}{4x+4y-8a}$.

2°. $AI\left(\frac{ac}{x}\right) . IK\left(\frac{cx-ac}{x}\right) :: AG . AGB :: HG\left(\frac{abx+2aby-4aab}{4x+4y-8a}\right)$. $GHB = \frac{bxx-5abx+2bxy-2aby+4aab}{4x+4y-8a}$. On trouvera par un raiſonnement ſemblable que le triangle $HEB = \frac{byy-5aby+2bxy-2abx+4aab}{4x+4y-8a}$. Maintenant ſi l'on ajoûte enſemble les triangles HGB, HEB, on formera le quadrilatere $HGBE$ qui doit être égal à la quantité $\frac{1}{4}ab$ quatriéme partie du triangle ABC : ce qui donne pour la ſeconde équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$.

Si l'on fait évanoüir par le moyen de ces deux équations l'inconnuë y, on arrivera à une égalité de huitieme degré qui renfermera toutes les conditions du Problême, & dans laquelle il n'y aura plus qu'une ſeule inconnuë x; de ſorte que toute la difficulté eſt reduite à trouver les racines de cette égalité. Et c'eſt ce qu'on peut faire par le moyen de deux lieux du troiſiéme degré, comme l'on a enſeigné dans les articles 417, & 418 (Liv. preced) Mais comme la conſtruction de ces lieux devient fort embarraſſée & d'une longueur inſuportable dans la pratique, à cauſe de la multitude des termes de leurs équations, il eſt beaucoup plus naturel de conſtruire ſeparément les lieux des deux équations que l'on vient de former, quoique l'un d'eux ſoit du quatriéme degré & par conſequent plus composé, car l'autre n'étant que du ſecond récompenſe ce défaut, & d'ailleurs la facilité de la conſtruction doit déterminer en ſa faveur : voici comment elle ſe fait.

FIG. 262. Ayant mené deux lignes droites indéfinies AB, AC, qui ſont entr'elles un angle droit BAC; on prolongera BA en E, en ſorte que $AE = \sqrt{ac}$, & CA en F, en ſorte que $AF = \sqrt{ad}$. Ayant pris ſur AC une partie quelconque AP, on décrira du centre E de l'intervalle AP un arc de cercle qui coupe AC en G; & ayant pris AH, en ſorte que le rectangle $HA \times AG$ ſoit égal au triangle donné BAC, on prendra ſur AB la partie

$AQ = FH$. On menera ensuite les droites PM, QM, paralleles à AB, AC, lesquelles s'entrecoupent en un point M; & ayant trouvé en la même sorte une infinité d'autres points tels que M, on fera passer par tous ces points une ligne courbe KML. Cela fait, on prendra sur la diagonale AD du quarré $ABCD$, qui a pour côté la ligne AC égal au côté AC du triangle donné ABC, les parties $AT = \frac{1}{3} AD$, & $DS = \frac{1}{6} AD$; & on décrira du premier axe TS qui soit à son parametre comme 1 est à 3, une Hyperbole OSR. Je dis à present que si l'on mene du point M où je suppose qu'elle rencontre la ligne courbe KML au dedans du quarré $ABCD$, la perpendiculaire MP sur AC, & qu'on prenne sur le côté AC du triangle ABC, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les points F, D, seront tels qu'ayant mené (ce qui est facile) les deux droites FG, DE, qui divise chacune le triangle ABC en deux parties égales; elles s'entrecouperont à angles droits & le partageront en quatre parties égales.

Car nommant AP, x; PM, y; on aura à cause des triangles AEG, FAH, rectangles en A, le quarré $\overline{AG}^2 = \overline{EG}^2 (xx) - \overline{AE}^2 (ac)$, & le quarré $\overline{AH}^2 = \overline{FH}^2 (yy) - \overline{AF}^2 (ad)$. Or puisque par la construction le rectangle $HA \times AG$ est égal au triangle donné BAC (ab), il s'ensuit que $\overline{HA}^2 \times \overline{AG}^2 (yy - ad \times xx - ac) = aabb$. La ligne courbe KML sera donc le lieu de cette équation qui est la premiere des deux que l'on vient de trouver; & par consequent sa proprieté sera telle que si l'on mene d'un de ses points quelconques M pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire MP sur AC & qu'on prenne sur le côté AC du triangle donné ABC, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les droites FG, DE qui divise chacune par le milieu le triangle ABC, s'entrecouperont à angles droits au point H.

De plus si d'un point quelconque M de l'Hyperbole OSR, on mene la perpendiculaire MV sur son premier

axe TS, & qu'on prolonge PM jusqu'à ce qu'elle rencontre la diagonale AD au point X; les triangles rectangles & isoscelles APX, MVX, donneront $1. \sqrt{2} ::$ AP ou PX (x) $AX = x\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}.1 :: MX$ $(x-y)$. MV ou $VX = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$; & partant AV ou $AX - XV$ $= \frac{x+y}{\sqrt{2}}$. Or par la construction $AD = 2a\sqrt{2}$ puisque $AC = 2a$, & par consequent TS ou $DT - DS = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$. On aura donc TV ou $AV - AT = \frac{x+y-2a}{\sqrt{2}}$, & VS ou $TV - TS = \frac{3x+3y-10a}{3\sqrt{2}}$, & par la proprieté de l'Hyperbole $TV \times VS$ $\left(\frac{3xx+6xy+3yy-16ax-16ay+20aa}{6}\right)$. $\overline{MV}^2$ $\left(\frac{xx-2xy+yy}{2}\right) :: 1.3$, c'est à dire, comme le premier axe TS est à son parametre : ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$. L'Hyperbole OSR en sera donc le lieu, & joüira par consequent de cette proprieté; sçavoir que si l'on mene d'un de ses points quelconques M pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire MP sur AC, & qu'on prenne sur le côté AC du triangle donné ABC, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les droites FG, DE, qui divise chacune par le milieu le triangle ABC, le couperont en quatre parties égales.

Maintenant puisque le point M se trouve en même temps sur la ligne courbe KML, & sur l'Hyperbole OSR; il s'ensuit que les points D, F, pris sur le côté AC du triangle donné, auront aussi en même temps les deux conditions requises. Et c'est ce qui étoit proposé.

S'il arrivoit que les deux courbes OSR, KML, ne se rencontrassent point au dedans du quarré $ABDC$, ce seroit une marque infaillible qu'on auroit fait une supposition fausse, sçavoir que les deux extremités D, F, se rencontrent sur le côté AC. C'est pourquoi il fau-

droit les suppofer sur l'un des deux autres côtés, & recommencer le calcul, en faisant des raisonnemens semblables aux precedens, pour avoir une construction par rapport à ce nouveau côté. Mais si l'on fait les trois remarques suivantes, il sera aisé de prevoir lequel des trois côtés on doit prendre pour celui sur lequel tombent les deux extremités D, F, afin d'avoir sûrement une solution, & de n'être pas obligé de recommencer.

La premiere est que $\overline{CL}^2 = \frac{aabb}{4aa-ac} + ad$, & $\overline{BK}^2 = \frac{aabb}{4aa-ad} + ac$; ce qui se voit en mettant dans $yy = \frac{aabb}{xx-ac} + ad$ à la place de AP (x) sa valeur AC $(2a)$, & dans $xx = \frac{aabb}{yy-ad} + ac$ à la place de AQ (y) sa valeur AB $(2a)$. La seconde consiste en ce que $CR = \sqrt{2aa} = BO$; ce qui se trouve en mettant dans l'autre équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$ dont le lieu est l'Hyperbole OSR, d'abord à la place de AP (x) sa valeur AC $(2a)$, & ensuite à la place de AQ (y) sa valeur AB $(2a)$. La troisiéme se tire de ce qu'en supposant AK (c) moindre que CK (d) comme on le fait ici, il s'ensuit que $\overline{BK}^2$ $(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac)$ est moindre que $\overline{CL}^2$ $(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad)$. Or cela posé, si l'on veut que $\overline{BK}^2$ $(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac)$ soit moindre que $\overline{BO}^2$ $(2aa)$, on trouvera en mettant pour d sa valeur $2a - c$ & operant à l'ordinaire que $bb + cc$ doit être moindre que $4aa$, c'est à dire, que le côté AB du triangle donné ABC doit être moindre que le côté AC: & si l'on veut que le quarré $\overline{CL}^2$ $(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad)$ soit plus grand que $\overline{CR}^2$ $(2aa)$, on trouvera en mettant pour c sa valeur $2a - d$ & operant à l'ordinaire que le côté BC $(\sqrt{bb+dd})$ doit surpasser le côté AC $(2a)$. Mais il est visible que BK etant moindre que BO & CL plus grande que CR, les deux lignes courbes KML, OMR,

ſe coupent neceſſairement au dedans du quarré *ABDC*. D'où il ſuit que ſi le triangle donné *ABC* a tous les angles aigus, & qu'on prenne pour le côté *AC* ſur lequel on ſuppoſe que les deux points *F*, *D*, ſe rencontrent, celui des trois dont la grandeur eſt moyenne entre les deux autres & pour le côté *AB* le plus petit, le Problême aura toûjours neceſſairement une ſolution, puiſqu'alors (*fig.* 261.) le point *K* ſe trouvera entre les points *A*, *C*, & que *AK* eſt moindre que *AC*, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul ſur lequel tout ce raiſonnement eſt fondé. On trouvera en la même ſorte que ſi le triangle donné eſt rectangle ou obtus angle, & qu'on prenne pour le côté *AC* ſur lequel doivent tomber les deux extremités *D*, *F*, le côté moyen, on aura toûjours une ſolution; de ſorte que cette remarque eſt generale pour toutes ſortes de triangles.

On voit dans la figure 262. que l'Hyperbole *OSR* & la courbe *KML* ſe coupent non ſeulement dans un point *M*, au dedans du quarré *ABDC*, comme le demande le Problême; mais encore en un autre point *M* au dehors de ce quarré. Or ſi l'on veut ſçavoir quelle peut être l'utilité de cet autre point, on trouvera qu'il donne une des reſolutions du Problême ſuivant, dont celui-ci n'eſt qu'un cas particulier.

FIG. 263. Trouver ſur le côté *AC* du triangle donné *ABC*, deux points *F*, *D*, tels qu'ayant mené les droites *FG*, *DE*, qui font avec les deux autres côtés *AB*, *BC*, les triangles *FGA*, *DEC*, égaux chacun à la moitié du triangle *ABC*: les lignes *FG*, *DE*, s'entrecoupent à angles droits au point *H*, & le quadrilatere *BGHE* ſoit égal au quart du triangle *ABC*.

FIG. 263. & 262. Car lorſque le point d'interſection *M* tombe au dedans du quarré *ABDC*, il eſt clair que les lignes *AP*, *PM* feront chacune moindre que le côté *AC*, & qu'ainſi les points *F*, *D*, qu'elles determinent tomberont tous deux entre les points *A*, *C*; ce qui reſoud le Problême énoncé comme l'on a fait au commencement. Mais

lorsque le point M tombe au dehors du quarré, comme alors l'une des lignes AP, PM est moindre que son côté AC, & l'autre plus grande ; il s'ensuit que l'un des points F, D, tombe sur le côté AC du triangle donné, & l'autre sur ce même côté prolongé, ce qui donne une autre solution du Problême énoncé comme l'on vient de faire en dernier lieu. FIG. 262. & 263.

EXEMPLE X.

441. UNE Section conique MAN étant donnée, avec un point S hors de son plan pour le sommet du cone dont elle est la Section ; on demande la position du cercle MaN qui en est la base.

Je distingue cette question en deux differens cas, dont le premier est lorsque la Section donnée est une Parabole, & le second lorsque c'est une Ellipse ou une Hyperbole.

Premier cas. La question se reduit à trouver sur la Parabole, le point A tel qu'ayant mené de ce point le diametre AP avec la ligne AS ; du point S la ligne SD parallele à AP ; & d'un point quelconque P du diametre AP, une ordonnée PM à ce diametre dans le plan de la Parabole, & une perpendiculaire aD à cette ordonnée dans le plan du triangle DSA, qui rencontre les côtés SA, SD, aux points a, D : le quarré de PM soit égal au rectangle $aP \times PD$. Car décrivant dans le plan aPM un cercle qui ait pour diametre aD, il est clair qu'il passera par le point M, puisque l'angle APM est droit, & que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$, qui est la proprieté essentielle du cercle ; c'est pourquoi menant le diametre PA ; & tirant de l'extremité D, du diametre Da du cercle une parallele DS à PA, qui rencontre aA menée de son autre extremité a par l'origine A du diametre AP, en un point S, le cone qui a pour sommet ce point, & pour base le cercle MAN, formera * par sa rencontre avec le plan APM la Parabole même don- FIG. 264. * Art. 269.

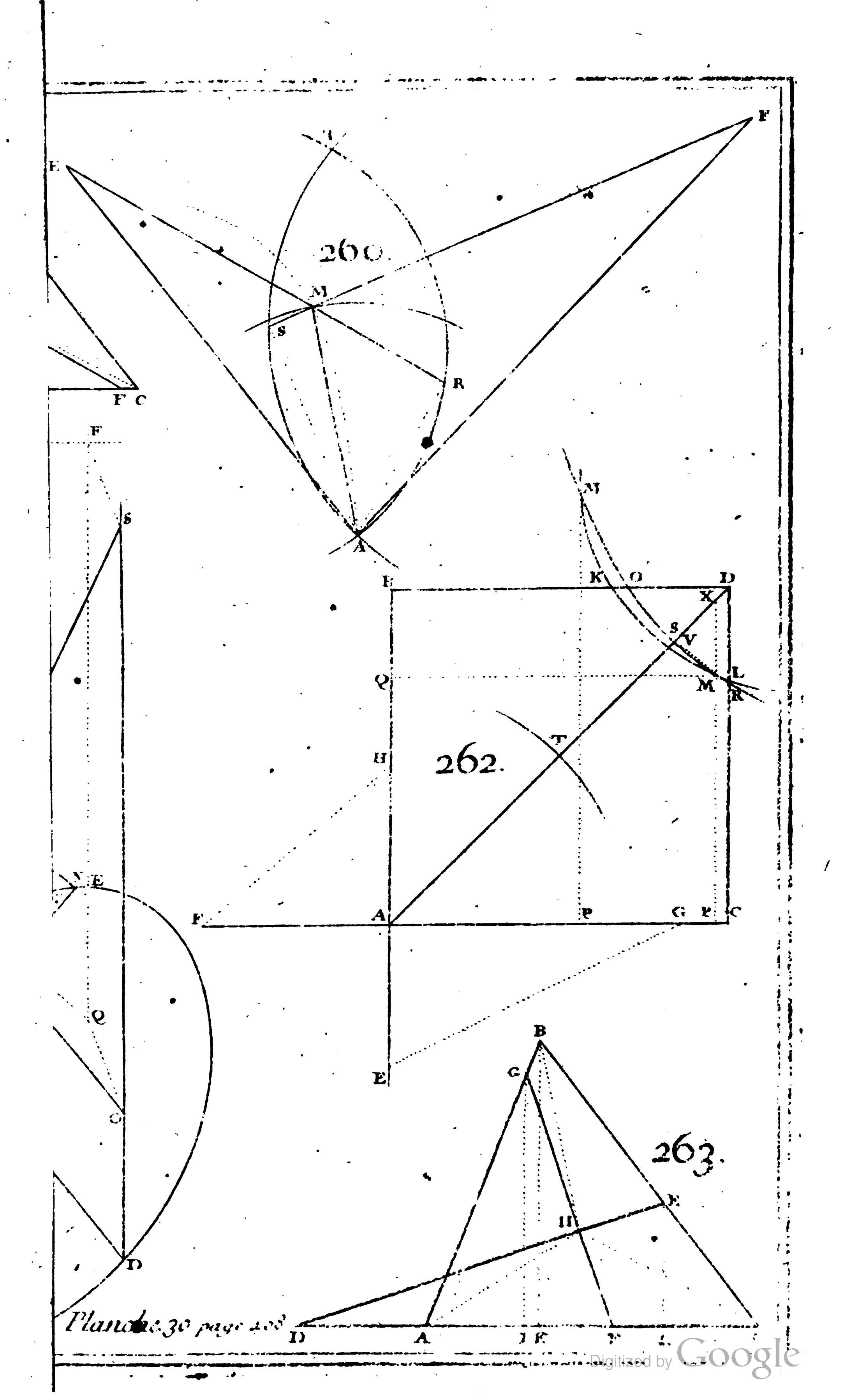
née *MAN*. Voici comment on peut trouver le point *A*.

Soit v le parametre inconnu du diametre *AP*, & l'on aura par la proprieté de la Parabole, $\overline{PM}^2 = AP \times v$: mais pour satisfaire au Problême, il faut que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$. Donc $aP \times PD = AP \times v$; ce qui donne cette proportion $AP . Pa :: PD . v$, qui se change en menant AO parallele à Da en cette autre $SO . AO :: PD$ ou $AO . v$, & partant $SO \times v = \overline{AO}^2$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques de ces lignes, je mene du point donné S sur le plan de la Parabole la perpendiculaire SF, & du point F où elle rencontre ce plan, sur l'axe BG la perpendiculaire FG, qui rencontre le diametre AP en H. Je tire du point A l'ordonnée AK à l'axe, & la perpendiculaire AQ à la tangente AL, lesquelles rencontrent en E & Q la ligne FQ menée par le point F parallelement à l'axe. J'éleve enfin du point Q une perpendiculaire QO sur le plan de la Parabole, qui rencontrera SD dans le même point O, où la ligne AO parallele à aD la rencontre. Car la tangente AL étant parallele à l'ordonnée PM qui est perpendiculaire sur aD, l'angle LAO sera droit aussi-bien que l'angle LAQ, & ainsi le plan QAO sera perpendiculaire sur AL, & sur le plan de la Parabole qui passe par cette ligne; c'est pourquoi la ligne QO perpendiculaire à ce plan se trouvera dans le plan QAO & rencontrera par consequent la ligne SD dans le même point O, où le plan QAO, c'est à dire, la ligne AO parallele à aD la rencontre. Il est à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux FS, QO, sont dans le plan de la Parabole. Cela posé.

Je nomme les données SF ou QO, a; FG, ou KE, b; GB, c; le parametre de l'axe, p; & les inconnuës BK, x; KA ou GH, y; & j'ai à cause des triangles semblables AKT, AEQ, cette proportion $AK\ (y) . KT\ (\frac{1}{2}p) :: AE\ (b+y) . EQ = \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p$: ce qui donne à

cause


260.
262.
263.
Planche 30 page 208

cause des triangles AEQ, AQO, rectangles en E & Q, le quarré $\overline{AO}^2$ ou $\overline{AE}^2 + \overline{EQ}^2 + \overline{QO}^2 = \frac{bbpp}{4yy} + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa$. Or le parametre du diametre AP sçavoir $v =$ * $p + 4x = p + \frac{4yy}{p}$, en mettant pour x sa valeur $\frac{yy}{p}$; & SO ou FQ ou $GB + BK + EQ = c + x + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{4}p = c + \frac{yy}{p} + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{4}p$. Mettant donc ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles expriment dans l'égalité $\overline{AO}^2 = SO \times v$, on trouvera $\frac{bbpp}{4yy} + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa = cp + yy + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + \frac{4cyy}{p} + \frac{4y^4}{pp} + 2by + 2yy$, c'est à dire en effaçant de part & d'autre les quantités qui se trouvent les mêmes, substituant pour yy la valeur px, & operant ensuite à l'ordinaire; * Art. 17.

$$\begin{array}{llll} x^3 + cxx & + \frac{1}{4}cpx & - \frac{1}{16}bbp & = 0 \\ + \frac{1}{2}p & - \frac{1}{4}aa & & \\ & - \frac{1}{4}bb & & \\ & + \frac{1}{16}pp & & \end{array}$$

dont la vraie racine que l'on peut trouver par le moyen * de la Parabole même donnée, exprimera la valeur de l'inconnuë BK, qui sert à déterminer le point A tel qu'on le demande. * Art. 387.

Second cas. Toute la difficulté consiste à trouver sur l'Hyperbole donnée MAN, le point A tel qu'ayant mené le diametre AB avec les lignes SAa, BSb; & par un de ses points quelconques P, du diametre AB une ordon. PM dans le plan de l'Hyperbole, & une perpendiculaire ab à cette ordonnée dans le plan du triangle aSb: on ait le quarré $\overline{PM}^2$ égal au rectangle $aP \times Pb$. Cela se prouve de même que dans la Parabole, & voici ce qu'il faut faire pour trouver le point A. FIG. 265.

Soit v le diametre conjugué au diametre AB, & soient menées dans le plan du triangle aSb, les lignes AO parallele à ab, & OZ parallele à AB qui rencon-

tre SA en Z; & l'on aura $AP \times PB$ à $\overline{PM}^2$ ou (à cause du cercle) à $aP \times Pb$, en raison composée de AP à Pa, ou ZO à OA, & de PB à Pb, ou de BA à AO; c'est à dire, comme $ZO \times AB$ est à $\overline{AO}^2$. Or par la proprieté de l'Hyperbole, $AP \times PB . \overline{PM}^2 :: \overline{AB}^2 . vv$; & partant $ZO \times AB . \overline{AO}^2 :: \overline{AB}^2 . vv = \frac{AB \times \overline{AO}^2}{ZO}$. Ce qui donne $OZ . AB$, ou $OS . SB :: \overline{AO}^2 . vv$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques, tant de la raison de OS à SB, que des quarrez $\overline{AO}^2$ & vv; je mene du point donné S, la ligne SF perpendiculaire sur le plan des Hyperboles; du point F où elle rencontre ce plan, la perpendiculaire FG à l'axe DK qui est donné de position & de grandeur, puisque les Hyperboles sont données; & du point cherché A, l'ordonné AK à l'axe, & la perpendiculaire AT à la tangente AL, lesquelles rencontrent la ligne BF aux points E, Q. Je tire enfin BH parallele à l'axe qui rencontre GF en X, TV parallele à BF qui rencontre AE en V, & BD, QR, perpendiculaires sur l'axe; & ayant élevé QO perpendiculaire sur le plan de l'Hyperbole, on prouvera comme dans la Parabole qu'elle rencontrera la ligne BS au même point O, où la ligne AO parallele à ab la rencontre. Il est à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux FS, QO, sont dans le plan des Hyperboles. Cela posé.

Soient nommées $SF = a$, $FG = b$, $CG = c$, le premier axe $= 2d$, le second $= 2f$, les inconnuës CK ou $CD = x$, AK ou BD ou GX ou $KH = y$; & l'on aura DK ou $BH = 2x$, DG ou $BX = c + x$, $GK = x - c$, $TK = \frac{ffx}{dd}$, & AT ou $\sqrt{\overline{TK}^2 + \overline{AK}^2} = \sqrt{yy + \frac{f^4 xx}{d^4}} = \frac{f}{dd}\sqrt{ddxx + ffxx - d^4}$ en mettant pour yy sa valeur * $\frac{ffxx}{dd} - ff$. Or les triangles semblables BXF, BHE,

* Art. 82.

TKV donnent $BX\,(c + x) . XF\,(b - y) :: BH\,(2x)$.

$HE = \frac{2bx - 2xy}{c + x} :: TK\left(\frac{ffx}{dd}\right) . KV = \frac{bffx - ffxy}{cdd + ddx}$; & partant AE ou $AK + KH + HE = \frac{2bx + 2cy}{x + c}$, & AV ou $AK - KV = \frac{cddy + ddxy + ffxy - bffx}{cdd + ddx}$: mais à cause des triangles semblables AVT, AEQ, & ATK, QTR, il vient $AV . AT :: AE . AQ = \frac{\overline{2bfx + 2cfy}\sqrt{ddxx + ffxx - d^4}}{ddxy + ffxy - bffx + cddy}$, & $AT . TK :: QT . TR :: AT + TQ$ ou $AQ . KT + TR$ ou $KR = \frac{2bffxx + 2cffxy}{ddxy + ffxy - bffx + cddy}$. Donc $\frac{GR \text{ ou } GK + KR}{DG} = \frac{ddxy + ffxy + bffx - cddy}{ddxy + ffxy - bffx + cddy}$, $\frac{DR \text{ ou } DK + KR \times FS}{DG} = \frac{2addxy + 2affxy}{ddxy + ffxy - bffx + cddy} = QO$, puisque $DG . DR :: BF . BQ :: FS . QO$; & à cause du triangle rectangle AQO, le quarré $\overline{AO}^2$ ou $\overline{AQ}^2 + \overline{QO}^2 = \frac{\overline{2bfx + 2cfy}^2 \times \overline{ddxx + ffxx - d^4} + \overline{2addxy + 2affxy}^2}{\overline{ddxy + ffxy - bffx + cddy}^2}$.
De plus $SO . SB :: FQ . FB :: GR . GD$, & $vv =$ * $4xx + 4yy + 4ff - 4dd$ ou $4xx - 4dd + \frac{4ffxx}{dd}$. * *Art. 125.*

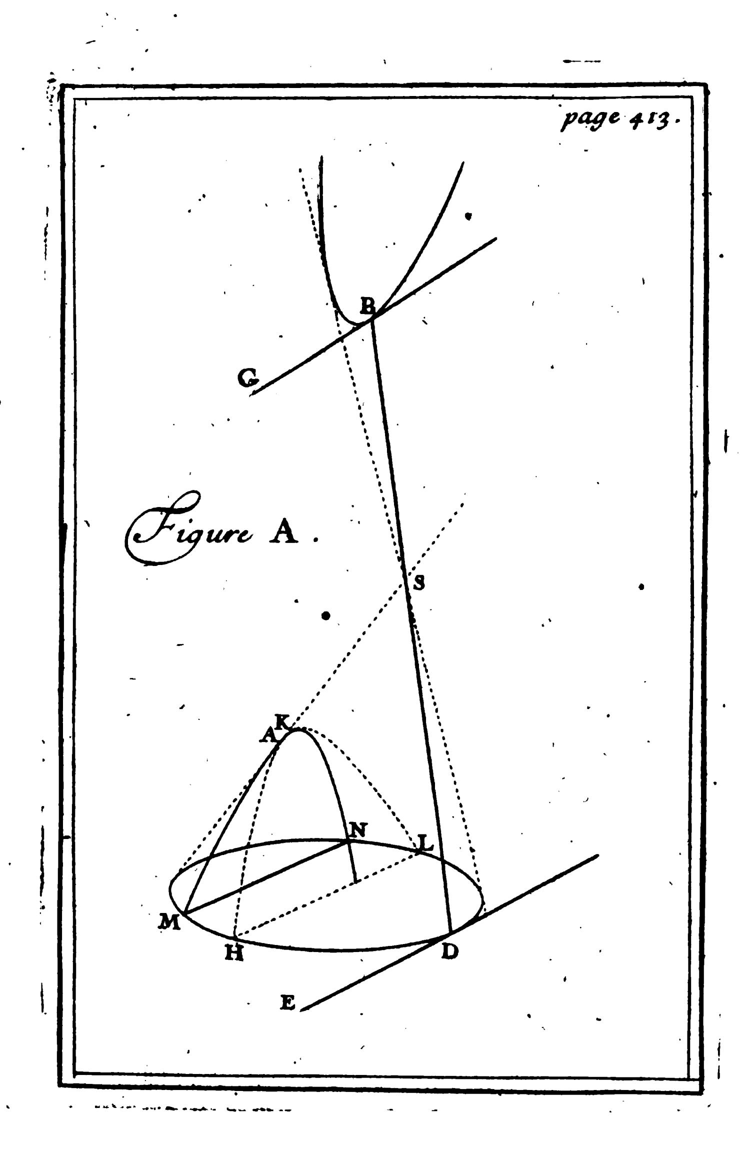
Si donc l'on met dans la proportion $SO . SB :: \overline{AO}^2 . uv$, à la place tant de la raison de SO à SB ou GR à GD, que des quarrés $\overline{AO}^2$ & vv, les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, on formera en multipliant les extrêmes & les moyens cette égalité $\overline{2bfx + 2cfy}^2 \times \overline{ddxx + ffxx - d^4} + \overline{2addxy + 2affxy}^2 = \overline{ddxy + ffxy + bffx - cddy} \times \overline{ddxy + ffxy - bffx + cddy} \times \overline{4xx + \frac{4ffxx}{dd} - 4dd}$, dans laquelle tous les termes où y se rencontrera au premier degré s'effaceront, & mettant à la place du quarré yy sa valeur $\frac{ffxx}{dd} - ff$, on trouvera $bbd^4x^4 + 2bbddffx^4 + bbf^4x^4 - bbd^6xx - ccd^6xx - bbffd^4xx - ccffd^4xx + ccffa^6 + ccd^8 = \overline{ddxx + ffxx - d^4 - aadd - ccdd} \times ddx^4 + 2ffx^4 + \frac{f^4}{dd}x^4 - d^4xx$.

$\overline{-2ddffxx-f^4xx}|$ qui se change en faisant pour abreger $dd+ff=mm$, $bb+cc=nn$, $aa+dd+cc=rr$, en cette autre $bbm^4x^4-mmnnd^4xx+ccmmd^6$ $=\overline{mmxx-ddrr}\times\overline{\frac{m^4}{dd}x^4-m^4xx}|$ qui se reduit enfin en faisant $xx=dz$ à cette égalité du troisiéme degré.

$$z^3\left.\begin{matrix}-d\\-\frac{drr}{mm}\\-\frac{dbb}{mm}\end{matrix}\right\}\ zz\left.\begin{matrix}+\frac{ddrr}{mm}\\+\frac{nnd^4}{m^4}\end{matrix}\right\}\ z-\frac{ccd^5}{m^4}=0;$$

dont l'une des racines ; sçavoir celle qui est plus grande que d, est telle que prenant une moyenne proportionnelle entre cette racine & d moitié du premier axe ; cette moyenne proportionnelle exprime la valeur de CK qui sert à déterminer le point cherché A. On pourra se servir de l'Hyperbole même donnée pour trouver les racines de cette égalité, par le moyen des articles 396 & 399. du Livre precedent.

Lorsque CG $(c)=0$, c'est-à-dire, lorsque le point F tombe sur le second axe ; il est visible que cette égalité se change en une autre du second degré, puisque le dernier terme étant nul, elle se divise par z. Mais lorsque FG $(b)=0$, ce qui arrive lorsque le point F tombe sur le premier axe ; le terme $\frac{dbbzz}{mm}$ s'efface dans l'égalité precedente, & un qui est $bb+cc$ devient cc ; ce qui fait qu'elle se peut diviser par $z-d$, & qu'elle se reduit par conséquent à celle-ci $zz-\frac{drr}{mm}z+\frac{ccd^4}{m^4}=0$, qui n'est encore que du second degré. Enfin si l'on fait dans cette derniere égalité $c=0$; ce qui doit arriver lorsque le point F tombe sur le centre C, puisqu'alors les lignes b & c deviennent chacune nulles ; on aura $z=\frac{drr}{mm}$, & partant dz ou $xx=\frac{ddrr}{mm}$, & $x=\frac{dr}{m}=d\sqrt{\frac{aa+dd}{dd+ff}}$.


page 413.
Figure A.
B
G
S
K
A
N
L
M
H
D
E

Il est inutile d'avertir que le Problême se resoud par la même voie dans l'Ellipse, n'y ayant de changement que dans quelques signes. Mais on peut toûjours rapporter, si l'on veut, ce second cas au premier, de la maniere qui suit.

Ayant mené par un point quelconque *B* de l'une des Hyperboles données, une tangente *BG*; & ayant fait passer par cette tangente, & par le sommet donné *S*, un plan *GBS*: soit mené par tout où l'on voudra, un autre plan *HKL* parallele à celui ci. Je dis qu'il formera dans la surface conique, décrite par une ligne droite indéfinie attachée en *S*, & muë autour de l'Hyperbole opposée *MAN*, une ligne courbe *HKL* qui sera une Parabole; de sorte que toute la difficulté est reduite au cas precedent. Car supposant que le cercle *DHMNL* soit la base du cone, qui a pour sommet le point *S*, & pour Section l'Hyperbole *MAN* avec son opposée; il est clair que le plan *GBS* touchant les deux surfaces coniques opposées qui ont pour base ce cercle, dans le côté *BSD*, formera dans le plan de la base, une ligne droite *DE* qui touchera cette base en un point *D*. Or comme cette ligne est la directrice par rapport à la Section *HKL*, il s'ensuit selon la définition dixiéme du Livre VI. que cette Section sera une Parabole. FIG. *A.*

Ce Problême a été trés-celebre du temps de M. Descartes, & l'on en a trouvé une solution parmi ses Manuscrits, qui est imprimée à la fin de la 75e Lettre du 3e tome. Si l'on veut se donner la peine de comparer sa solution avec la mienne, on verra que non seulement elle est moins naturelle, puisqu'elle ne va pas droit au but, mais encore qu'elle est beaucoup plus embarrassée. Aussi ne donne-t-il point l'analyse du cas où la Section est une Ellipse ou une Hyperbole; & il se contente d'assurer que l'égalité qui renferme les conditions du Problême, ne doit pas passer le quatriéme degré.

LEMME I.

FIG. 266. 267. 268. 442. *Si par l'extremité* B *d'un diametre* A B, *l'on mene une corde quelconque* B D *qui termine l'arc* A D *moindre que la demie circonference ; & qu'ayant pris par tout où l'on voudra deux arcs contigus* E F, F G, *égaux chacun à l'arc* A D, *on tire les cordes* B E, B F, B G : *je dis que la corde du milieu* B F *est à la somme ou à la difference de ses deux voisines* B E, B G, *comme le rayon* C B *est à la corde* B D : *sçavoir à la somme lorsque l'origine commune* B *des cordes* B D, B E, B F, B G, *ne tombe sur pas un des deux arcs* E F, F G ; *& au contraire à la difference, lorsqu'il tombe sur l'un ou l'autre de ces deux arcs.*

Car soit du centre *F*, & du rayon *FB*, décrit un arc de cercle qui coupe la corde *BG* prolongée, s'il est necessaire, au point *H*, pour avoir une triangle isoscelle *BFH*, qui sera semblable au triangle isoscelle *BCD* ; puisque l'angle *FBH* a pour mesure la moitié de l'arc *FG* égal à l'arc *AD*, dont la moitié est aussi la mesure de l'angle *CBD*. On aura donc *FB*. *BH* :: *CB*. *BD*, de sorte qu'il ne reste qu'à démontrer que la ligne *BH* est la somme des deux cordes *BE*, *BG*, dans le premier cas, & leur difference dans le second. Pour le faire.

FIG. 266. Soient tirées les cordes *EF*, *FG*, & on aura deux triangles *BEF*, *FHG*, qui seront semblables & égaux. Car dans le premier cas l'angle *FHB* ou *FHG*, est égal à l'angle *FBH* qui vaut l'angle *FBE*, puisque les arcs *FG*, *FE*, sont égaux ; & de plus l'angle *BEF* est égal à l'angle *FGH*, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié du même arc *BF* ; & partant l'angle *GFH* est égal à l'angle *EFB*. Or les côtés *FE*, *FG*, & *FB*, *FH*, sont égaux entr'eux. Le côté *GH* sera donc égal au côté *BE*. Donc &c.

FIG. 267. 268. On prouvera à peu près de même dans le second cas que les triangles *FHG*, *FBE*, sont semblables & égaux ; & qu'ainsi la ligne *BH* est la difference des deux cordes *BG*, *BE*.

LEMME II.

443. SOIT *une Table dont le premier rang parallele renfermant le nombre 2, & le second la lettre* x; *le troisiéme* xx—2 *soit le produit du second par* x, *moins le premier; le quatriéme* x^3—3x *soit le produit du troisiéme par* x, *moins le second, le cinquiéme* x^4—4xx+2 *soit le produit du quatriéme par* x, *moins le troisiéme, & ainsi de suite à l'infini. Soit de plus un arc de cercle quelconque* AR *divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points* D, E, F, G, *&c.* FIG. 269.
Je dis que si le premier rang 2 *de la Table exprime la valeur* 270.
du diametre BA, *& le second rang* x *celle de la premiere corde* BD, *le troisiéme rang.* xx—2 *exprimera la valeur de la seconde corde* BE, *le quatriéme rang* x^3—3x *celle de la troisiéme corde* BF, *& ainsi de suite jusqu'à la derniere* BR: *en observant que ces cordes deviennent negatives, lorsqu'elles passent de l'autre côté du point* B.

Table pour la division des arcs de cercle en parties égales.

1er	2
2^{e}	1 x
3^{e}	1 xx — 2
4^{e}	1 x^3 — 3x
5^{e}	1 x^4 — 4xx + 2
6^{e}	1 x^5 — 5x^3 + 5x
7^{e}	1 x^6 — 6x^4 + 9xx — 2
8^{e}	1 x^7 — 7x^5 + 14x^3 — 7x
9^{e}	1 x^8 — 8x^6 + 20x^4 — 16xx + 2
10^{e}	1 x^9 — 9x^7 + 27x^5 — 30x^3 + 9x
11^{e}	1 x^{10} — 10x^8 + 35x^6 — 50x^4 + 25xx — 2
12^{e}	1 x^{11} — 11x^9 + 44x^7 — 77x^5 + 55x^3 — 11x
13^{e}	1 x^{12} — 12x^{10} + 54x^8 — 112x^6 + 105x^4 — 36xx + 2
14^{e}	1 x^{13} — 13x^{11} + 65x^9 — 156x^7 + 182x^5 — 91x^3 + 13x

Car 1°. Lorsque l'arc *AR* est moindre que la demie FIG. 269.
circonference *ADB*; si l'on multiplie une corde quelconque *BF* par *x*; & qu'on retranche de ce produit la corde *BE* qui la precede, on aura la corde *BG* qui la suit immédiatement, puisque selon le Lemme prece-

dent $CB(1)$. $BD(x) :: BF.BE + BG = xBF$, & partant $BG = xBF - BE$. Donc &c.

FIG. 270. 2°. Lorsque l'arc AR est plus grand que la demie circonference ADB ; il est visible que l'origine commune B de toutes les cordes se trouvera necessairement sur l'une des parties égale comme GH, dans lesquelles l'arc AR est divisé. Or l'on prouvera comme dans le premier cas que le troisiéme rang de la Table exprime la valeur de BE, le quatriéme celle de BF, & ainsi de suite jusqu'à BG : mais il reste à démontrer que le rang qui suit celui qui exprime la corde BG, n'exprimera point la valeur de $+BH$, mais celle de $-BH$; & de même que le rang qui suit ce dernier exprime la valeur de $-BI$, & ainsi de suite jusqu'à $-BR$.

Selon la formation de la Table, le rang qui suit celui qui exprime BG est $xBG - BF$. Or par le Lemme $CB(1)$. $BD(x) :: BG. BF - BH$, & partant $-BH = xBG - BF$; c'est à dire que $-BH$ vaut le rang parallele de la Table qui suit immédiatement celui qui exprime la valeur de BG. Mais selon la formation de la même Table, le rang qui suit celui qui vaut $-BH$ est $-xBH - BG$ valeur de BI, puisque selon le Lemme $xBH = BI - BG$: & de même le rang qui suit celui qui vaut $-BI$ est selon la formation de cette même Table $-xBI + BH$ valeur de la corde negative $-BL$, puisque selon le Lemme $xBI = BL + BH$. Or il est visible qu'il en est de même de toutes les cordes qui suivent BL jusqu'à BR ; & c'est ce qui restoit à démontrer.

COROLLAIRE I.

FIG. 269. 270. 444. DE-LA il est évident que si l'arc AR est divisé en cinq parties égales, le sixiéme rang de la Table $x^5 - 5x^3 + 5x$ exprimera la valeur de la corde BR qui soutend l'arc BR difference de l'arc AR & de la demie circonference ADB ; que s'il étoit divisé en sept parties égales, le huitiéme rang seroit la valeur de BR ;

&

& en general qu'il faut augmenter d'une unité le nombre des parties égales, afin d'avoir le rang de la Table qui vaut BR: en observant que le rayon $CB = 1$, que la premiere corde $BD = x$, & que la derniere corde BR est negative lorsque l'arc AR est plus grand que la demie circonference.

COROLLAIRE II.

445. On voit par la composition de cette Table, 1°. Que le nombre 2 est le premier terme de chaque rang perpendiculaire. 2°. Que les coëficiens de tous les autres termes du premier rang perpendiculaire sont égaux à l'unité. 3°. Que le coëficient d'un terme quelconque de tel rang perpendiculaire qu'on voudra, est toûjours égal au coëficient d'un pareil terme dans le rang perpendiculaire à gauche, plus au coëficient du terme qui est au dessus de lui: c'est à dire, par exemple, que le coëficient 14 du quatriéme terme $14x^3$ du troisiéme rang perpendiculaire, est égal au coëficient 5 du quatriéme terme $5x^3$ du deuxiéme rang perpendiculaire qui est le rang à gauche, plus au coëficient 9 du terme $9xx$ qui est au dessus du terme $14x^3$.

REMARQUE.

446. Si l'on continuoit à diviser la circonference en parties égales aux arcs AD, DE, &c. au-delà du point R; il est clair que les rangs paralleles de la Table qui suivent celui qui exprime $-BR$ continueroient à exprimer par ordre toutes les cordes négatives qui suivroient BR, jusqu'à ce que repassant le point B elles redeviendroient encore négatives; & ainsi de suite alternativement positives & negatives, autant de fois qu'elles passeroient le point B jusqu'à l'infini. FIG. 270.

EXEMPLE I.

447. COUPER un arc de cercle donné *AR*, en autant de parties égales *AD*, *DE*, *EF*, *FG*, &c. qu'on voudra.

Fig. 269. 270. Ayant mené le diametre *AB* & la corde *BR*, & nommé le rayon donné *CA* ou *CB*, 1; la corde donnée *BR*, *a*; on formera une égalité dont le premier membre sera le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales, & le second sera $\mp a$; sçavoir $+a$ lorsque l'arc *AR* est moindre que la demie circonference, & $-a$ lorsqu'il est plus grand. Or il est visible, selon l'article 443. que la resolution de cette égalité doit fournir pour l'une de ses racines *x*, une valeur *BD* telle qu'ayant décrit du point *B* comme centre & de l'intervalle *BD* un arc de cercle, il coupera sur l'arc donné *AR* la premiere des parties égales cherchées *AD*.

voyez application de l'algèbre à la géométrie ... par guisnée 1e. paris. 1733. guillau. page 206.

Qu'il faille, par exemple, diviser l'arc donné *AR* en trois parties égales; on trouvera $x^3 - 3x = \mp a$, dont l'une des racines *BD* terminera la premiere des trois parties égales qu'on demande. S'il falloit diviser l'arc *AR* en cinq parties égales, on auroit $x^5 - 5x^3 + 5x = \mp a$; & de même, s'il falloit diviser en sept, il viendroit $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = \mp a$: de sorte que toute la difficulté se reduit à trouver les racines de ces égalités. Or c'est ce qu'on a enseigné dans le Livre precedent. Donc &c.

Il est à remarquer que ces égalités sont les plus simples qu'il est possible, lorsque le nombre des parties égales est un nombre premier. Mais lorsqu'il est composé de deux ou plusieurs nombres premiers, on divisera d'abord l'arc donné en autant de parties égales que l'un de ces nombres a d'unités, & ensuite la premiere de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres restans a d'unités, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les nombres premiers, dont le produit for-

me le nombre donné ; ce qui donnera enfin la premiere des parties égales qu'on cherche : si l'on veut, par exemple, diviser l'arc AR en trente parties égales, il faudra d'abord le diviser en cinq, ensuite la premiere de ces cinq parties en trois, & enfin la premiere de ces trois en deux, pour avoir la trentiéme partie qu'on demande, & cela parce que $30 = 5 * 3 * 2$.

REMARQUE I.

448. DEUX points donnés A, R, sur la circonference d'un cercle en déterminent non seulement deux arcs, dont l'un AR est moindre que la demie circonference, & l'autre ABR plus grand ; mais encore une infinité de portions, dont les unes sont la circonference entiere plus l'arc AR, deux fois la circonference plus l'arc AR, trois fois la circonference plus l'arc AR &c. & les autres sont la circonference entiere plus l'arc ABR, deux fois la circonference plus l'arc ABR, trois fois la circonference plus l'arc ABR &c ; dont la raison est que la circonference d'un cercle rentrant en elle-même, on peut considerer cette ligne courbe comme faisant une infinité de revolutions autour d'elle-même. Si donc l'on nomme l'arc AR, d ; la circonference entiere c ; l'arc ABR sera $c - d$ & l'on aura ces deux suites, FIG. 270. 271, 272 &c.

1°. $d, c+d, 2c+d, 3c+d, 4c+d, 5c+d, 6c+d, 7c+d, 8c+d$, &c.

2°. $c-d, 2c-d, 3c-d, 4c-d, 5c-d, 6c-d, 7c-d, 8c-d$, &c.

qui expriment par ordre toutes les portions de circonferences terminées par les deux points A, R. Cela posé.

Si l'arc AD est une aliquote quelconque de l'arc AR moindre que la demie circonference ; & qu'ayant inscrit dans le cercle un poligone $DEFGH$ &c. d'un pareil nombre de côtés à commencer par le point D, on tire de l'extremité B du diametre AB aux angles du poligone les cordes BD, BF, BG, BH, &c.

je dis qu'elles terminent des aliquotes pareilles de tous les termes de ces deux suites, dont l'origine fixe est toûjours au point *A*.

FIG. 271. Car soit pour fixer les idées l'arc $AD = \frac{1}{5} d$; il est clair que l'arc $ADE = \frac{c+d}{5}$, l'arc $ADEF = \frac{2c+d}{5}$, l'arc $ADEFG = \frac{3c+d}{5}$ l'arc $ADEFGH = \frac{4c+d}{5}$ qui sont les 5[es] parties ou les aliquotes pareilles des cinq premiers termes de la premiere suite. Or si l'on divise tel autre de ses termes qu'on voudra par 5, il est visible que le quotient renferme au juste un certain nombre de fois la circonference entiere plus une des cinq fractions precedentes. Donc puisque la corde qui termine un arc, dont l'origine est en *A*, est la même que celle qui termine cet arc plus la circonference repetée autant de fois qu'on veut, il s'ensuit que les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG*, *BH*, terminent les cinquiémes parties de tous les termes de la premiere suite. On prouvera de la même maniere que les arcs *AH*, *AHG*, *AHGF*, *AHGFE*, *AHGFED* sont les cinquiémes parties des cinq premiers termes de la seconde suite, & qu'ainsi les cordes *BH*, *BG*, *BF*, *BE*, *BD*, terminent les cinquiémes parties de tous les termes de la seconde suite. Mais il est visible que cette démonstration se peut appliquer à telle autre aliquote qu'on voudra de l'arc *AR*. Donc &c.

FIG. 273. 274. Delà il suit que si l'on réünit les deux suites precedentes en une seule d, $c \mp d$, $2c \mp d$, $3c \mp d$ &c; les deux cordes voisines de part & d'autre de la plus grande ou premiere *BD* qui termine l'aliquote *AD* de l'arc *AR* moindre que la demie circonference, termineront des aliquotes pareilles du second terme $c \mp d$ de la suite; que les deux cordes voisines de celles-ci termineront des aliquotes pareilles du troisiéme terme $2c \mp d$ de la suite; & ainsi à l'infini de deux en deux jusqu'aux dernieres lorsque l'aliquote est impaire, & jusqu'à la derniere lorsqu'elle est paire. Ainsi lorsque l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes *BE*, *BH*, terminent des deux arcs *ADE*, *AH*,

cinquiémes parties du second terme $c \mp d$ de la suite, c'est à dire de la circonference plus l'arc *AR*, & de la circonference moins cet arc ; les deux cordes *BF*, *BG*, voisines de celles-ci termineront deux arcs *ADEF*, *AHG*, qui sont les cinquiémes parties du troisiéme terme $2c \mp d$ de la suite : & de même lorsque l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les deux cordes *BE*, *BK*, voisines de part & d'autre de la premiere ou plus grande *BD* terminent les deux arcs *ADE*, *AK*, qui sont les sixiémes parties du second terme $c \mp d$; les deux cordes *BF*, *BH*, voisines de ces deux-ci terminent les deux arcs *ADEF*, *AKH*, sixiémes parties du troisiéme terme $2c \mp d$; & enfin la derniere corde *BG* termine les deux arcs *ADEFG*, *AKHG*, sixiémes parties du quatriéme terme $3c \mp d$.

On entend dans les remarques suivantes par *cordes impaires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la premiere ou plus grande *BD*, se trouvent dans les lieux impairs à commencer par cette plus grande ; & par *cordes paires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la même *BD*, se trouvent dans des lieux pairs. Ainsi lorsque l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes *BD*, *BF*, *BG*, sont des cordes impaires, & les cordes *BE*, *BH*, des cordes paires : & de même lorsque l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les cordes *BD*, *BF*, *BH*, sont des cordes impaires, & les côtés *BE*, *BK*, *BG*, sont des cordes paires.

REMARQUE II.

449. SI l'arc *AD* est une ali quote quelconque de l'arc *AR* moindre que la demie circonference *ARB* ; & qu'ayant inscrit dans le cercle à commencer par le point *D*, un poligone *DEFGH* &c. d'un pareil nombre de côtés, on tire de l'extremité *B* du diametre *AB* aux angles du poligone les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG*, *BH* &c : je dis que les cordes impaires lorsque l'arc *AD* est une aliquote impaire de l'arc *AR*, & leurs quar- FIG. 273. 274.

rés lorſqu'il en eſt une aliquote paire, expriment les racines vraies de l'égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur poſitive $+a$, le rang parallele de la Table dont l'expoſant ſurpaſſe d'une unité le nombre des côtés du poligone ; & que les cordes paires dans le premier cas, & leurs quarrés dans le ſecond, expriment les racines vraies de l'autre egalité qu'on trouve en égalant à la grandeur negative $-a$, le même rang parallele de la Table.

FIG. 271. Soit, par exemple, l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; je dis que les
273. cordes impaires BD, BF, BG, ſont les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & que les cordes paires
FIG. 272. BE, BH, ſont les racines vraies de l'autre égalité
274. $x^5 - 5x^3 + 5x = -a$. Si l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les quarrés des cordes impaires BD, BF, BH, ſeront les racines vraies de l'égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = a$, & les quarrés des cordes paires BE, BK, BG, ſeront les racines vraies de l'autre égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = -a$.

Car ſi l'on propoſe de diviſer la circonference entiere repetée un certain nombre de fois plus ou moins l'arc AR, en parties égales dont la premiere ſoit moindre que la demie circonference, il eſt clair ſelon l'article 444 qu'on formera la même Table que pour la diviſion de l'arc AR : en obſervant que les cordes doivent changer neceſſairement une fois de ſigne (avant que d'arriver à la derniere BR) lorſque la circonference n'eſt repetée qu'une fois, par ce que l'origine commune B de toutes ſe trouve ſur l'une des parties égales ; que les cordes doivent changer deux fois de ſignes, lorſque la circonference eſt repetée deux fois, parce que l'origine B ſe trouve neceſſairement ſur deux des parties égales ; qu'elles doivent changer trois fois, lorſque la circonference eſt repetée trois fois, parce que l'origine B ſe trouve ſur trois parties égales, & ainſi de ſuite. La corde BR ſera donc poſitive lorſquil s'agit de diviſer en parties égales l'arc AR & la circonference repetée un nombre pair de fois plus ou moins l'arc AR ; & negative lorſque la circonferen-

ce est repetée un nombre impair de fois : c'est à dire que dans le premier cas on doit égaler le rang parallele de la Table à la grandeur positive $+a$. Et par consequent les cordes impaires ou leurs quarrés seront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est $-a$. *Ce qu'il falloit, &c.*

REMARQUE III.

450. Les mêmes choses étant posées, si l'arc AD est une aliquote impaire de l'arc AR; il est clair par l'inspection de la Table, que tous les termes pairs, c'est à dire, le deuxiéme, quatriéme, sixiéme, &c, excepté le dernier terme a, manquent toûjours dans les deux égalités qu'on trouve selon la remarque precedente. Or l'on sçait en Algebre, qu'en changeant de signes les termes pairs d'une égalité, on ne fait qu'en changer les racines vraies en fausses & les fausses en vraies. D'où il suit que les cordes paires qui sont des racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est $-a$, deviendront des racines fausses de l'autre égalité dont l'un des membres est $+a$. Par exemple, si l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes impaires BD, BF, BG, seront les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & les cordes paires BE, BH, en seront les racines fausses. FIG. 271. 273.

On peut tirer de ces deux dernieres Remarques plusieurs Theorêmes la plûpart entierement nouveaux, touchant l'inscription des poligones reguliers; si l'on fait attention que la grandeur connuë du second terme d'une égalité renferme la somme de ses racines, que celle du troisiéme terme renferme la somme des plans alternatifs de ses racines, que celle du quatriéme terme renferme la somme des solides alternatifs &c, & enfin que le dernier terme est égal au produit de toutes les racines les unes par les autres. J'en mettrai ici quatre des principaux, après avoir fait la Remarque suivante qui peut être de quelque utilité.

REMARQUE. IV.

FIG. 271. 273. 451. LES mêmes choses étant posées que dans la Remarque precedente, où l'on veut que l'aliquote *AD* de l'arc *AR* soit impaire ; je dis qu'entre les cordes renfermées dans la demie circonference *ARB* qui contient l'arc *AR*, la derniere ou plus petite *BF* soûtend un arc *BF* qui est à l'arc *BR*, en même raison que l'arc *AD* à l'arc *AR*.

Car soit l'arc *AD* la cinquiéme partie de l'arc *AR*, & par consequent l'arc *DE* la cinquiéme partie de la circonference ; il est clair que la demie circonference *ARB* contiendra deux fois & demie l'arc *DE*, c'est à dire, deux fois l'arc *DE* ou bien l'arc *DEF* plus la cinquiéme partie de la demie circonference. Donc l'arc *AD* plus l'arc *BF* vaut la cinquiéme partie de la demie circonference *ARB*. Donc puisque *AD* est la cinquiéme partie de l'arc *AR*, il s'ensuit que *BF* sera aussi la cinquiéme partie de l'arc *BR* complement à deux droits de l'arc *AR*. Mais ce que l'on vient de démontrer subsiste avec la même force, soit que l'arc *AD* soit la cinquiéme partie de l'arc *AR*, ou bien une autre aliquote quelconque impaire. On a donc eu raison de dire en general &c.

De là on voit que si l'on nomme *b* la corde *BR* d'un arc quelconque *BR* moindre que la demie circonference, dont le rayon est 1 ; & que l'on forme une égalité dont l'un des membres soit *b*, & l'autre le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales dans lesquelles l'arc *BR* doit être divisé : cette égalité aura pour l'une de ses racines la corde *BF* de la premiere de ses parties, & par consequent pour une autre de ses racines, la corde *BG* de la premiere d'un pareil nombre de parties égales de l'arc *BAR* complement à quatre droits de l'arc *BR*.

THEOR. I.

THEORESME I.

452. *Si l'on inscrit au dedans d'un cercle un poligone regulier quelconque* DEFGH &c. *d'un nombre impair de côtés ; & qu'on tire d'un point quelconque* B *de la circonference à tous les angles du poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, &c : *je dis*, FIG. 271.

1°. *Que la somme des cordes impaires* BD, BF, BG &c, *à commencer par la plus grande* BD *sera toûjours égale à la somme des cordes paires* BE, BH &c ; *c'est à dire que la plus petite corde* BF — BE + BD — BH + BG &c = 0.

Car menant le diametre *BA*, & prenant l'arc *AR* qui contienne l'arc *AD* autant de fois que le poligone a de côtés, il est clair comme l'on vient de voir que si l'on nomme la corde *BR*, *a* ; & le rayon *CA* ou *CB*, 1 ; les cordes impaires *BD*, *BF*, *BG &c*, seront les racines vraies, & les cordes paires *BE*, *BH &c*, les racines fausses de l'égalité qui a pour l'un de ses membres + *a*. Or puisque le second terme, qui selon qu'on démontre en Algebre contient la somme des racines, manque toûjours dans cette égalité ; il s'ensuit &c.

2°. *Que si l'on mene le diametre* BA, *& qu'ayant pris l'arc* AR *qui contienne l'arc* AD *autant de fois que le poligone a de côtés, on tire la corde* BR : *le produit* BD * BE * BF * BG * BH &c *de toutes les cordes* BD, BE, BF, BG, BH &c *les unes par les autres, sera toûjours égal au produit de la corde* BR *par une puissance du rayon* CA *qui ait pour exposant le nombre des cordes* — 1.

Car ce dernier produit vaut le membre *a* ; puisque *BR* = *a*, & qu'on prend dans la Table pour l'unité le rayon *CA*. Or comme le terme *a* est toûjours le dernier terme de l'égalité qui a pour ses racines toutes les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG*, *BH &c*, & que le dernier terme d'une égalité contient toûjours selon ce qu'on démontre en Algebre le produit de toutes ses racines : il s'ensuit &c.

THEORESME II.

FIG. 673. 453. *Si l'on divise une demie circonference* AEB *en un nombre quelconque impair de parties égales, dont les deux premieres soient l'arc* AE, *les quatre premieres l'arc* AEF, *& ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la derniere; & qu'on tire les cordes* BE, BF &c: *je dis*,

1°. *Que la premiere de ces cordes* BE, *moins la seconde* BF, *plus la troisiéme, moins la quatriéme &c. jusqu'à la derniere inclusivement; est toûjours égale au rayon.*

2°. *Que le produit* BE × BF &c. *de toutes les cordes les unes par les autres, est égal à une puissance convenable du rayon. Ainsi dans cet exemple où le nombre des divisions est* 5, *& où il n'y a par consequent que deux cordes* BE, BF; *on aura* 1°. $BE - BF = CA$. 2°. $BE \times BF = \overline{CA}^2$.

Car inscrivant dans le cercle entier le poligone regulier *EFGH* dont le nombre des côtés soit égal au nombre des divisions à commencer par le point *A*; & tirant de l'autre extremité *B* du diametre *AB* à tous les angles de ce poligone des cordes *BD*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG*, *&c*; il est clair 1°. Que la plus grande de ces cordes *BD* est égale au diametre *BA*, & qu'ainsi l'arc *AD* étant nul ou zero, l'arc *AR* le sera aussi; d'où l'on voit que la corde *BR* sera aussi égale au diametre *BA*. 2°. Que les cordes *BE*, *BH*, *BF*, *BG &c*, étant prises deux à deux sont égales entr'elles. Or cela posé, si l'on applique le Theorême precedent à ce cas particulier on en verra naître celui-ci. Donc &c.

THEORESME III.

FIG. 272. 454. *Si l'on inscrit au dedans d'un cercle un poligone regulier quelconque* DEFGHK &c, *dont le nombre des côtés soit pair; & que d'un point quelconque* B *de la circonference, on tire à tous les angles de ce poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, BK &c. : *je dis*,

1°. *Que la somme tant des quarrés des cordes impaires* BD,

BF, BH, *que des cordes paires* BE, BG, BK, *est égale au quarré du rayon* CB *pris autant de fois que le poligone a de côtés.*

Car menant le diametre *BA*, & prenant l'arc *AR* qui contienne l'arc *AD* autant de fois que le poligone a de côtés ; il est clair* qu'en nommant la corde *BR*, *a* ; & le rayon *CA* ou *CB*, 1 ; les quarrés des cordes impaires *BD*, *BF*, *BH &c*, seront les racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est $+a$; & que les quarrés des cordes paires *BE*, *BK*, *BG &c*, seront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est $-a$. Or le coëficient du second terme de chacune de ces deux égalités qui contient la somme de leurs racines, est toûjours égal au quarré du rayon pris autant de fois que le poligone a de côtés, comme l'on voit dans la Table. Donc &c. * Art. 449.

2°. *Que si l'on mene le diametre* BA ; *& qu'ayant pris l'arc* AR *qui contienne autant de fois l'arc* AD *que le poligone a de côtés, on tire la corde* BR : *le produit* $\overline{BD}^2 \times \overline{BF}^2 \times \overline{BH}^2$ &c. *des quarrés des cordes impaires, est égal au produit de* BA $\mp$ BR *par une puissance convenable du rayon, sçavoir* BA + BR *lorsque le nombre des côtés du poligone est simplement pair, &* BA — BR *lorsqu'il est pairement pair, c'est à dire, divisible par* 4 ; *& le produit* $\overline{BE}^2 \times \overline{BG}^2 \times \overline{BK}^2$ &c. *des cordes paires, est égal au produit de* BA $\pm$ BR *par la même puissance du rayon, sçavoir* BA — BR *dans le premier cas &* BA + BR *dans le second.*

Car nommant *BR*, *a* ; & le rayon *CA*, 1 ; il est clair que les quarrés des cordes impaires *BD*, *BF*, *BH &c*, sont les racines d'une égalité qui a toûjours pour dernier terme $2 \mp a$, c'est-à-dire *BA* $\mp$ *BR* ; & de plus que les quarrés des cordes paires *BR*, *BG*, *BK &c*, sont les racines de l'autre égalité qui a toûjours pour dernier terme $2 \pm a$, c'est-à-dire *BA* $\pm$ *BR*. Or comme le dernier terme d'une égalité contient toûjours le produit de toutes ses racines, il s'ensuit &c.

COROLLAIRE.

455. De-là il est evident 1°. Que la somme des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires, est égal au quarré du rayon multiplié par le double du nombre des côtés du poligone, c'est à dire ici que $\overline{BF}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{BG}^2 = 12\overline{CA}^2$. 2°. Que la difference des quarrés des cordes impaires avec les quarrés des cordes paires, est toujours égale à zero, c'est à dire, que $\overline{BF}^2 - \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{BK}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{BG}^2 = 0$. 3°. Que le produit des quarrés des cordes impaires plus celui des quarrés des cordes paires, est egal au quadruple d'une puissance pareille du rayon; c'est à dire, que $\overline{BF}^2 \times \overline{BD}^2 \times \overline{BH}^2 + \overline{BE}^2 \times \overline{BK}^2 \times \overline{BG}^2 = 4\overline{CA}^6$. 4° Que la difference de ces deux produits, est egale au double de la corde BR multipliee par une puissance convenable du rayon; en observant que le produit du quarré des cordes impaires, surpasse celui des quarrés des cordes paires, lorsque le nombre des côtés du poligone est simplement pair, & au contraire qu'il est moindre, lorsqu'il est pairement pair: c'est à dire ici, que $\overline{BF}^2 \times \overline{BD}^2 \times \overline{BH}^2 - \overline{BE}^2 \times \overline{BK}^2 \times \overline{BG}^2 = 2BR \times CA^5$. 5°. Que le produit des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires les uns par les autres sera toûjours égal au produit de $\overline{BA}^2 - \overline{BE}^2 = BA + BR \times BA - BR = \overline{AR}^2$ à cause de l'angle droit ARB, par une puissance convenable du rayon: c'est à dire en extrayant de part & d'autre les racines quarrees, que le produit de toutes les cordes est égal au produit de la corde AR par une puissance du rayon moindre d'une unité que le nombre des cordes; par exemple ici, $BF \times BE \times BD \times BK \times BH \times BG = AR \times CA^5$.

THEORESME IV.

FIG. 275. 456. *Si l'on divise une demie circonference* ADB *en un nombre quelconque pair de parties égales, dont la premiere*

soit l'arc AD, *les trois premieres l'arc* ADE, *les cinq premieres l'arc* ADEF, *& ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la derniere ; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF &c: *je dis*,

1°. *Que la somme des quarrés de ces cordes est égale au quarré du rayon pris autant de fois qu'il y a de divisions. C'est à dire ici, où le nombre des divisions est* 6, *que* $\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2 = 6\overline{CA}^2$.

2°. *Que le produit des quarrés de ces cordes les uns par les autres, vaut le double de la puissance convenable du rayon. Ainsi* $\overline{BD}^2 \times \overline{BE}^2 \times \overline{BF}^2 = 2CA^6$, *& par consequent* $BD \times BE \times BF = CA^3 \times \sqrt{2}$.

Car inscrivant dans le cercle entier un poligone regulier *DEFGHK*, dont le nombre des côtés soit égal au nombre des divisions, à commencer par la premiere *D* ; & tirant de l'extremité *B* du diametre *AB*, à tous les angles de ce poligone, des cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG* : il est clair que les cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG*, *&c.* étant prises deux à deux sont égales entr'elles ; & partant que si l'on applique les articles premier & troisiéme du Corollaire precedent à ce cas particulier, on en verra naître ce Theorême.

EXEMPLE XII.

457. INSCRIRE dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque, dont le nombre des côtés soit donné. FIG. 275.

On peut regarder ce Problême, comme n'étant qu'un cas particulier de l'Exemple precedent. Car si l'on suppose que la corde *BR* devienne nulle ou zero, il s'ensuit que l'arc *AR* qu'elle termine deviendra la demie circonference. Or si l'on propose de diviser la circonference entiere en un nombre quelconque de parties égales ; il est évident qu'en divisant la demie circonference dans ce même nombre, & prenant la seconde corde au

lieu de la premiere, elle terminera la premiere des parties demandées. Par exemple, si l'on divise la demie circonference *ADB* en sept parties égales *AD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GH*, *HI*, *IB*; la seconde corde *BE* terminera l'arc *AE* qui est la septiéme partie de la circonference entiere. D'où l'on voit qu'en égalant à zero le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des côtés du poligone, on formera une égalité dont la plus grande des racines x exprimera la valeur de la corde *BD* qui termine l'arc *AD* moitié de l'arc cherché *AE*. Mais * $CB\ (1).\ BD\ (x) :: BD\ (x).\ BE + BA$, & par consequent si l'on nomme la seconde corde *BE*, z; on aura $xx = z + 2$. Si donc l'on fait évanoüir par le moyen de cette égalité l'inconnuë x dans la precedente, on en formera une nouvelle dont la plus grande racine z exprimera la corde *BE* qui termine l'arc cherché *AE*. Ainsi dans nôtre exemple, en égalant à zero le huitiéme rang parallele & divisant par x, je trouve cette égalité $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 = 0$, dans laquelle mettant à la place de xx sa valeur $z + 2$, à la place de x^4 le quarré de cette valeur &c. je la change en cette autre $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, dont la plus grande des racines z exprime la valeur de la corde *BE* qui termine l'arc *AE* septiéme partie de la circonference entiere.

Fig. 276.

* Art. 442.

Voici maintenant une maniere generale de trouver immédiatement toutes ces égalités lorsque le nombre des côtés du poligone est impair qui est le seul cas necessaire; puisque s'il étoit pair, on le reduiroit toûjours en le divisant par 2, autant de fois qu'il seroit possible, en un nombre impair dans lequel ayant partagé la circonference, on auroit par la bissection d'une des parties égales, réïterée autant qu'il seroit necessaire, l'arc qu'on demande.

Soit construite une Table dans laquelle le premier rang parallele étant 1, & le second $z - 1$; le troisiéme $zz - z - 1$ soit égal au produit du second par z, moins le premier; le quatrieme $z^3 - zz - 2z + 1$ soit égal au pro-

duit du troisiéme par z, moins le second ; & ainsi à l'infini. Soit formée une égalité dont l'un des membres étant zero, l'autre soit le rang parallele de la Table, qui ait pour exposant la plus grande moitié du nombre des côtés du poligone. Je dis que la plus grande des racines z de cette égalité, terminera un arc qui aura pour corde, le côté cherché du poligone.

Table pour l'inscription des poligones reguliers dans le cercle.

1er	1
2e	$z - 1$
3e	$zz - z - 1$
4e	$z^3 - zz - 2z + 1$
5e	$z^4 - z^3 - 3zz + 2z + 1$
6e	$z^5 - z^4 - 4z^3 + 3zz + 3z - 1$
7e	$z^6 - z^5 - 5z^4 + 4z^3 + 6zz - 3z - 1$
8e	$z^7 - z^6 - 6z^5 + 5z^4 + 10z^3 - 6zz - 4z + 1$
9e	$z^8 - z^7 - 7z^6 + 6z^5 + 15z^4 - 10z^3 - 10zz + 4z + 1$
10e	$z^9 - z^8 - 8z^7 + 7z^6 + 21z^5 - 15z^4 - 20z^3 + 10zz + 5z - 1$

Qu'il faille, par exemple, inscrire dans un cercle un heptagone. Je prends le quatriéme rang parallele de la Table, parce que 4 est la plus grande moitié de 7, & l'égalant à zero j'ai $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, dont la plus grande racine z exprimera la valeur de la corde BE, qui termine l'arc AE septiéme partie de la circonference entiere ; pour le prouver.

Soit un arc de cercle AR moindre que la demie circonference divisé en un nombre quelconque impair, de parties égales aux points D, E, F, G *&c* : & soient menées de l'extremité B du diametre BA, les cordes BD, BE, BF, BG *&c*, jusqu'à la derniere BR. Ayant pris l'arc AS égal à l'arc AD, soit tirée la corde BS, & soient nommées la premiere corde BD ou BS, x ; & la seconde BE, z. Cela posé, on aura selon le Lemme CB (1). BE (z) :: BD (x). $BF + BS$. Et par consequent $BF = xz - x$. De même CB (1). BE (z) :: BF. $BD + BH$. Et par consequent $BH = zBF - BD$; de FIG. 275.

même encore CB (1). BE (z) :: BH. $BF + BR$, & partant $BR = zBH - BF$: c'eſt-à dire, que la cinquiéme corde BH eſt égale au produit de la troiſiéme BF par z, moins la premiere BD ; que la ſeptiéme BR eſt egale au produit de la cinquiéme BH par z, moins la troiſieme BF ; & ainſi à l'infini de toutes les cordes impaires. D'où l'on voit que ſi l'on conſtruit une Table dont le premier rang étant x, & le ſecond $xz - x$; le troiſiéme $xzz - xz - x$ ſoit égal au produit du ſecond par z, moins le premier ; le quatriéme $xz^3 - xzz - 2xz + 1$ ſoit égal au produit du troiſiéme par z moins le ſecond ; & ainſi à l'infini : les rangs de cette Table exprimeront par ordre toutes les cordes impaires BD, BF, BH, BR, de l'arc AR. Or les rangs de cette Table n'étant autres que ceux de la precedente multipliez chacun par x, il s'enſuit qu'en ſuppoſant que la derniere corde BR devienne nulle ou zero (ce qui arrive lorſque l'arc AR devient la demie circonference,) & faiſant ce qu'on vient de preſcrire, on aura une égalité dont l'inconnuë z exprimera la ſeconde corde BE qui termine l'arc AE qui eſt contenu autant de fois dans la circonference entiere, que l'arc AD qui en eſt la moitié, l'eſt dans la demie circonference.

FIG. 276.

Il faut remarquer 1°. Que les égalités qu'on trouve de cette maniere ſont les plus ſimples qu'il eſt poſſible, lorſque le nombre des côtés du poligone eſt un nombre premier : mais que lorſqu'il eſt compoſé de deux ou de pluſieurs nombres premiers, il faudra diviſer d'abord la circonference entiere en autant de parties égales que le plus grand de ces nombres a d'unités, & enſuite une de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres reſtans a d'unités, & continuer juſqu'à ce que tous les nombres premiers qui compoſent le nombre donné des côtés du poligone ſoient épuiſés. 2°. Qu'entre les cordes qui partent du point B, & qui ſont renfermées dans la demie circonference AEB ; les impaires, à commencer par la plus grande BE ſont les racines

vraies,

vraies, & les paires les fausses des égalités qu'on trouve par cette methode : ainsi les cordes *BE*, *BI*, sont les deux racines vraies de l'égalité $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, & la corde *BG* en est la fausse. 3°. Qu'entre les racines de ces sortes d'égalités, la plus petite est la corde d'un arc qui est la moitié de celui qu'on cherche : c'est-à-dire dans cet exemple, que la plus petite racine *BI* de l'égalité $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, est la corde d'un arc *BI* qui est la quatorziéme partie de la circonference.

REMARQUE.

458. IL est visible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier & du second rang perpendiculaire ont chacun pour coëficient l'unité ; que ceux du troisiéme & du quatriéme rang ont pour coëficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c, qui se forment par l'addition continuelle des unités ; que ceux du cinquiéme & du sixiéme rang ont pour coëficiens les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10 &c qui se forment par l'addition continuelle des nombres naturels ; que ceux du septiéme & du huitiéme rang ont pour coëficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10 &c, qui se forment par l'addition continuelle des triangulaires ; & ainsi à l'infini de deux en deux des nombres d'un ordre superieur qui se forment par l'addition continuelle de ceux du dernier ordre.

LEMME I.

459. S'IL *y a sur un demi cercle* AEB *deux arcs égaux* AD, EF, *dont l'un* AD *ait son commencement en l'une des extremités* A *du diametre* AB, *& l'autre* EF *soit pris par tout où l'on voudra ; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF, *&* AD, AE, AF : *je dis*, 1°. *Que* $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$. 2°. *Que* $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$. FIG. 277.

Car les trois triangles rectangles *ADG* (le point *G* est ici le point d'intersection des cordes *BD*, *AF*), *AEB*;

BFG sont semblables entr'eux ; puisque l'angle *AGD* ou *BGF* ayant pour mesure la moitié des deux arcs *BF*, *AD*, est égal à l'angle *BAE* qui a aussi pour mesure la moitié des deux arcs *BF*, *FE*, ou *AD*. Si donc l'on nomme le diametre *AB*, 1 ; les cordes *BD*, x ; *AD*, y ; *BE*, v ; *AE*, z ; on aura 1°. *BE* (v). *EA* (z) :: *AD* (y). $DG = \frac{yz}{v}$, & partant *BG* ou $BD - DG = x - \frac{yz}{v}$. 2°. *AB* (1). *BE* ($v$) :: *BG* $\left(x - \frac{yz}{v}\right)$. $BF = vx - yz$ c'est à dire (puisque $AB = 1$) que $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$. Ce qu'il falloit demontrer en premier lieu.

Maintenant *BE* (v). *BA* (1) :: *AD* (y). $AG = \frac{y}{v}$. Et *AB* (1). *AE* (z) :: *BG* $\left(x - \frac{yz}{v}\right)$ $GF = xz - \frac{zzy}{v}$; & partant $AG + GF$ ou $AF = xz - \frac{zzy}{v} + \frac{y}{v} = xz + vy$, puisqu'à cause du triangle rectangle *AEB* on trouve $1 - zz = vv$; c'est-à dire que *AF* ou $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$. Et c'est ce qui restoit à démontrer.

LEMME II.

460. SOIT *formée une Table, dont le premier rang parallele étant composé de deux parties* x *&* y, *tous les autres le soient aussi selon cette regle ; la premiere partie de tel rang parallele qu'on voudra, vaut la premiere partie du rang parallele qui le precede immédiatement, multipliée par* x, *moins la seconde partie du même rang multipliée par* y : *& la seconde partie vaut la même premiere partie multiplié par* y, *plus la même seconde multipliée par* x. *Soit de plus un arc de cercle quelconque* AR *moindre que la demie circonference divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points* D, E, F, G, &c. *Je dis que si le diametre* AB = 1, *& les deux premieres cordes* BD = x, AD = y ; *toutes les autres cordes* BE, BF, BG &c, *seront exprimées par les premieres parties du deuxiéme, troisiéme, quatriéme, &c. rang parallele, &*

FIG. 278.

les autres cordes correſpondantes AE, AF, AG, &c, *par les ſecondes parties des mêmes rangs. Ainſi* BG *étant la quatriéme corde, vaut la premiere partie* $x^4 - 6yyxx + y^4$ *du quatrième rang parallele; & ſa correſpondante* AG *vaut la ſeconde partie* $4yx^3 - 4y^3x$ *du même rang.*

1er	x	y
2e	$xx - yy$	$2yx$
3e	$x^3 - 3yyx$	$3yxx - y^3$
4e	$x^4 - 6yyxx + y^4$	$4yx^3 - 4y^3x$
5e	$x^5 - 10yyx^3 + 5y^4x$	$5yx^4 - 10y^3xx + y^5$
6e	$x^6 - 15yyx^4 + 15y^4xx - y^6$	$6yx^5 - 20y^3x^3 + 6y^5x$
7e	$x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$	$7yx^7 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - x^7$

Car il eſt clair ſelon le Lemme precedent que le produit d'une corde quelconque *BF* par la premiere corde *BD* (x), moins le produit de la corde correſpondante *AF*, par l'autre premiere corde *AD* (y) exprime la valeur de la corde *BG* qui ſuit immédiatement *BF*; & auſſi que la corde *AG* vaut *BI* × *AD* (y) + *AF* × *BD* (x). Donc &c.

COROLLAIRE.

461. Si l'on ajoûte enſemble les deux parties de chaque rang parallele de la Table precedente, en mettant par ordre tous les termes qui les compoſent ſelon les differens degrez des puiſſances de x; on formera cette nouvelle Table qui contiendra par ordre les termes de toutes les puiſſances du binome $x + y$: en obſervant que le premier & le ſecond terme doivent être pris affirmativement, le troiſiéme & le quatriéme negativement, & ainſi alternativement de deux en deux juſqu'au dernier. Ainſi le troiſiéme rang parallele contiendra $x^3 + 3yxx - 3yyx - y^3$; c'eſt-à-dire le cube du binome $x + y$, dont on prend les deux premiers termes affirmativement, & les deux derniers negativement: de même le cinquiéme rang parallele contiendra $x^5 + 5yx^4 - 10yyx^3 - 10y^3xx + 5y^4x + y^5$, qui eſt la cinquiéme

puissance du binome $x+y$, dont le premier & le second terme sont pris affirmativement, le troisiéme & le quatriéme negativement, le cinquiéme & le sixiéme affirmativement; & il en est ainsi de tous les autres rangs à l'infini.

1er	$x+y$
2e	$xx+2yx-yy$
3e	$x^3+3yxx-3yyx-y^3$
4e	$x^4+4yx^3-6yyxx-4y^3x+y^4$
5e	$x^5+5yx^4-10yyx^3-10y^3xx+5y^4x+y^5$
6e	$x^6+6yx^5-15yyx^4-20y^3x^3+15y^4xx+6y^5x-y^6$
7e	$x^7+7yx^6-21yyx^5-35y^3x^4+35y^4x^3+21y^5xx-7y^6x-y^7$

Car si l'on fait attention à la maniere dont la Table precedente est formee, on verra que tous les termes de chacun de ses rangs paralleles sont formés par ceux du rang parallele qui le precede, multiples par x & par y, & joints par des signes $+$ & $-$, en telle sorte que les termes des deux parties qui composent chaque rang, étant mis par ordre, selon les differens degrés de l'inconnuë x, il y a de suite deux signes $+$, & après deux signes $-$; & ainsi alternativement jusqu'au dernier.

REMARQUE.

462. Il est visible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier rang perpendiculaire, ont chacun pour coëficient l'unité, que ceux du second rang ont pour coëficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c, qui se forment par l'addition continuelle des unités; que ceux du troisiéme rang ont pour coëficiens les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, &c, qui se forment par l'addition continuelle des nombres naturels; que ceux du quatriéme rang ont pour coëficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10, 20, &c, qui se forment par l'addition continuelle des triangulaires; & ainsi à l'infini de rang en rang en avançant vers la droite, les nombres d'un

ordre ſuperieur, ſe forment par l'addition continuelle de ceux de l'ordre immédiatement precedent.

EXEMPLE XIII.

463. Un arc de cercle *AR* étant donné; le diviſer en autant de parties égales qu'on voudra, aux points *D*, *E*, *F*, *G* &c; par une methode differente de celle de l'Exemple dixiéme. FIG. 278.

Ayant nommé le diametre *AB*, 1; les cordes données *BR*, a; *AR*, b; qui terminent l'arc donné *AR*; & les cordes inconnuës *BD*, x; *AD*, y; qui terminent l'arc cherché *AD*; on élevera le binome $x+y$ à une puiſſance dont l'expoſant ſoit égal au nombre des diviſions. On formera deux égalités, dont la premiere aura pour l'un de ſes membres ſa donnée a, & pour l'autre tous les termes impairs de la puiſſance de $x+y$, joints par des ſignes $+$ & $-$ alternatifs; & la ſeconde aura pour l'un de ſes membres la donnée b, & pour l'autre tous les autres termes de la même puiſſance du binome $x+y$, joints encore enſemble par des ſignes alternatifs $+$ & $-$. On fera évanoüir l'une ou l'autre des inconnuës x ou y, par le moyen de l'égalité $xx = 1 - yy$ ou $yy = 1 - xx$, qui ſe tire du triangle *ADB* rectangle en *D*: ce qui donnera enfin une derniere égalité où il n'y aura qu'une ſeule inconnuë x ou y, dont la reſolution fournira la valeur de cette inconnuë *BD* ou *AD* qui termine l'arc cherché *AD*.

Qu'il faille, par exemple, diviſer l'arc cherché *AR* en ſept parties égales aux points *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*. Je prends la ſeptiéme puiſſance $x^7 + 7yx^6 + 21yyx^5 + 35y^3x^4 + 35y^4x^3 + 21y^5xx + 7y^6x + y^7$ du binome $x+y$, de laquelle je forme les deux égalités $a = x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$; & $b = 7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - y^7$. Et faiſant évanoüir dans la premiere de ces deux égalités l'inconnuë y, ou dans la ſeconde l'inconnuë x, par le moyen de l'égalité $yy = 1 - xx$ ou $xx = 1 - yy$,

je forme l'une de ces deux nouvelles egalités $a = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$ ou $b = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 63y^7$, qui ne renferme plus qu'une seule inconnuë, & dont la resolution qui se fera selon les regles du Livre precedent, fournira pour l'une de ses racines x ou y, une valeur BD ou AD qui servira à déterminer la premiere des parties égales demandées. Tout cela est une suite des deux articles precedens.

Il est à remarquer que si l'arc AR étoit plus grand que la demie circonference, celle des deux égalités precedentes qui a pour l'un de ses membres $+b$ sert également sans y rien changer, mais dans l'autre il faut changer le membre $+a$ en $-a$; dont la raison est que la corde BR (a) passant de l'autre côté du point B devient negative de positive qu'elle étoit, au lieu que la corde AR ne repassant point de l'autre côté du point A demeure toûjours positive.

LEMME I.

464. QUE *dans un quarré quelconque de cellules on remplisse de la lettre* a, *toutes les cellules du premier rang parallele; de la lettre* b, *toutes les cellules du premier rang perpendiculaire, excepté la premiere; & ensuite toutes les autres cellules par le moyen de cette regle; c'est à sçavoir qu'une cellule doit toûjours être égale à celle qui est au dessus plus à celle qui est à gauche: de cette sorte on aura le quarré de cellules qu'on voit ici. Or cela posé;*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	a	a	a	a	a	a	a
2.	b	a+b	2a+b	3a+b	4a+b	5a+b	6a+b
3.	b	a+2b	3a+3b	6a+4b	10a+5b	15a+6b	21a+7b
4.	b	a+3b	4a+6b	10a+10b	20a+15b	35a+21b	56a+28b
5.	b	a+4b	5a+10b	15a+20b	35a+35b	70a+56b	126a+84b
6.	b	a+5b	6a+15b	21a+35b	56a+70b	126a+126b	252a+210b
7.	b	a+6b	7a+21b	28a+56b	84a+126b	210a+252b	462a+462b

Je dis qu'une cellule quelconque est égale à la cellule qui est

à gauche plus à toutes celles qui sont au dessus : c'est à dire, par exemple, que la quatrième cellule 4a + 6b *du troisième rang perpendiculaire, est égale à la cellule* a + 3b *qui est à gauche, & qui par consequent est la quatrième du second rang perpendiculaire, plus à toutes les autres* a + 2b, a + b, a, *qui sont au dessus d'elle dans ce second rang.*

Car supposant que a, c, d, e, expriment les quatre premieres cellules du second rang perpendiculaire, & a, f, g, h, les quatre premiers du troisieme rang, on aura par la formation du quarré de cellules $h = e + g$, $g = d + f$, $f = c + a$, & partant $h = e + d + c + a$; ce qu'il falloit prouver. Or il est visible que cette demonstration se peut appliquer à tel nombre de cellules qu'on voudra de deux rangs perpendiculaires voisins. Donc &c.

COROLLAIRE.

465. PUISQUE toutes les cellules excepté celles du premier rang parallele & celle du premier rang perpendiculaire, sont composées de deux termes dans le premier desquels se trouve la lettre a, & dans le second la lettre b; il s'ensuit 1°. Que le terme où se trouve la lettre a, est égal au terme où se trouve la même lettre a dans la cellule gauche, plus à tous les termes où elle se rencontre dans les cellules qui sont au dessus de celle ci. 2°. Que le terme où se trouve la lettre b, est égal au terme où se trouve la même lettre b dans la cellule à gauche, plus à tous ceux où elle se trouve dans les cellules qui sont au dessus. Ainsi le terme $15a$ de la cinquiéme cellule du quatriéme rang perpendiculaire, est egal au terme $5a$ de la cellule à gauche, plus aux termes $4a$, $3a$, $2a$, $1a$, qui se trouvent dans les cellules qui sont au dessus de celle-ci; & de même $20b$ est égal au terme $10b$ de la cellule à gauche, plus aux termes $6b$, $3b$, $1b$, de toutes les cellules qui sont au dessus.

LEMME II.

466.* *Si l'on multiplie le terme où se trouve la lettre* a *dans une cellule quelconque, par la somme des exposans de son rang parallele & de son rang perpendiculaire moins* 2, *& qu'on divise le produit par l'exposant de son rang perpendiculaire moins* 1; *je dis que le quotient sera égal à ce terme plus à tous ceux qui sont au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que si l'on multiplie le terme* 15 a *de la cinquiéme cellule du quatriéme rang perpendiculaire par* $5 + 4 - 2 = 7$, *& qu'on divise le produit par* $4 - 1 = 3$; *le quotient* 35 a *sera égal au terme* 15 a *plus à tous les autres* 10 a, 6 a, 3 a, 1 a, *qui sont au dessus de lui.*

Cela est visible dans toutes les cellules du deuxiéme rang perpendiculaire, puisqu'elles contiennent toutes le même terme 1 a. Or je vais démontrer que supposé que cette proprieté se rencontre dans un rang perpendiculaire quelconque, elle se trouve necessairement dans celui qui est à droit; d'où il suivra que puisqu'elle se trouve dans le deuxiéme rang perpendiculaire, elle sera aussi dans le troisiéme, que puisqu'elle se rencontre dans le troisiéme, elle sera aussi dans le quatriéme, & ainsi de suite à l'infini. Pour le prouver.

Soient a, c, d, e, f &c, autant de termes qu'on voudra de ceux où se trouve la lettre a, dans un rang perpendiculaire quelconque à commencer par le premier; a, g, h, k, l, &c un pareil nombre de termes du rang qui est à droit à commencer aussi par le premier. Soit de plus m égale à la somme des exposans moins 2 des rangs perpendiculaire & parallele de la cellule où se trouve le terme f; & r égale à l'exposant moins 1 du rang perpendiculaire de cette cellule. Par la supposition $\frac{m}{r}f = f + e + d + c + a = $ * l, $\frac{m-1}{r}e = e + d + c + a = k$, $\frac{m-2}{r}d = d + c + a = h$, $\frac{m-3}{r}c = c + a = g$, $\frac{m-4}{r}a = a$. Donc $l + k + h + g + a = \frac{m}{r}f$

* Art. 464.

+

$+\frac{m-1}{r}e+\frac{m-2}{r}d+\frac{m-3}{r}c+\frac{m-4}{r}a=\frac{m}{r}*f+e+d+c+a,-\frac{1}{r}*1e+2d+3c+4a=\frac{m}{r}l,-\frac{1}{r}*k+h+g+a$ en mettant pour $f+e+d+c+a$ sa valeur l, & pour $1e+2d+3c+4a$ sa valeur $k+h+g+a$: transposant d'une part l & de l'autre $-\frac{1}{r}*k+h+g+a$, on aura $\frac{r+1}{r}*k+h+g+a=\frac{m-r}{r}l$: multipliant de part & d'autre par r, divisant par $r+1$; & ajoûtant de part & d'autre l, il vient enfin $\frac{m+1}{r+1}l=l+k+h+g+a$. Mais comme le rang perpendiculaire de la cellule où se trouve l, surpasse d'une unité celui de la cellule où se trouve f, & que leur rang parallele demeure le même ; il est évident que la proprieté marquée pour chaque terme où se trouve la lettre a dans un rang perpendiculaire quelconque, convient aussi au terme l du rang perpendiculaire qui est à droit. De plus puisque cette demonstration subsiste également tel que puisse être le nombre de termes des deux rangs perpendiculaires voisins, il s'ensuit que ce que l'on vient de montrer par rapport au terme l, sera vrai aussi à l'égard de tout autre de son rang perpendiculaire.

Si l'on suppose à present que n exprime en general l'exposant d'un rang parallele quelconque autre que le premier, on verra que la premiere cellule de ce rang ne renferme aucun terme où la lettre a se rencontre ; que la seconde renferme toûjours $1a$; que si l'on multiplie $1a$ par $\frac{n+2-2}{2-1}=\frac{n}{1}$, on aura $\frac{n}{1}a$ pour le terme où se trouve la lettre a dans la troisiéme cellule ; & de même que si l'on multiplie $\frac{n}{1}a$ par $\frac{n+3-2}{3-1}=\frac{n+1}{2}$, on aura $\frac{n}{1}a*\frac{n+1}{2}$ pour le terme où se trouve a dans la quatriéme cellule : de sorte que cette suite o, $1a$, $\frac{n}{1}a$, $\frac{n}{1}*\frac{n+1}{2}a$, $\frac{n}{1}*\frac{n+1}{2}*\frac{n+1}{3}a$, $\frac{n}{1}*\frac{n+1}{2}*\frac{n+2}{3}*\frac{n+3}{4}a$ &c, exprimera

par ordre tous les termes où se trouve la lettre *a*, dans les cellules du rang parallele dont *n* est l'exposant. Ainsi si $n = 5$, la suite 0, 1*a*, 5*a*, 15*a*, 35*a* &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve la lettre *a* dans les cellules du cinquiéme rang parallele.

LEMME III.

467. *Si l'on multiplie le terme où se trouve la lettre* b *dans une cellule quelconque, par la somme des exposans de son rang parallele & de son rang perpendiculaire moins 2, & qu'on divise le produit par l'exposant de son rang perpendiculaire; je dis que le quotient sera égal à ce terme plus à tous ceux qui sont au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que si l'on multiplie le terme* 10 b *de la cinquiéme cellule du troisiéme rang perpendiculaire par* $5 + 3 - 2 = 6$, *& qu'on divise le produit par* 3, *on aura* 20 b *pour la somme du terme* 10 b, *& de tous les autres* 6 b, 3 b, 1 b, *qui sont au dessus de lui :*

Il est visible que cette proprieté se rencontre dans le premier rang perpendiculaire où toutes les cellules renferment la même valeur 1*b*, excepté la premiere dans laquelle la lettre *b* ne se rencontre point. Or de cela seul l'on prouvera comme l'on vient de faire dans le Lemme precedent à l'égard des termes qui sont multiples de, *a*, qu'elle se doit rencontrer dans le second rang perpendiculaire, dans le troisiéme, dans le quatriéme, & ainsi dans tous les autres à l'infini. D'où l'on conclura que si *n* designe l'exposant d'un rang parallele quelconque autre que le premier; la suite 1*b*, $\frac{n-1}{1}b$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} b$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} b$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4} b$ &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve la lettre *b* dans les cellules du rang parallele dont *n* est l'exposant. Ainsi si $n = 5$, la suite 1*b*, 4*b*, 10*b*, 20*b*, 35*b*, &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve *b* dans le cinquiéme rang parallele.

COROLLAIRE.

468. Il suit de ces deux derniers Lemmes, que si l'on ajoûte par ordre tous les termes de cette suite à ceux de la precedente, on en formera une, $1b$, $1a$, $+ \frac{n-1}{1} b$, $\frac{n}{1} a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} b$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} b$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4} b$, &c; ou en abregeant l'expression, b, $a + \frac{n-1}{1} b$, $a + \frac{n-1}{2} b \times \frac{n}{1}$, $a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $a + \frac{n-1}{4} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c. qui exprimera par ordre toutes les cellules du rang parallele de la Table dont n est l'exposant.

D'où l'on voit que par le moyen de cette suite, on peut trouver tout d'un coup telle cellule qu'on voudra, les exposans de son rang parallele & perpendiculaire étant donnés; puisque prenant dans la suite generale le terme qui répond à l'exposant du rang perpendiculaire, c'est-à-dire, le quatriéme terme, si le rang perpendiculaire est le quatriéme, le cinquiéme, s'il est le cinquiéme &c, & mettant dans ce terme à la place de n l'exposant du rang parallele, on aura la cellule que l'on cherche. Que l'on demande, par exemple, la cinquiéme cellule du quatrieme rang perpendiculaire; ayant mis dans le quatriéme terme $a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, à la place de n l'exposant 5 du rang parallele de la cellule on trouvera $a + \frac{4}{3} b \times 15$, c'est-à dire, $15a + 20b$ pour cette cellule; & il en est ainsi de toutes les autres.

LEMME IV.

469. *Si l'on fait* a = 2 *&* b = 1 *dans le quarré de cellules de l'article 464, on le changera en celui-ci; duquel je dis que le premier rang parallele contient de suite le premier terme de tous les rangs perpendiculaires de la Table de l'article 443; le second rang parallele, les seconds termes; le troisieme*

rang, les troisièmes termes; & ainsi de suite à l'infini.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	2	2	2	2	2	2	2
2.	1	3	5	7	9	11	13
3.	1	4	9	16	25	36	49
4.	1	5	14	30	55	91	140
5.	1	6	20	50	105	196	336
6.	1	7	27	77	182	378	714
7.	1	8	35	112	294	672	1386

Cela est une suite naturelle de l'article 445, & de la formation du quarré de cellules de l'article 464, expliquée dans ce même article & dans le suivant 465.

COROLLAIRE.

470. Si l'on fait $b = 1$ & $a = 2$ dans la suite generale de l'article 468. b, $a + \frac{n-1}{1} b$, $a + \frac{n-1}{2} b \times \frac{n}{1}$, $a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $a + \frac{n-1}{4} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c; on la changera en cette autre 1, $\frac{n+1}{1}$, $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$, $\frac{n+5}{3} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $\frac{n+7}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c, par le moyen de laquelle on trouvera tout d'un coup le coëficient de tel terme qu'on voudra de la Table de l'article 443, son rang perpendiculaire & le quantiéme qu'il y occupe étant donnés. Voici la regle.

On prendra dans cette suite le terme qui répond au rang perpendiculaire donné, c'est à-dire le troisiéme, si c'est le troisiéme rang, le quatriéme, si c'est le quatriéme &c; & ayant mis dans ce terme à la place de n le nombre qui expose le quantiéme du terme dans son rang perpendiculaire, c'est-à-dire 4 s'il est le quatriéme, 5, s'il est le cinquiéme &c, on aura le coëficient qu'on cherche. Si l'on demande, par exemple, le coëficient du quatriéme terme $14x^3$ du troisiéme rang perpendicu-

laire ; on mettra dans le troisiéme terme $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de n le nombre 4, & l'on aura 14 pour le coëficient cherché.

Car l'exposant du rang perpendiculaire du coëficient pris dans la Table de l'article 443, est le même que l'exposant du rang perpendiculaire du quarré de cellules de l'article precedent ; & le quantiéme que ce coëficient occupe dans son rang perpendiculaire, est l'exposant du rang parallele du quarré de cellules. D'où l'on voit que cette regle n'est qu'une application de celle de l'article 468, à ce cas particulier ou $a = 2$ & $b = 1$.

LEMME V.

471. S*i l'on met* 1 *à la place de* b, *dans le quarré de cellules de l'article* 464 ; *on le changera en celui-ci, dont je dis que les rangs perpendiculaires contiennent par ordre tous les nombres qu'on appelle* Figurés : *sçavoir le premier rang les nombres du premier ordre qui sont les unités, le second rang les nombres naturels ou du second ordre qui se forment par l'addition continuelle des unités, le troisiéme rang les nombres triangulaires ou du troisiéme ordre qui se forment par l'addition continuelle des naturels, le quatriéme les nombres piramidaux ou du quatriéme ordre qui se forment par l'addition continuelle des triangulaires, & ainsi à l'infini.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	2	3	4	5	6	7
3.	1	3	6	10	15	21	28
4.	1	4	10	20	35	56	84
5.	1	5	15	35	70	126	210
6.	1	6	21	56	126	252	462
7.	1	7	28	84	210	462	924

Car selon le même article 464, chaque cellule est

égale à celle qui est à gauche, plus à toutes les autres qui sont au dessus.

M. Paschal a fait un Traité qui a pour titre Triangle Arithmetique, dans lequel il considere les proprietes de ces nombres, & fait voir qu'ils sont d'un trés grand usage dans plusieurs questions d'Arithmetique.

COROLLAIRE.

472. SI l'on fait $a = 1$ & $b = 1$ dans la suite generale de l'article 468. b, $a + \frac{n-1}{1}b$, $a + \frac{n-1}{2}b \times \frac{n}{1}$, $a + \frac{n-1}{3}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $a + \frac{n-1}{4}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c; on changera en cette autre 1, n, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ &c, qui servira à trouver tout d'un coup tel nombre figuré qu'on voudra, son ordre étant donné avec le quantiéme qu'il y occupe. Voici comment.

On prendra dans cette derniere suite le terme qui répond à l'ordre donné, c'est à-dire le troisieme, si c'est le troisiéme ordre, le quatriéme, si c'est le quatrieme ordre &c; & ayant mis à la place de n le nombre qui expose le quantiéme du nombre figuré, c'est à-dire 4, s'il doit être le quatriéme, 5, s'il doit être le cinquiéme &c, on aura ce nombre. Qu'il faille, par exemple, trouver le cinquiéme nombre du quatriéme ordre; je mets dans le quatriéme terme $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ de la suite à la place de n le nombre 5, & j'ai 35 pour le nombre cherché.

Ceci n'est autre chose que l'application de la regle de l'article 468. à ce cas particulier.

PROBLESME I.

473. SOIT *proposé de trouver une suite generale, qui exprime par ordre tous les termes d'un rang parallele quelconque, de la Table de la division des arcs de l'article 443.*

Comme le troisiéme terme d'un rang perpendiculaire quelconque de cette Table, répond toûjours au premier du rang qui est à droit; il s'ensuit que si $m+1$ exprime en general l'exposant du rang parallele, il faudra trouver dans le premier rang perpendiculaire, le coëficient du terme dont le quantiéme est $m+1$; dans le deuxiéme, le coëficient du terme dont le quantiéme est $m+1-2$ ou $m-1$; dans le troisiéme, le coëficient du terme dont le quantiéme est $m-1-2$ ou $m-3$, & ainsi de suite en diminuant toûjours de 2 le quantiéme du terme, à mesure que le rang perpendiculaire avance vers la droite. Il faudra donc selon la regle de l'article 470. mettre dans le second terme $\frac{n+1}{1}$ à la place de n le nombre $m-1$; dans le troisiéme terme $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de n le nombre $m-3$, dans le quatriéme terme $\frac{n+5}{3} \times \frac{n+1}{2}$ à la place de n le nombre $m-5$; dans le cinquiéme $\frac{n+7}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ à la place de n le nombre $m-7$; &c: ce qui donnera pour la suite des coëficiens 1, m, $\frac{m}{2} \times \frac{m-3}{1}$, $\frac{m}{3} \times \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2}$, $\frac{m}{4} \times \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3}$, &c. Or comme les signes des termes d'un rang parallele quelconque de la Table sont toûjours alternatifs; & que le premier terme est toûjours l'inconnuë x élevée à une puissance dont l'exposant est moindre d'une unité que celui du rang parallele; & que tous les autres termes renferment des puissances de x dont les exposans diminuent continuellement de 2, en observant que $x^0 = 1$: il s'ensuit qu'on aura $x^m - mx^{m-2} + \frac{m}{2} \times \frac{m-3}{1} x^{m-4} - \frac{m}{3} \times \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} x^{m-6} + \frac{m}{4} \times \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} x^{m-8}$ &c, pour l'expression generale du rang parallele de la Table, dont l'exposant est $m+1$. Ce qui étoit proposé.

Lorsqu'on a les premiers termes de ces sortes de suites, il est facile d'observer la loy qui y regne par tout,

& qui sert à les continuer autant que l'on veut. Si l'on suppose, par exemple, dans celle-ci, que r exprime le quantiéme du terme dont on veut avoir le coëficient ; il sera exprimé par la fraction generale $\frac{m \times m-r \times m-r-1 \times m-r-2 \text{ \&c.}}{r-1 \times r-2 \times r-3 \times r-4 \text{ \&c.}}$, en observant que le numerateur & le dénominateur doivent avoir chacun autant de termes, que le nombre $r-1$ contient d'unites. Ainsi si $r=5$, on aura pour le coëficient du cinquiéme terme, la fraction $\frac{m \times m-5 \times m-6 \times m-7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$: si $r=4$, on aura $\frac{m \times m-4 \times m-5}{3 \times 2 \times 1}$.

Il faut remarquer que le nombre des termes de cette suite est toûjours déterminé, de sorte qu'il est égal a la plus grande moitié de l'exposant du rang parallele qu'elle exprime, lorsque cet exposant est impair, & à sa moitié au juste lorsqu'il est pair. Ainsi elle n'a que trois termes, lorsqu'elle exprime le cinquieme ou le sixieme rang parallele, elle n'en a que quatre, lorsqu'elle exprime le septiéme ou le huitiéme rang parallele, &c.

PROBLESME II.

474. SOIT *proposé de trouver une suite generale qui exprime par ordre tous les termes de tel rang parallele qu'on voudra, de la Table de l'inscription des poligones reguliers de l'article* 457.

Comme le second terme de chaque rang perpendiculaire répond au premier de celui qui est à droit, il
* Art. 458. s'ensuit * que si $m+1$ est l'exposant d'un rang parallele quelconque de cette Table, les coëficiens des quatre premiers termes de ce rang seront 1, 1, $m-1$, $m-2$; le coëficient du cinquieme terme sera le nombre trian-
* Art. 472. gulaire dont le quantiéme est $m-3$, c'est à dire * $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2}$; celui du sixiéme rang sera le nombre triangulaire dont le quantiéme est $m-4$, c'est à dire $\frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2}$; celui du septiéme terme sera le nombre pira-

midal dont le quantiéme eſt $m - 5$, c'eſt à dire $\frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3}$; celui du huitiéme terme ſera le nombre piramidal dont le quantiéme eſt $m - 6$, c'eſt-à-dire, $\frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3}$; celui du neuviéme terme ſera le nombre du cinquiéme ordre dont le quantiéme eſt $m - 7$, c'eſt-à-dire $\frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4}$; & ainſi à l'infini. Si donc l'on joint à ces coëficiens les puiſſances de z qu'ils affectent, en faiſant preceder le ſecond & le troiſieme terme du ſigne —, le quatriéme & le cinquiéme du ſigne +, le ſixieme & le ſeptiéme du ſigne —, & ainſi alternativement de deux en deux; on aura cette ſuite generale $z^m - z^{m-1} - \overline{m-1}\, z^{m-2} + \overline{m-2}\, z^{m-3} + \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8}$ &c, qui exprime par ordre tous les termes du rang parallele de la Table de l'article 457 dont l'expoſant eſt $m + 1$: où l'on doit obſerver de ne prendre qu'autant de termes que le nombre $m + 1$ contient d'unités.

PROBLESME III.

475. TROUVER *une ſuite generale, qui exprime par ordre, les coëficiens de tous les termes, de tel rang parallele qu'on voudra, de la Table de l'article* 460; *ou* (*ce qui eſt la même choſe*) *d'une puiſſance quelconque du binome* x + y.

Soit en general m l'expoſant d'un rang parallele quelconque de cette Table, il eſt clair que les coëficiens des deux premiers termes de ce rang ſeront toûjours * 1, m; comme le ſecond terme de chaque rang perpendiculaire à commencer par le ſecond, répond au premier terme du rang qui eſt à droit, il s'enſuit que le coëficient du troiſieme terme du rang parallele ſera *

* *Art.* 462.

* *Art.* 462.

le nombre triangulaire dont le quantiéme eſt $m-1$,
* *Art.* 472. c'eſt-à-dire * $\frac{m-1}{1} \times \frac{m}{2}$; que celui du quatriéme terme ſera le nombre piramidal dont le quantiéme eſt $m-2$, c'eſt à dire $\frac{m-2}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m}{3}$; que celui du cinquiéme terme ſera le nombre du cinquiéme ordre dont le quantiéme eſt $m-3$, c'eſt-à-dire $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-1}{3} \times \frac{m}{4}$; & ainſi à l'infini. On aura donc pour la ſuite generale qu'on demande $1, m, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

COROLLAIRE.

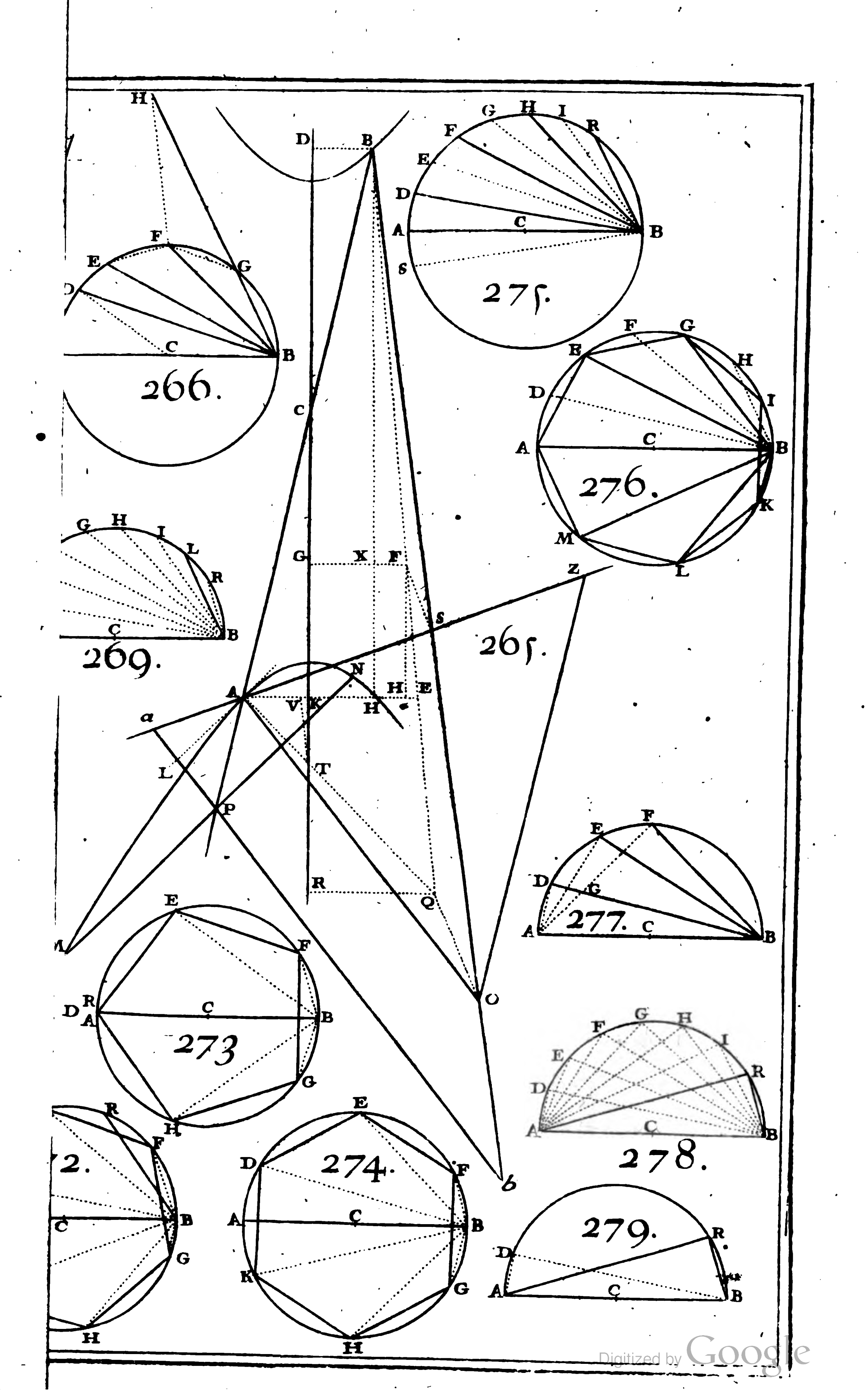
476. DE-LA il ſuit que $x \mp y^m = x^m \mp \frac{m}{1} y x^{m-1} + \frac{m \times m-1}{1 \times 2} yy x^{m-2} \mp \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} \ldots + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4} \mp \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5}$ &c.

PROBLESME IV.

477. TROUVER *une équation generale qui ſerve à diviſer un arc de cercle donné* AR, *en autant de parties égales qu'on voudra.*

PREMIERE MANIE'RE.

FIG. 279. Soit en general m le nombre des parties égales, l'arc AD la premiere de ces parties; ſoit tiré le diametre AB, & les cordes BD, BR; & ſoit le rayon CA ou $CB = 1$, la corde donnée $BR = a$, la corde cherchée
* *Art.* 444. $BD = x$. On aura * $\mp a = x^m - m x^{m-2} + \frac{m \times m-3}{2 \times 1} x^{m-4}$
473. $- \frac{m \times m-5 \times m-4}{3 \times 1 \times 2} x^{m-6} + \frac{m \times m-7 \times m-6 \times m-5}{4 \times 1 \times 2 \times 3} x^{m-8}$ &c, (ſçavoir $+a$ lorſque l'arc donné AR eſt moindre que la demie circonference, & $-a$ lorſqu'il eſt plus grand.)



266.
265.
269.
275.
276.
277.
278.
279.
273
274.
72.

pour l'équation generale qu'on demande ; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes, que la moitié du nombre m lorsqu'il est pair, ou sa plus grande moitié lorsqu'il est impair contient d'unités ; parce que le terme qui suivroit seroit nul ou zero.

Si $m = 5$, il vient $\mp a = x^5 - 5x^3 + 5x$; si $m = 7$, on trouve $\mp a = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$.

SECONDE MANIÉRE.

Soit tiré le diametre AB, & les cordes BR, AR, BD, AD, qui terminent l'arc donné AR, & l'arc cherché AD. Soit m le nombre des parties égales, le diametre $AB = 1$, les cordes données $BR = a$, $AR = b$; & les cordes inconnuës $BD = x$, $AD = y$. On aura * ces deux égalités generales $\mp a = x^m$ * Art. 463. $- \frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} yy x^{m-2} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4}$ &c, 475. $b = \frac{m}{1} y x^{m-1} - \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} + \ldots \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5}$ &c, dans lesquelles mettant à la place de m, le nombre de parties égales dans lesquelles l'arc AR doit être divisé, il en vient deux autres particulieres, dont la resolution fournit la valeur cherchée de la corde BD (x) ou AD (y), après avoir fait évanoüir l'inconnuë y ou x, par le moyen de l'équation $yy = 1 - xx$ ou $xx = 1 - yy$.

Soit par exemple $m = y$. On aura $\mp a = x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$, & $b = 7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - y^7$, & l'on achevera le reste comme dans l'article 462.

PROBLESME V.

478. TROUVER *une équation generale, qui serve à* FIG. 280. *inscrire dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque* ADEFGHK &c.

Soit tiré le diametre AB, & la corde BD qui terminent le premier côté du poligone ; soit le rayon

donné CA ou $CB = 1$, la corde inconnuë $BD = z$, & en general m la plus petite moitié du nombre des côtés du poligone, que je suppose être impair. On

* Art. 457. 474.

aura * $o = z^m - z^{m-1} - \overline{m-1}\, z^{m-2} + \overline{m-2}\, z^{m-3} + \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8}$ &c, pour l'équation generale qu'on demande ; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes que le nombre $m+1$ contient d'unités, parce que celui qui suivroit seroit nul ou zero.

Soit par exemple 7 le nombre des côtés du poligone à inscrire, on aura $m = 3$; & partant $o = z^3 - zz - 2z + 1$, dont la plus grande racine z exprimera la corde BD, qui termine l'arc AD, qui a pour corde le premier côté AD du poligone. De même si le nombre des côtes est 11, on aura $m = 5$; & par consequent l'équation generale devient $o = z^5 - z^4 - 4z^3 + 3zz + 3z - 1$, dont la plus grande des racines est $z = BD$.

PROBLESME VI.

FIG. 281. 282.

479. DIVISER *un angle donné en un nombre quelconque impair de parties égales, par le moyen d'un instrument.*

1°. Soit proposé de diviser l'angle donné ECF en trois parties égales. Il faut avoir un rhombe $ABCD$, dont les quatre côtés soient mobiles autour de ses quatre angles, & duquel les deux côtés AB, AD, soient indéfiniment prolongés vers X & Z ; attacher l'angle C du rhombe, dans le sommet C de l'angle donné ECF ; marquer sur les côtés CE, CF, les points E, F, en sorte que CE & CF soient égales chacune au côté CB ou CD ou DA ou AB du rhombe. Cela fait, il faut ouvrir ou resserrer les côtés AX, AZ, de l'angle BAD, en sorte qu'ils passent par les points E, F ; &

l'angle *BAD* sera la troisiéme partie de l'angle *ECF*.

Car les triangles *ABC*, *BCE*, étant isoscelles, l'angle externe *CBE* ou son égal *CEB*, qui vaut les deux internes opposés *BAC*, *BCA*, sera double de l'angle *BAC*; & dans le triangle *ECA*, l'angle externe *ECY*, qui vaut l'angle *CEA* plus l'angle *BAC*, sera triple de l'angle *BAC*. On démontrera de même que l'angle *FCY* est triple de l'angle *DAC*. D'où il suit que l'angle donné *ECF* est triple de l'angle *BAD*. *Ce qu'il falloit &c.*

2°. Soit proposé de diviser l'angle donné *HGK*, en cinq parties égales. On attachera dans l'angle *C* du rhombe *ABCD* de l'instrument precedent, un autre rhombe *CEGF*, dont les côtés seront égaux à ceux du premier & mobiles aussi autour de leurs angles. On fichera l'angle *G* de ce dernier rhombe, dans le sommet *G* de l'angle donné *HGK*; & ayant pris sur les côtés de cet angle les parties *GH*, *GK*, égales chacune au côté *GE* de l'un des rhombes, on ouvrira ou fermera l'angle *XAZ* mobile autour du point *A*, en sorte que ses côtés *AX*, *AZ*, touchent les angles *E*, *F*, & passent en même temps par les points marqués *H*, *K*. Je dis que l'angle *XAZ* ou *BAD* sera la cinquiéme partie cherchée de l'angle donné *HGK*. FIG. 283. 284.

Car ayant mené dans le rhombe *ABCD* la diagonale *AC*, prolongée indéfiniment vers *Y*; elle passera par le point *G*, puisque les angles *ECY*, *FCY*, étant triples des angles égaux *BAC*, *DAC*, seront aussi égaux entr'eux. Or dans le triangle *EGA*, l'angle externe *HEG*, qui vaut les deux internes opposés *BAC*, *EGA*, ou *ECY* (à cause du triangle isoscelle *CEG*) sera quadruple de l'angle *BAC*. Et partant dans le triangle *AHG*, l'angle externe *HGY*, qui vaut les deux internes opposés *BAC*, *GHA* ou *GEH* (à cause du triangle isoscelle *EGH*) sera le quintuple de l'angle *BAC*. On prouvera de même que l'angle *KGY* sera quintuple de l'angle *DAC*; d'où il est évident

que l'angle entier HGK sera quintuple de l'angle entier BAD ou XAZ.

S'il falloit diviser un angle donné en sept parties égales, il n'y aura qu'à joindre aux deux rhombes precedens, un troisiéme rhombe égal & construit de la même maniere ; & ainsi de suite de deux en deux. Car la pratique & la démonstration se fera toûjours de la même maniere.

EXEMPLE.

480. TROUVER entre deux lignes données a & b, autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra.

Soit l'inconnuë x la premiere des moyennes proportionnelles qu'il est question de trouver ; & l'on aura la progression geometrique continuë $a, x, \frac{xx}{a}, \frac{x^3}{aa}, \frac{x^4}{a^3}, \frac{x^5}{a^4}$ &c, de laquelle on prendra le terme dont le quantiéme surpasse de 2 le nombre donné des moyennes proportionnelles, & l'egalant à la donnée b on formera une égalité, dont la resolution fournira la valeur de l'inconnuë x qui est la premiere des moyennes proportionnelles que l'on cherche.

Qu'il faille, par exemple, trouver deux moyennes proportionnelles. On prendra dans la progression geometrique le quatriéme terme $\frac{x^3}{aa}$, qui étant égalé à la ligne b, donne $x^3 = aab$; & de même si l'on demande quatre moyennes proportionnelles, l'on aura $x^5 = a^4 b$. D'où il est facile de voir que si n marque en general le nombre des moyennes proportionnelles qu'il faut trouver entre les donnees a & b, on aura $x^{n+1} = a^n b$ pour l'égalité generale qu'il faut resoudre. Or cela posé,

Soit 1°. $x^{17} = a^{16} b$ qui sert à trouver seize moyennes proportionnelles. Je multiplie les deux membres de cette égalité par x^3, afin d'avoir $x^{20} = a^{16} b x^3$, dont la plus haute dimension 20 est le produit des deux nombres 4 & 5 qui se suivent immédiatement. Je prends l'é-

quation $x^5 = a^4 y$; ce qui donne en élevant chaque membre à la puissance quatriéme $x^{20} = a^{16} y^4 = a^{16} b x^3$, d'où je tire une autre équation $y^4 = b x^3$, dont le lieu étant construit separément, donnera par son intersection avec celui de la supposée $x^5 = a^4 y$, la valeur de l'inconnuë x. Ou bien je prends l'équation $x^4 = a^3 y$, dont j'éleve chaque membre à la quatriéme puissance ; & les multipliant ensuite par x, j'ai $x^{17} = a^{12} y^4 x = a^{16} b$, d'où je tire $y^4 x = a^4 b$, dont le lieu étant construit separément avec celui de l'équation $x^4 = a^3 y$, donnera par son intersection la valeur cherchée de l'inconnuë x.

Soit 2°. $x^{31} = a^{30} b$ qui sert à trouver trente moyennes proportionnelles. Je multiplie de part & d'autre par x^5, afin d'avoir $x^{36} = a^{30} b x^5$, dont la plus haute dimension 36 est le quarré de 6 : c'est pourquoi faisant $x^6 = a^5 y$, & prenant de part & d'autre la sixiéme puissance, j'ai $x^{36} = a^{30} y^6 = a^{30} b y^5$, d'où je tire $x^6 = b y^5$, dont le lieu étant construit separément avec celui de l'équation que j'ai prise d'abord $x^6 = a^5 y$, donnera par son intersection la valeur de l'inconnuë x. Ou bien ayant pris comme ci-dessus l'équation $x^6 = a^5 y$, je l'éleve à la cinquiéme puissance, & la multipliant ensuite par x, j'ai $x^{31} = a^{25} y^5 x = a^{30} b$, ce qui donne $y^5 x = a^5 b$. D'où l'on voit que le lieu de l'équation $x^6 = a^5 y$, étant construit separément avec le lieu de l'autre équation $y^5 x = a^5 b$, donnera la resolution de l'égalité proposée $x^{31} = a^{30} b$; de sorte que l'on peut choisir entre les deux lieux $y^6 x = b x^5$, ou $y^5 x = a^5 b$, celui qu'on jugera le plus simple. Il en est ainsi de tous les autres exemples qu'on peut se former à plaisir.

Il est à remarquer que si la dimension de l'inconnuë x n'étoit pas un nombre premier, l'égalité proposée se pourroit toûjours abaisser. Si l'on avoit, par exemple, $x^9 = a^8 b$, qui sert à trouver huit moyennes proportionnelles ; on trouveroit en extrayant de part & d'autre la racine cubique $x^3 = \sqrt[3]{a^8 b}$. Or afin que le nombre $a^8 b$ soit un cube, il n'y a qu'à trouver une ligne z dont le

cube $z^3 = aab$, ou ce qui eſt la même choſe de trouver entre a & b deux moyennes proportionnelles ; car mettant à la place de aab ſa valeur z^3, on aura $x^9 = a^6 z^3$ ou $x^3 = a^2 z$, de ſorte qu'en reſolvant ces deux egalitez $z^3 = aab$, & enſuite $x^3 = aaz$ qui ne ſont que du troiſieme degré, on trouvera la valeur de l'inconnuë x, qui eſt la premiere des huit moyennes proportionnelles entre les extrêmes a & b. De même ſi l'on avoit $x^{14} = a^{13} b$ qui ſert à trouver treize moyennes proportionnelles, il viendroit en extrayant de part & d'autre la racine quarrée $x^7 = \sqrt{a^{13} b}$. Or afin que $\sqrt{a^{13} b}$ ſoit un quarré, il faut trouver une ligne z dont le quarré $zz = ab$; car ſubſtituant à la place de ab, le quarré zz dans l'egalité propoſée, on aura $x^{14} = a^{12} zz$ ou $x^7 = a^6 z$; c'eſt pourquoi il n'y aura qu'à reſoudre d'abord l'egalité du ſecond degré $zz = ab$, & enſuite celle du ſeptiéme $x^7 = a^6 z$.

On doit encore remarquer que ces ſortes d'égalités qui ſervent à trouver des moyennes proportionnelles, & dont la dimenſion de l'inconnuë eſt un nombre premier, n'ont qu'une racine réelle & toutes les autres imaginaires ; dont la raiſon eſt qu'il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne qui ſoit la premiere des moyennes proportionnelles cherchées.

REMARQUE.

FIG. 285. 481. ON peut reſoudre le Problême precedent par le moyen d'un inſtrument geometrique dont la conſtruction eſt telle. Soient deux lignes indefinies XY, YZ, mobiles autour du point Y, en ſorte qu'elles ſe puiſſent ouvrir & fermer. Soit attachée au point quelconque fixe B du côté YX, une perpendiculaire indéfinie BC ſur ce côté, laquelle chaſſe devant elle (pendant que l'angle XYZ s'ouvre) par le point C où elle rencontre l'autre côté YZ, la perpendiculaire indéfinie CD ſur ce dernier côté, qui chaſſe de même

par

par le point D où elle rencontre le côté YX, la perpendiculaire indefinie DE; qui chasse encore de même par le point E où elle rencontre le côté YZ, la perpendiculaire indéfinie EF; qui chassera par le point F où elle rencontre le côté YX, la perpendiculaire FG; qui chasse encore par le point G où elle rencontre le côté YZ, la perpendiculaire GH; & ainsi de suite à l'infini, en augmentant autant que l'on voudra le nombre des perpendiculaires sur les côtés YX & YZ. Cela fait, soit proposé, par exemple, de trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux lignes droites données a & b. Ayant pris sur le côté YZ la partie YG quatriéme proportionnelle aux trois lignes a, b, YB, on ouvrira le côté XY de l'instrument, jusqu'à ce que la cinquiéme perpendiculaire FG (parce qu'il est question de trouver quatre moyennes proportionnelles) passe par le point G; & alors les lignes YC, YD, YE, YF, seront les quatre moyennes proportionnelles entre les extrêmes YB, YG; & partant la quatriéme proportionnelles aux trois lignes YB, YC, a sera la premiere des quatre moyennes proportionnelles demandées.

Car les triangles rectangles YBC, YCD, YDE, YEF, YFG, étant tous semblables; leurs côtés YB, YC, YD, YE, YF, YG, seront en progression geometrique continuë. Donc &c.

Il est clair que pendant que l'angle XYZ s'ouvre de plus en plus, le point B décrit un arc de cercle AB; & que les intersections continuelles D, F, H, des perpendiculaires CD, EF, GH, sur le côté YZ, avec l'autre côté YX, décrivent des lignes courbes AD, AF, AH, qui servent à trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra. Car si l'on décrit, par exemple, du diametre YE un demi cercle, il coupera la courbe AD en un point D, tel que YD est la seconde des deux moyennes proportionnelles, entre les ex-

Mmm

trêmes YB ou YA & YE; & de même si l'on décrit un demi cercle du diametre YG, il coupera la ligne courbe AF en un point F, tel que YF est la derniere des quatre moyennes proportionnelles entre YA & YG &c. Sur quoi il est à propos de remarquer que la ligne courbe AD est du quatriéme degré; la ligne courbe AF du huitiéme; la courbe AH du seiziéme, &c; ce que je prouve ainsi.

Soient 1°. les inconnuës & indéterminées $YC = x$, $CD = y$, $YD = z$, & la connuë YA ou $YB = a$, on aura à cause des triangles rectangles semblables YCD, YBC, cette équation $YB\ (a) = \frac{xx}{z}$, & à cause du triangle rectangle YCD cette autre $yy + xx = zz$, dans laquelle mettant à la place de z sa valeur $\frac{xx}{a}$ trouvée par le moyen de la premiere équation, il vient $aayy = x^4 - aaxx$; ce qui fait voir que la courbe AD est un lieu du quatriéme degré. Soient 2°. les inconnuës & indéterminées $YE = x$, $EF = y$, $YF = z$, & la connuë YA ou $YB = a$; on aura à cause des triangles rectangles semblables YFE, YED, YDC, YCB, cette équation $YB\ (a) = \frac{x^4}{z^3}$, & à cause du triangle rectangle YEF cette autre $yy + xx = zz$, dans laquelle faisant évanoüir l'inconnuë z par le moyen de la premiere équation, & ôtant les incommensurables, on trouve $aay^6 + 3aaxxy^4 + 3aax^4yy + aax^6 = x^8$; d'où l'on voit que la courbe AF est un lieu du huitiéme degré. On prouvera de même que la courbe AH est un lieu du seizieme degré, &c.

Maintenant puisque selon l'exemple on peut trouver deux moyennes proportionnelles, en n'employant que deux lignes du second degré; quatre moyennes proportionnelles, en se servant du lieu du second degré, & d'un autre du troisieme; au lieu qu'ici il faut dans le premier cas un lieu du quatriéme, qui

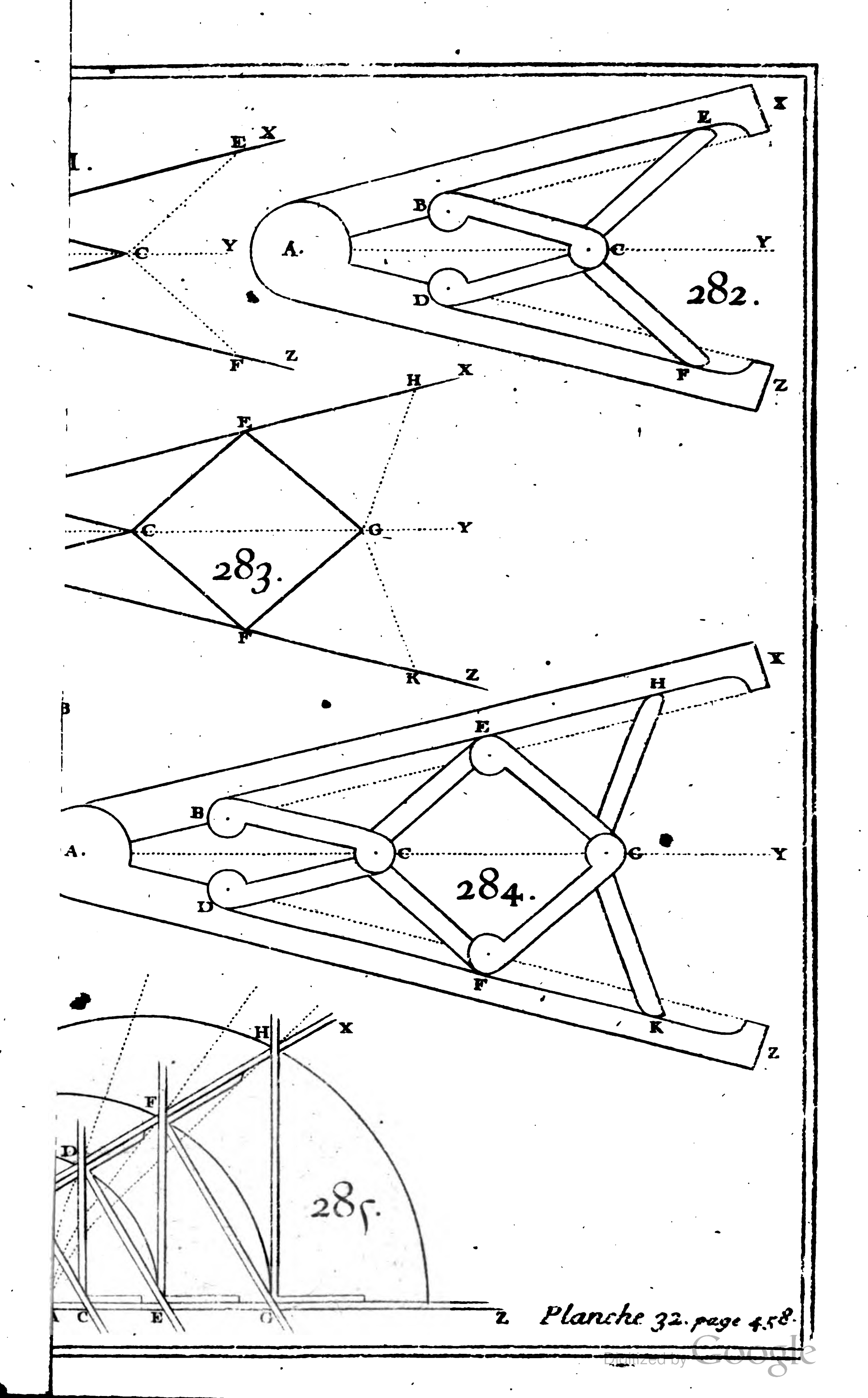
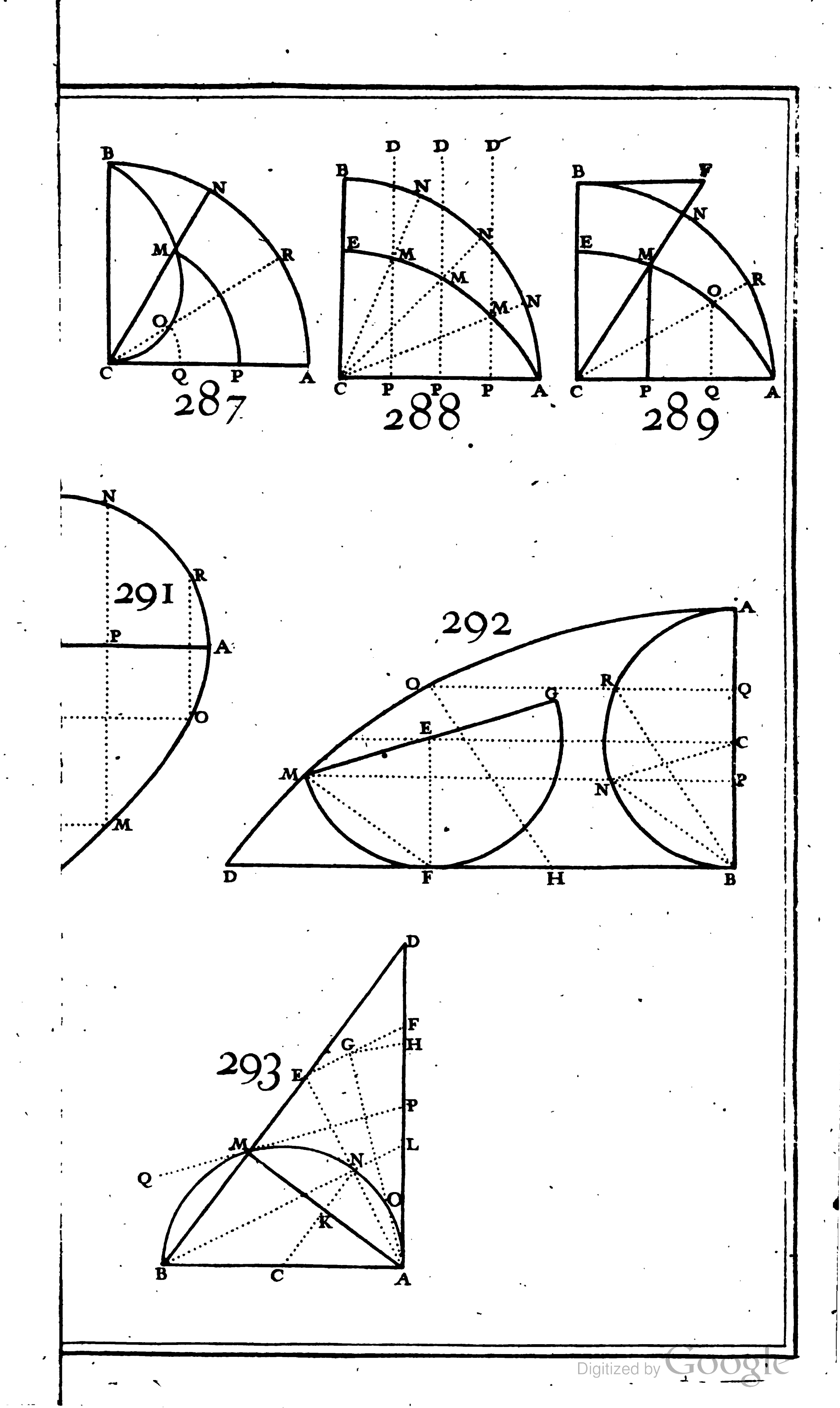


Planche 32. page 458.


287
288
289
291
292
293

est la ligne *AD*, & un lieu du second qui est le cercle *YDE*; & dans le second un lieu du huitiéme, sçavoir: la ligne courbe *AF*, & un lieu du second, sçavoir le cercle *YFG*: il s'ensuit que ces lignes courbes *AD*, *AF*, *AH*, sont beaucoup trop composées pour resoudre ce Problême. Cependant la facilité de la construction & de la démonstration, recompense en quelque sorte ce defaut.

FIN.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amez & feaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand-Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra : SALUT. Nôtre Academie Royale des Sciences Nous ayant trés-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plû luy donner par un Reglement nouveau de nouvelles marques de nôtre affection, Elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sciences qui font l'objet de ses exercices ; en sorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnez au public, Elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit luy accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous luy avons accordées en date du 6. Avril 1699. n'ayant point de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de nôtre Conseil d'Etat du 13. du mois d'Aoust dernier. Et desirant donner à ladite Academie en corps, & en particulier à chacun de ceux qui la composent, toutes les facilitez & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au public ; Nous avons permis & permettons par ces Presentes à ladite Academie, de faire imprimer, vendre & debiter dans tous les lieux de nôtre Obéïssance, par tel Imprimeur qu'Elle voudra choisir, en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon luy semblera : *Toutes les Recherches ou Observations journalieres, & Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de l'Academie Royale des Sciences* ; comme aussi *les Ouvrages, Memoires ou Traitez de chacun des Particuliers qui la composent*, & generalement tout ce que ladite Academie voudra faire paroître sous son nom, lorsqu'aprés avoir examiné & approuvé lesdits Ouvrages aux termes de l'article XXX. dudit Reglement, elle les jugera dignes d'être imprimez : & ce pendant le tems de dix années consecutives, à compter du jour de la date desdites Presentes. Faisons trés-expresses défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition que ce soit, d'imprimer, faire imprimer en tout ni en partie, aucun des Ouvrages imprimez par l'Imprimeur de ladite Academie ; comme aussi d'en introduire, vendre & debiter d'impression étrangere dans nôtre Royaume sans le consentement par écrit de ladite Academie ou de ses ayans cause, à peine contre chacun des contrevenans de confiscation des Exemplaires contrefaits au profit de son-

dit Imprimeur, de trois mille livres d'amende, dont un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, un tiers audit Imprimeur, & l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & interêts : à condition que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs-Libraires de Paris, & ce dans trois mois de ce jour ; Que l'impression de chacun desdits Ouvrages sera faite dans nôtre Royaume & non ailleurs, & ce en bon papier & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie ; & qu'avant que de les exposer en vente il en sera mis de chacun deux Exemplaires dans nôtre Bibliotheque publique, un dans celle de nôtre Château du Louvre, & un dans celle de nôtre trés-cher & feal Chevalier Chancelier de France le Sieur Phelyppeaux Comte de Pontchartrain, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Presentes ; du contenu desquelles Vous mendons & enjoignons de faire joüir ladite Academie ou ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchemens. Voulons que la copie desdites Presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin desdits Ouvrages soit tenuë pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires foy soit ajoûtée comme à l'original : Commandons au premier nôtre Huissier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous actes requis & necessaires sans autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires : CAR tel est nôtre plaisir. DONNE' à Versailles le neuviéme jour de Fevrier, l'an de grace mil sept cens quatre, & de nôtre Regne le soixante & uniéme. Par le Roy en son Conseil, LE COMTE.

L'Academie Royale des Sciences par Déliberation du 13. Fevrier 1704. a cedé le present Privilege à JEAN BOUDOT son Libraire, pour en joüir conformément au Traité fait par l'Academie avec ledit Boudot le 13. Juillet 1699. En foy de quoy j'ay signé, à Paris ce 15. Fevrier 1704.

FONTENELLE, *Secretaire de l'Academie Royale des Sciences.*

Registré sur le Livre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, Numero CVI, *page* 136. *conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrest du Conseil du* 13. *Aoust dernier. A Paris, ce* 13. *Fevrier* 1704.

P. EMERY, *Syndic.*

Je sous-signé, en conformité du Traité fait avec M. Hochereau,

le 25 Aoust dernier, qui avoit acquis du Sieur Boudot, Libraire de l'Academie, le droit du Privilege des Sections Coniques de M. le Marquis de l'Hôpital; de même encore que l'Agrement du Sieur Rigaud pour la joüissance dudit Privilege : déclare & reconnois tout ce que dessus avoir cedé cejourd'hui au Sieur Montalant, que je substituë en mon lieu & prerogatives, moyennant l'accord fait entre nous, à Paris ce treiziéme Novembre mil sept cens dix-neuf.

C. JOMBERT.

En 1707 il y a eu une première edition de cet Ouvrage.

